

Tema 5 (II). Ecuaciones de segundo grado**Resumen**

Ecuaciones de segundo grado: su forma estándar es $ax^2 + bx + c = 0$ (donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$).

Ejemplos: Son ecuaciones de segundo grado:

$$a) 2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad b) x^2 = 5x - 6 \quad c) (x - 2)(x + 5) = 0 \quad d) -4x^2 + 100 = 0$$

- Las soluciones de una ecuación son los valores de x (de la incógnita) que al sustituirlos verifican la ecuación.

Ejemplos:

a) Una solución de $2x^2 + 4x - 6 = 0$ es $x = -3$, pues $2 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 6 = 2 \cdot 9 - 12 - 6 = 0$.

El valor $x = -1$ no es solución, pues $2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 6 = 2 \cdot 1 - 4 - 6 = -8 \neq 0$

b) El valor $x = 3$ es solución de $x^2 = 5x - 6$, pues $3^2 = 5 \cdot 3 - 6$.

- Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones. Las transformaciones que mantienen equivalente una ecuación son:

1. Sumar o restar el mismo número a cada uno de sus miembros.
2. Multiplicar o dividir por un número distinto de cero a cada uno sus miembros.

Ejemplos:

a) Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$2x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 6 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$$

b) También son equivalente los siguientes pares de ecuaciones:

$$(x - 2)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \rightarrow \text{para obtener la 2ª se ha multiplicado}$$

$$3x - 4(x + 1)(x - 1) = -6 \Leftrightarrow 3x - 4(x^2 - 1) = -6 \Leftrightarrow 3x - 4x^2 + 4 = -6 \Leftrightarrow -4x^2 + 3x + 10 = 0$$

- Si una ecuación de segundo grado está escrita en su forma estándar, $ax^2 + bx + c = 0$, sus

soluciones se hallan aplicando la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ejemplo: Las soluciones de las ecuaciones anteriores son:

$$a) 2x^2 + 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 \pm 8}{4}$$

$$\text{Por tanto: } x_1 = \frac{-4 - 8}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \text{ y } x_2 = \frac{-4 + 8}{4} = \frac{4}{4} = 1. \text{ Las soluciones son: } x_1 = -3 \text{ y } x_2 = 1.$$

- Si la ecuación viene dada como producto de monomios igualados a 0, sus soluciones vienen dadas por la solución de cada monomio igualado a 0.

Ejemplos:

a) Las soluciones de $(x - 2)(x + 5) = 0$ son $x = 2$ y $x = -5$: las de $x - 2 = 0$ y $x + 5 = 0$.

(Recuerda: para que un producto valga 0, alguno de sus factores debe valer 0. En la igualdad anterior, los factores son x y $x - 4$.)

Como $(x - 2)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$, ambas deben tener las mismas soluciones.

En efecto, aplicando la fórmula a $x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$$

b) Las soluciones de $(3x+3)(2x-7)=0$ son las de $3x+3=0$, que es $x=-1$; y la de $2x-7=0$, que es $x=7/2$.

Ecuación incompleta de segundo grado

Es de la forma:

$$(1) \quad ax^2 + c = 0, \quad b = 0$$

$$(2) \quad ax^2 + bx = 0, \quad c = 0$$

Ejemplos: Son ecuaciones incompletas de segundo grado:

$$a) \quad x^2 - 25 = 0$$

$$b) \quad 2x^2 - 32 = 0$$

$$c) \quad x^2 - 4x = 0$$

$$d) \quad 5x^2 + 20x = 0$$

- Para hallar las soluciones de una ecuación incompleta no es preciso recurrir a la fórmula anterior (aunque pueden resolverse aplicándola). Se resuelven sacando factor común o despejando x .

Ejemplos: Las soluciones de las ecuaciones anteriores son:

$$a) \quad x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \rightarrow (\text{haciendo la raíz cuadrada}) \Rightarrow x = \sqrt{25} = \pm 5.$$

Las soluciones son $x_1 = -5$ y $x_2 = 5$.

$$b) \quad 2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = \pm 4. \text{ Soluciones: } x_1 = -4 \text{ y } x_2 = 4.$$

$$c) \quad x^2 - 4x = 0 \rightarrow (\text{sacando factor común}) \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x-4 = 0 \Rightarrow x = 4.$$

Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$.

$$d) \quad 5x^2 + 20x = 0 \rightarrow (\text{sacando factor común}) \Rightarrow 5x(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = -4.$$

Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = -4$.

Discusión de la solución general

Como ya se ha indicado, las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ son $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Pueden darse tres casos:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tendrá dos soluciones.
2. Si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación tendrá solo una solución, que se dice doble.
3. Si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales. (Recuerda que no existe la raíz cuadrada de un número negativo.)

Ejemplos: Las soluciones de las ecuaciones anteriores son:

a) La ecuación $-2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0$ tiene dos soluciones distintas, que son:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 6/4 = 3/2 \\ 1 \end{cases}$$

b) $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$. Sólo tiene una solución, $x = -2$.

c) $x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2} \Rightarrow$ No tiene solución, pues la raíz de un número negativo no existe.