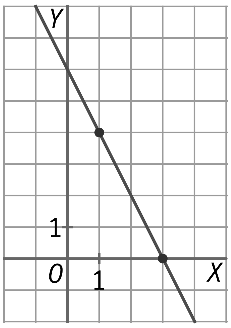
12 Funciones lineales y cuadráticas

1. Comprueba que la función $f(x) = 2(x+3) - 5(x+1)$ es lineal. Calcula la pendiente y la ordenada en el origen.

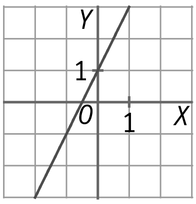
$f(x) = 2(x+3) - 5(x+1) = 2x + 6 - 5x - 5 = -3x + 1$. Pendiente: –3, ordenada en el origen: 1.

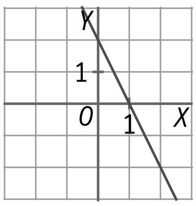
2. Representa la recta que pasa por los puntos $A(1,4)$ y $A(3,0)$. Calcula su pendiente. ¿Es creciente?

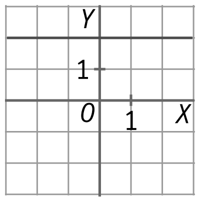


Pendiente: $m = \dfrac{0-4}{3-1} = -2 < 0 \Rightarrow$ Recta decreciente.

3. Asocia en tu cuaderno cada gráfica con su fórmula.

a)


b)


c)


A. $y = 2$. **B.** $y = 2x + 1$ **C.** $y = -2x + 2$

a) B. **b)** C. **c)** A.

4. Calcula las imágenes de –1, 10 y –1,5 en la función de proporcionalidad directa $f(x) = -1{,}5x$.

$f(-1) = -1{,}5 \cdot (-1) = 1{,}5$, $f(10) = -1{,}5 \cdot (10) = -15$, $f(-1{,}5) = -1{,}5 \cdot (-1{,}5) = 2{,}25$

5. Si *g*(*x*) es una función de proporcionalidad directa, completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

x	**–8**	**…**	**…**	**1**	**4**	**…**
y	**…**	**–7,5**	**0**	**…**	**10**	**8,5**

Si *g*(*x*) es de proporcionalidad directa y llamamos *a*, *b*, *c*, *d*, *e* a los huecos, entonces:

$\dfrac{a}{-8} = \dfrac{-7{,}5}{b} = \dfrac{0}{c} = \dfrac{d}{1} = \dfrac{8{,}5}{e} = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$

x	–8	-3	0	1	4	3,4
y	–20	–7,5	0	2,5	10	8,5

6. Asocia en tu cuaderno cada tabla con su función lineal correspondiente. Indica la pendiente y la ordenada en el origen. ¿Cuáles son constantes? ¿Cuáles son de proporcionalidad directa?

a)

x	–4	0	4	8
$f(x)$	–1	0	1	2

b)

x	–4	0	4	8
$f(x)$	14	10	6	2

c)

x	–4	0	4	8
$f(x)$	6	6	6	6

d)

x	–4	0	4	8
$f(x)$	–3	5	13	21

A. $f(x)=\frac{1}{4}x$ **B.** $f(x)=2x+5$ **C.** $f(x)=6$ **D.** $f(x)=10-x$

a) A. Prop. directa $m=\frac{1}{4}$ y $n=0$

b) D. $m=-1$ y $n=10$.

c) C. Constante $m=0$ y $n=6$.

d) B. $m=2$ y $n=5$

7. En esta tabla de proporcionalidad directa hay dos errores en los valores de *y*. Encuéntralos y corrígelos.

x	2	5	8	12	15
y	3	7	12	16,8	21

La tabla es de proporcionalidad directa, entonces: $\frac{y}{x}=k$, k constante. Por tanto, los errores se encuentran en los valores que corresponden a 2 y a 8 porque la constante es $\frac{7}{5}=\frac{16,8}{12}=\frac{21}{15}=1,4$. La tabla con los errores corregidos es:

x	2	5	8	12	15
y	2,8	7	11,2	16,8	21

8. Actividad interactiva

9. Obtén la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes rectas:

a) $y=2x-5$ **b)** $3x+2y-3=0$ **c)** $5x-4y=0$

a) Pendiente: 2 Ordenada en el origen: -5

b) Pendiente: $-\frac{3}{2}$ Ordenada en el origen: $-\frac{3}{2}$

c) Pendiente: $\frac{5}{4}$ Ordenada en el origen: 0

10. Actividad resuelta

11. Comprueba si los puntos $A(8,3)$ y $B(-1,-5)$ pertenecen a la recta de ecuación $y=3x-2$.

$3\neq 3\cdot 8-2\Rightarrow A(8,3)$ no pertenece a la recta.

$-5=3\cdot(-1)-2\Rightarrow B(-1,-5)$ pertenece a la recta.

12. Obtén la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(3,0)$ **y** $B(0,3)$ **b)** $A(2,-1)$ **y** $B(5,2)$

a) $\left.\begin{array}{l} 0 = m\cdot 3+n \\ 3 = m\cdot 0+n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = 3m+n \\ 3 = n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m=-1 \\ n=3 \end{array}\right\}$. La ecuación de la recta es $y = -x+3$.

b) $\left.\begin{array}{l} -1 = m\cdot 2+n \\ 2 = m\cdot 5+n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 = 2m+n \\ 2 = 5m+n \end{array}\right\} \Rightarrow -3 = -3m \Rightarrow m = 1, n = -3$. La ecuación de la recta es $y = x-3$.

13. Calcula la ecuación punto-pendiente de estas rectas:

a) $m = 3$ **y** $B(1,7)$ **b)** $m = -3$ **y** $B(0,2)$

a) $y-7 = 3(x-1)$

b) $y-2 = -3x$

14. ¿Cuál es la pendiente de la recta de ordenada en el origen –1 y que pasa por el punto $A(2,0)$ **?**

Se sustituye en la ecuación de la recta $y = mx+n$ se tiene:

$0 = m\cdot 2-1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$. Luego la pendiente es $m = \frac{1}{2}$.

15. Copia y completa esta tabla en tu cuaderno:

***ax* + *by* + *c* = 0**	***y* = *mx* + *n***	***m***	***n***
$x+2y-4=0$	•••	•••	•••
•••	$y=-3x+4$	•••	•••
•••	$y=-2$	•••	•••

***ax* + *by* + *c* = 0**	***y* = *mx* + *n***	***m***	***n***
$x+2y-4=0$	$y=-\frac{1}{2}x+2$	$-\frac{1}{2}$	2
$3x+y-4=0$	$y=-3x+4$	–3	4
$y+2=0$	$y=-2$	0	–2

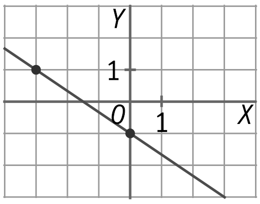
16. Actividad resuelta

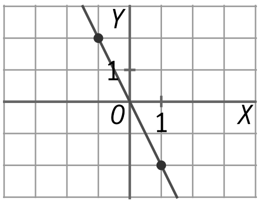
17. Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(1,-2)$ **y** $B(5,6)$**. Expresa la ecuación en forma general y explícita.**

Pendiente: $m = \frac{6-(-2)}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$ Ecuación punto-pendiente: $y+2 = 2(x-1)$

Forma general: $-2x+y+4=0$ Forma explícita: $y = 2x-4$

18. Escribe la ecuación punto-pendiente de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos e indica el valor de la ordenada en el origen.

a) 

b) 

a) $A(-3,1), B(0,-1) \Rightarrow m = \frac{-1-1}{0-(-3)} = -\frac{2}{3}$. Ec. punto-pendiente: $y+1 = -\frac{2}{3}(x-0) \Rightarrow y+1 = -\frac{2}{3}x$. $n = -1$

b) $A(-1,2), B(1,-2) \Rightarrow m = \frac{-2-2}{1-(-1)} = \frac{-4}{2} = -2$. Ecuación punto-pendiente: $y-2 = -2(x+1)$. $n = -1$

19. Dados los siguientes pares de rectas, estudia si son paralelas o secantes. Calcula el punto de corte en aquellas que sean secantes.

a) $\begin{matrix} \boldsymbol{r: -x+y=3} \\ \boldsymbol{s: 3x+2y=-4} \end{matrix}$ **b)** $\begin{matrix} \boldsymbol{r: 2x+y=5} \\ \boldsymbol{s: -6x-3y=9} \end{matrix}$ **c)** $\begin{matrix} \boldsymbol{r: -3x+6y=4} \\ \boldsymbol{s: 2x-4y=7} \end{matrix}$ **d)** $\begin{matrix} \boldsymbol{r: x+2y+1=0} \\ \boldsymbol{s: -4y=8} \end{matrix}$

a) $\left.\begin{matrix} m_r = 1 \\ m_s = -\frac{3}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_r \neq m_s$. Secantes. $\begin{cases} -x+y=3 \\ 3x+2y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$. Punto de corte $(-2,1)$.

b) $\left.\begin{matrix} m_r = -2 \\ m_s = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_r = m_s$. Paralelas.

c) $\left.\begin{matrix} m_r = \frac{1}{2} \\ m_s = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_r = m_s$. Paralelas.

d) $\left.\begin{matrix} m_r = -\frac{1}{2} \\ m_s = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_r \neq m_s$.Secantes. $\begin{cases} x+2y=-1 \\ -4y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$. Punto de corte $(3,-2)$.

20. Escribe las ecuaciones de dos rectas no paralelas y calcula su punto de corte.

Respuesta modelo: $r: x+y=7$, $s: -2x+3y=5$

Las pendientes $m_r = -1, m_s = \frac{2}{3}$, son distintas, entonces son secantes.

$\begin{cases} x+y=7 \\ -2x+3y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{5} \\ y = \frac{19}{5} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{16}{5}, \frac{19}{5}\right)$ es el punto de corte.

21. Calcula *k* para que las rectas $\boldsymbol{y = 3x+1}$, $\boldsymbol{2x+ky-5=0}$ sean paralelas.

Para que las dos rectas sean paralelas las pendientes tienen que ser iguales: $3 = \frac{-2}{k} \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$.

22. **Dadas las rectas $y = 2x - 2$, $2x + 4y - 8 = 0$:**

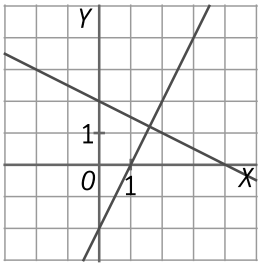
a) **Calcula la pendiente de cada recta e indica si son paralelas o secantes.**

b) **Representa las rectas y comprueba el resultado anterior.**

c) **A la vista de la gráfica, ¿cómo son las dos rectas? ¿Qué relación encuentras entre sus pendientes?**

a) Pendiente de $y = 2x - 2$: 2 Pendiente de $2x + 4y - 8 = 0$: $-\frac{1}{2}$. Por tanto, son secantes.

b)



c) Son perpendiculares y la relación de las pendientes es: $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

23. **Actividad resuelta**

24. **Calcula las siguientes ecuaciones de rectas:**

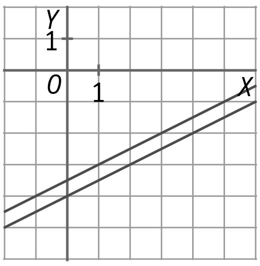
a) **Recta paralela a $r: x - 2y - 7 = 0$, que pasa por el punto $A(2, -3)$.**

b) **Recta paralela a $s: y + 3 = 0$, que pasa por el punto $B(-1, 0)$.**

a) $r: x - 2y - 7 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \Rightarrow m_r = \frac{1}{2}$

$-3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + n \Rightarrow n = -4$

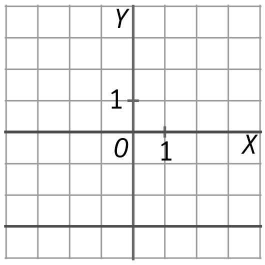
$y = \frac{1}{2}x - 4$



b) $s: y + 3 = 0 \Rightarrow m_s = 0$

$0 = 0 \cdot (-1) + n \Rightarrow n = 0$

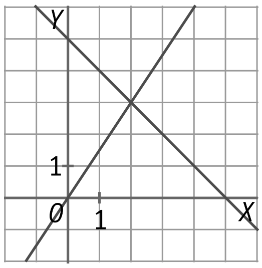
$y = 0$ (eje X)



25. **Escribe las ecuaciones de dos rectas que se corten en el punto $A(2,3)$.**

Respuesta modelo:

$r: y = \frac{3}{2}x$, $s: y = -x + 5$



26. El entrenador de un corredor está tomándole tiempos y en los primeros 12 s obtiene la siguiente tabla:

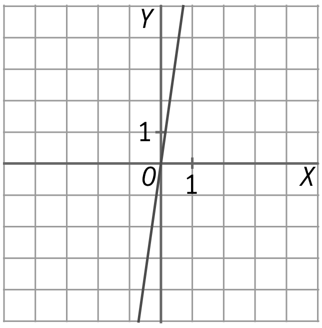
Tiempo (s)	0	3	4	6	10	12
Espacio recorrido (m)	0	21	28	42	70	84

Escribe la función que exprese el espacio recorrido en función del tiempo y dibuja su gráfica.

a) ¿Cuántos metros ha recorrido en 5 s?

b) ¿Cuánto tarda en recorrer los primeros 50 m?

Si x es el tiempo e y el espacio recorrido, entonces la función es $y = 7x$.



a) $y = 7 \cdot 5 = 35$. Recorre 35 m en 5 s.

b) $50 = 7x \Rightarrow x = \frac{50}{7} = 7{,}15\,\text{s}$. Tarda 7,15 s en recorrer 50 m.

27. En el mercado de divisas el dólar cotiza a 0,75 € en un determinado momento.

Escribe la función que expresa el número de dólares en función del número de euros.

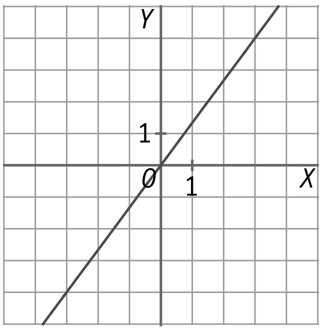
Represéntala y contesta:

a) ¿Cuántos euros cuesta ir al cine en EEUU si la entrada vale 12 $?

b) ¿Cuántos dólares cuesta una bicicleta de 350 €?

c) Una hamburguesa en Europa cuesta de media 3,72 € y en EEUU 4,62 $. ¿Dónde es más barata?

Si x es el número de euros e y el número de dólares, la función es $y = \frac{1}{0{,}75}x$



a) $12 = \frac{1}{0{,}75}x \Rightarrow x = 0{,}75 \cdot 12 = 9$. La entrada de cine cuesta 9 €.

b) $y = \frac{1}{0{,}75} \cdot 350 = 466{,}67$. La bicicleta cuesta 466,67 €.

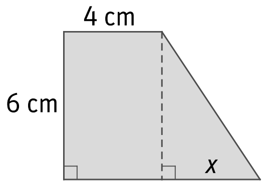
c) Expresamos el precio de la hamburguesa en la misma unidad monetaria:

Hamburguesa en Europa: $y = \frac{1}{0{,}75} \cdot 3{,}72 = 4{,}96\,\$$, luego $4{,}96 > 4{,}62$

Por tanto, la hamburguesa es más barata en EEUU.

28. Actividad resuelta

29. Dada la siguiente figura:



a) Expresa el área del trapecio rectángulo en función de *x*.

b) Calcula la pendiente y la ordenada en el origen.

c) ¿Cuál es el valor del área para *x* = 1 cm?

d) ¿Cuál es el valor de *x* si el área es 33 cm^2?

a) Si llamamos *y* al área del trapecio: $y = \frac{(x+4)+4}{2} \cdot 6 = 3(x+8) = 3x + 24$.

b) Pendiente: 3 Ordenada en el origen: 24

c) Si *x* = 1, *y* = 3·1 + 24 = 27. Luego el área es 27 cm^2.

d) Si *y* = 33, $33 = 3x + 24 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$. Luego *x* = 3 cm.

30. Indica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a funciones cuadráticas.

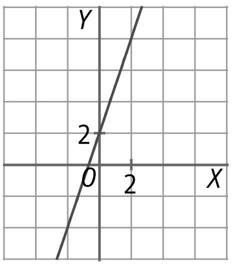
a) $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 20x + 1}$ **c)** $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4}$ **e)** $\boldsymbol{f(x) = -x^3 + 6x}$

b) $\boldsymbol{f(x) = x - 4}$ **d)** $\boldsymbol{f(x) = 2(x-1)^2 + 5}$ **f)** $\boldsymbol{f(x) = 6 - x^2}$

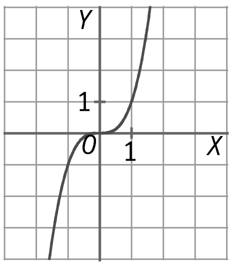
Las funciones cuadráticas son a), c), d) y f).

31. Justifica cuáles de las gráficas corresponden a funciones cuadráticas.

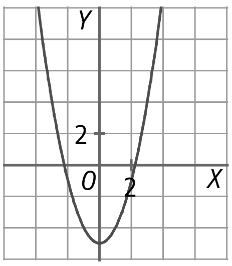
a)



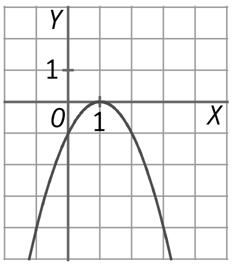
c)



b)



d)

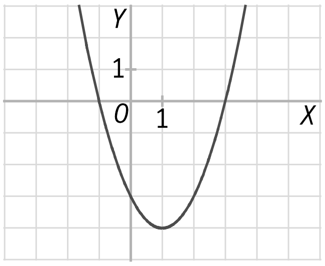


Son funciones cuadráticas b) y d) porque la representación es una parábola.

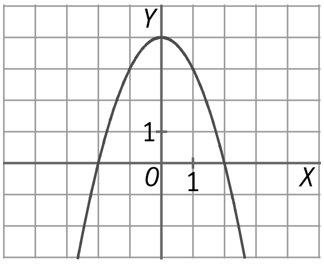
32. Actividad resuelta

33. Observa las siguientes parábolas y contesta a las siguientes preguntas.

I)



II)



a) **Escribe las coordenadas de los vértices. ¿Es un máximo o un mínimo absoluto?**

b) **¿Tienen puntos de corte con el eje de abscisas? En caso afirmativo, indica sus coordenadas.**

c) **¿Tienen puntos de corte con el eje de ordenadas? En caso afirmativo, indica sus coordenadas.**

d) **Copia las parábolas en tu cuaderno y dibuja el eje de simetría de cada una. ¿Cuál es su ecuación?**

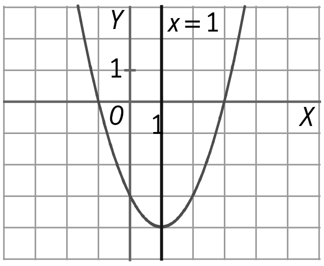
I)

a) Vértice: (1, –4). Es un mínimo absoluto.

b) Sí, corta en dos puntos de coordenadas: (–1, 0), (3, 0).

c) Sí, un solo punto (0, –3).

d) Eje de simetría $x = 1$.



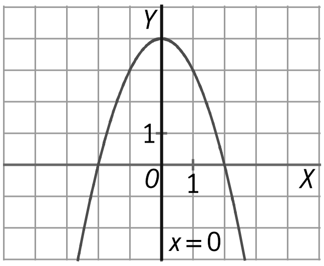
II)

a) Vértice: (0, 4). Es un máximo absoluto.

b) Sí, corta en dos puntos de coordenadas: (–2, 0), (2, 0).

c) Sí, un solo punto (0, 4).

d) Eje de simetría $x = 0$.



34. Actividad resuelta

35. ¿A cuál de las siguientes parábolas pertenecen estos tres puntos $A(-1,0)$, $B(-2,2)$ y $C(4,20)$?

a) $y = x^2 - 2x - 3$ **b)** $y = x^2 + 5x + 6$ **c)** $y = -x^2 + 7x + 8$ **d)** $y = x^2 + x$

a) $A(-1,0) \Rightarrow 0 = (-1)^2 - 2\cdot(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow A$ pertenece a la parábola.

$B(-2,2) \Rightarrow 2 = (-2)^2 - 2\cdot(-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5 \Rightarrow 2 \neq 5 \Rightarrow$ B no pertenece a la parábola.

$C(4,20) \Rightarrow 20 = (4)^2 - 2\cdot 4 - 3 = 5 \Rightarrow 20 \neq 5 \Rightarrow$ C no pertenece a la parábola.

b) $A(-1,0) \Rightarrow 0 = (-1)^2 + 5\cdot(-1) + 6 = 1 - 5 + 6 = 2 \Rightarrow -1 \neq 2 \Rightarrow A$ no pertenece a la parábola.

$B(-2,2) \Rightarrow 2 = (-2)^2 + 5\cdot(-2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0 \Rightarrow 2 \neq 0 \Rightarrow$ B no pertenece a la parábola.

$C(4,20) \Rightarrow 20 = (4)^2 + 5\cdot 4 + 6 = 42 \Rightarrow 20 \neq 42 \Rightarrow$ C no pertenece a la parábola.

c) $A(-1,0) \Rightarrow 0 = -(-1)^2 + 7\cdot(-1) + 8 = -1 - 7 + 8 = 0 \Rightarrow$ A pertenece a la parábola.

$B(-2,2) \Rightarrow 2 = -(-2)^2 + 7\cdot(-2) + 8 = -4 - 14 + 8 = -10 \Rightarrow 2 \neq -10 \Rightarrow$ B no pertenece a la parábola.

$C(4,20) \Rightarrow 20 = -(4)^2 + 7\cdot(-1) + 8 = -16 - 7 + 8 = -15 \Rightarrow 20 \neq -15 \Rightarrow$ C no pertenece a la parábola.

d) $A(-1,0) \Rightarrow 0 = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ A pertenece a la parábola.

$B(-2,2) \Rightarrow 2 = (-2)^2 + (-2) = 4 - 2 = 2 \Rightarrow$ B pertenece a la parábola.

$C(4,20) \Rightarrow 20 = (4)^2 + 4 = 20 \Rightarrow$ C pertenece a la parábola.

36. Actividad resuelta

37. ¿Cuál es el valor de *a* en la función $f(x) = x^2 - 5x + a$, si el punto *A*(–1, 7) pertenece a su gráfica?

$7 = (-1)^2 - 5\cdot 1 + a \Rightarrow 7 = 1 - 5 + a \Rightarrow a = 11.$

38. Indica el sentido de las ramas de las siguientes parábolas y si el vértice es un máximo o un mínimo absoluto.

a) $y = (4 - x)^2 - (2x + 1)^2$ **b)** $y = (5 - x)^2$ **c)** $y = (3 - x)\cdot(x + 1)$ **d)** $y = 9(x + 1)^2 - x^2$

a) $y = (4 - x)^2 - (2x + 1)^2 = -3x^2 - 12x + 15$, ramas hacia arriba porque $a = -3 < 0$. El vértice es máximo absoluto.

b) $y = (5 - x)^2 = x^2 - 10x + 25$, ramas hacia arriba porque $a = 1 > 0$. El vértice es mínimo absoluto.

c) $y = (3 - x)\cdot(x + 1) = -x^2 + 2x + 3$, ramas hacia abajo porque $a = -1 < 0$. El vértice es máximo absoluto.

d) $y = 9(x + 1)^2 - x^2 = 8x^2 + 18x + 9$, ramas hacia arriba porque $a = 8 > 0$. El vértice es mínimo absoluto.

39. Calcula las coordenadas del vértice de estas parábolas.

a) $\boldsymbol{y=(x-1)^2-1}$ **b)** $\boldsymbol{y=x^2+4x+1}$ **c)** $\boldsymbol{y=x-x^2}$ **d)** $\boldsymbol{y=3x^2-18x}$

a) $y=(x-1)^2-1=x^2-2x$. Vértice: $x=\frac{2}{2}=1$, $y=1^2-2\cdot 1=-1$, es decir, $V(1,-1)$.

b) Vértice: $x=\frac{-4}{2}=-2$, $y=(-2)^2+4\cdot(-2)+1=-3$, es decir, $V(-2,-3)$.

c) Vértice: $x=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, es decir, $V\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

d) Vértice: $x=\frac{18}{2\cdot 3}=\frac{18}{6}=3$, $y=3\cdot 3^2-18\cdot 3=-27$, es decir, $V(3,-27)$.

40. Calcula el vértice y el eje de simetría de estas parábolas.

a) $\boldsymbol{y=x^2-2x+3}$ **b)** $\boldsymbol{y=x^2-5x+4}$ **c)** $\boldsymbol{y=x^2+6x+1}$ **d)** $\boldsymbol{y=x^2+x}$

a) Vértice: $x=\frac{2}{2}=1, y=1^2-2\cdot 1+3=2\Rightarrow V(1,2)$. Eje de simetría x = 1.

b) Vértice: $x=\frac{5}{2}, y=\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\cdot\frac{5}{2}+4=-\frac{9}{4}\Rightarrow V\left(\frac{5}{2},-\frac{9}{4}\right)$. Eje de simetría $x=\frac{5}{2}$.

c) Vértice: $x=\frac{-6}{2}=-3, y=(-3)^2+6\cdot(-3)+1=-8\Rightarrow V(-3,-8)$. Eje de simetría $x=-3$.

d) Vértice: $x=\frac{-1}{2}, y=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow V\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$. Eje de simetría $x=-\frac{1}{2}$.

41. Calcula los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las siguientes parábolas.

a) $\boldsymbol{y=2(x-1)^2+5}$ **b)** $\boldsymbol{y=x^2-20x+21}$ **c)** $\boldsymbol{y=x^2-4x}$ **d)** $\boldsymbol{y=-x^2+6x}$

a) Corte con eje X: No tiene.

Corte con eje Y: $(0,7)$.

b) Corte con eje X: $y=0\Rightarrow x^2-20x+21=0\Rightarrow x=\frac{20\pm\sqrt{316}}{2}\Rightarrow\left(\frac{20+\sqrt{316}}{2},0\right),\left(\frac{20-\sqrt{316}}{2},0\right)$.

Corte con eje Y: $(0,21)$.

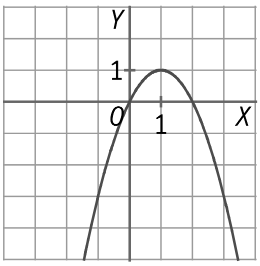
c) Corte con eje X: $y=0\Rightarrow x^2-4x=0\Rightarrow x(x-4)=0\Rightarrow x=0, x=4\Rightarrow(0,0),(4,0)$ Corte con eje Y: $(0,0)$.

d) Corte con eje X: $y=0\Rightarrow -x^2+6x=0\Rightarrow x(-x+6)=0\Rightarrow x=0, x=6\Rightarrow(0,0),(6,0)$ Corte con eje Y: $(0,0)$.

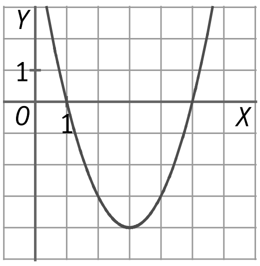
42. Dibuja las parábolas:

a) $\boldsymbol{y=-x^2+2x}$ **b)** $\boldsymbol{y=x^2-6x+5}$ **c)** $\boldsymbol{y=x^2-2x+6}$

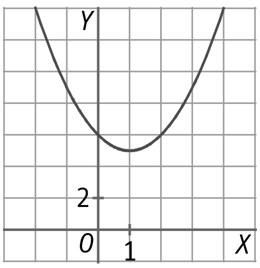
a)



b)



c)



43. Actividad resuelta

44. Si el punto $A(k, -9)$ pertenece a la parábola $y = x^2 - 7x + k$, calcula el vértice.

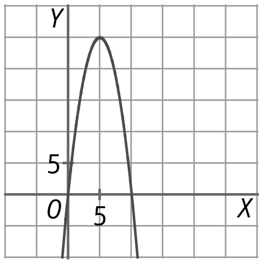
$A(k, -9)$ pertenece a la parábola: $-9 = k^2 - 7k + k \Rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0$. Resolviendo, $k = 3$.

La parábola es: $y = x^2 - 7x + 3$ y el vértice: $x = \frac{7}{2}, y = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{2} + 3 = \frac{37}{4} \Rightarrow V\left(\frac{7}{2}, \frac{37}{4}\right)$.

45. Encuentra el valor máximo del producto de dos números que sumen 10.

Llamando x a uno de los números e y el valor máximo del producto de los dos números que suman 10, entonces:

$y = x(10 - x) = -x^2 + 10x$.



Se tiene que calcular el máximo de una parábola con las ramas hacia abajo porque $a = -1 < 0$.

Por tanto, el máximo se tiene en el vértice: $x = \frac{-10}{-2} = 5$, $y = -5^2 + 5 \cdot 10 = 25$

El valor máximo es 25.

46. ¿Cuáles son las dimensiones de una parcela rectangular de perímetro 80 m y área máxima?(Recuerda que los cuadrados también son rectángulos)

Llamando x e y a las dimensiones del rectángulo, se tiene:

Área: $A = xy$ Perímetro: $P = 2x + 2y$

$P = 2x + 2y \Rightarrow y = \frac{80 - 2x}{2} = 40 - x$

$A = x(40 - x) = -x^2 + 40x$

Se tiene que calcular el máximo de una función cuadrática con a < 0. Por tanto, el valor máximo es el vértice de la parábola.

$x = \frac{-40}{-2} = 20 \Rightarrow y = 40 - 20 = 20$

Por tanto, la parcela tiene que ser cuadrada de lado 20 m para que el área sea máxima.

47. La función que representa el beneficio obtenido por una empresa si vende x unidades de uno de sus productos es $f(x) = -70x^2 + 2800x - 45000$. ¿Cuántas unidades tiene que vender para maximizar sus beneficios?

La función beneficio es una función cuadrática con a < 0, entonces el máximo se obtiene en el vértice de la parábola.

Por tanto, tenemos que calcular la abscisa del vértice:

$$x = \frac{-2800}{2 \cdot (-70)} = \frac{2800}{140} = 20$$

Tiene que vender 20 unidades para maximizar beneficios.

48. La temperatura, en grados centígrados, el día 28 de junio en Lisboa se puede expresar mediante la función:

$f(x) = \dfrac{-9x^2 + 200x + 1000}{100}$, siendo x la hora del día comprendida en el intervalo $[0, 24)$.

a) Calcula la temperatura que había al comienzo y al final del día.

b) Calcula la hora a la que hubo mayor temperatura y su valor.

a) La temperatura al comienzo del día es para $x = 0$: $f(0) = 10$ grados centígrados.

La temperatura al final del día es para $x = 24$, $f(24) = 6{,}16°\text{C}$.

b) $f(x)$ es una función cuadrática con $a < 0$, entonces el máximo se tiene en el vértice. Por tanto, tenemos que calcular la abscisa del vértice:

$$x = \frac{-\frac{200}{100}}{2 \cdot \left(\frac{-9}{100}\right)} = \frac{\frac{200}{100}}{\frac{18}{100}} = \frac{200}{18} = 11{,}11$$

Luego, la máxima temperatura se obtuvo a las 11 horas y 18 minutos. Sustituyendo, la temperatura fue 21,11ºC

49. Las siguientes tablas corresponden a distintas funciones lineales. Indica las que son funciones constantes o de proporcionalidad directa.

a)

x	–3	–1	0	2
y	–11	–5	–2	4

b)

x	–6	0	4	7
y	–3	0	2	3,5

c)

x	–2	0	1	3
y	30	0	–15	–45

d)

x	–3	0	1	2
y	–2	–2	–2	–2

a) No es constante ni de proporcionalidad directa.

b) Corresponde a una función de proporcionalidad directa.

c) Corresponde a una función de proporcionalidad directa.

d) Corresponde a una función constante.

50. Asocia cada tabla del ejercicio anterior a una de las siguientes funciones. Indica la pendiente o en su caso, la constante de proporcionalidad y la ordenada en el origen.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x$ b) $f(x) = -2$ c) $f(x) = 3x - 2$ d) $f(x) = -15x$

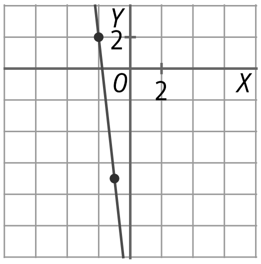
a) $f(x) = \frac{1}{2}x$. Tabla b). Pendiente: $m = \frac{1}{2}$. Ordenada en el origen: $n = 0$.

b) $f(x) = -2$. Tabla d). Pendiente: $m = 0$. Ordenada en el origen: $n = -2$.

c) $f(x) = 3x - 2$. Tabla a). Pendiente: $m = 3$. Ordenada en el origen: $n = -2$.

d) $f(x) = -15x$. Tabla c). Pendiente: $m = -15$. Ordenada en el origen: $n = 0$.

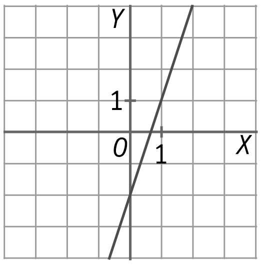
51. Representa la recta que pasa por los puntos *A*(–2, 2) y *B*(–1, –7). Calcula su pendiente. ¿Es creciente?



Pendiente: $m = \frac{-7-2}{-1-(-2)} = \frac{-9}{1} = -9 < 0$

La recta es decreciente.

52. Representa gráficamente la función lineal que verifica $f(2) = 4$ y $f(-1) = -5$. ¿Cuál es su pendiente? ¿Y su ordenada en el origen?



Pendiente: $m = \frac{-5-4}{-1-2} = \frac{-9}{-3} = 3 > 0$

Ordenada en el origen: $n = -2$

53. Una función lineal $f(x)$ verifica que $f(4) - f(1) = 6$. ¿Cuál es el valor de su pendiente?

Pendiente $m = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$

54. Sabiendo que *f*(*x*) es una función lineal:

a) Completa la siguiente tabla utilizando solamente la idea de pendiente.

x	**2**	**4**	**6**	**10**
***f*(*x*)**	**13**	**21**	**…**	**…**

b) Confirma que tus cálculos son correctos escribiendo una expresión para *f*(*x*).

a) Si *a* y *b* son los valores que faltan, entonces:

$$\frac{a-21}{6-4} = \frac{21-13}{4-2} \Rightarrow a-21 = 8 \Rightarrow a = 29 \qquad \frac{b-21}{10-4} = \frac{21-13}{4-2} \Rightarrow b-21 = 24 \Rightarrow b = 45$$

Por tanto la tabla completa es:

x	2	4	6	10
***f*(*x*)**	13	21	29	45

b) La función lineal pasa por los puntos *A*(2, 13) y *B*(4, 21), entonces una expresión para *f*(*x*) es:

$$\left.\begin{array}{l} 13 = m \cdot 2 + n \\ 21 = m \cdot 4 + n \end{array}\right\} \Rightarrow -8 = -2m \Rightarrow m = 4, n = 5 \text{. Luego } f(x) = 4x + 5 \text{.}$$

55. ¿Corresponde esta tabla a una función de proporcionalidad directa? En caso afirmativo, calcula su constante de proporcionalidad.

2	10^5	$3,6\cdot 10^7$	0	$\frac{1}{8}\cdot 10^{-3}$
***f*(*x*)**	$2\cdot 10^2$	$7,2\cdot 10^4$	0	$\frac{1}{4}\cdot 10^{-6}$

Corresponde a una función de proporcionalidad directa porque $\frac{2\cdot 10^2}{10^5}=\frac{7,2\cdot 10^4}{3,6\cdot 10^7}=\frac{\frac{1}{4}\cdot 10^{-6}}{\frac{1}{8}\cdot 10^{-3}}=2\cdot 10^{-3}$.

La constante de proporcionalidad es $2\cdot 10^{-3}$ y una expresión para *f*(*x*) es $f(x)=2\cdot 10^{-3}x$.

56. La función $f(x)=(x+1)^2-x^2$ corresponde con la diferencia de cuadrados de dos números consecutivos.

a) Demuestra que es una función lineal.

b) Encuentra dos números enteros consecutivos cuya diferencia de cuadrados sea 2013.

a) Se desarrolla el cuadrado y se simplifica la expresión:

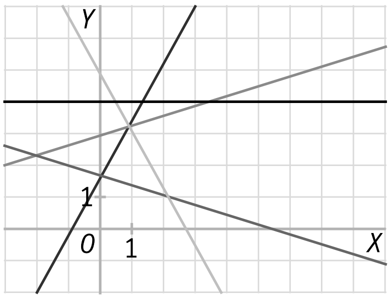
$$f(x)=(x+1)^2-x^2=x^2+2x+1-x^2=2x+1$$

Por lo tanto $f(x)$ es una función lineal.

b) Se resuelve $2013=(x+1)^2-x^2=2x+1\Rightarrow 2013-1=2x\Rightarrow 2012=2x\Rightarrow x=\frac{2012}{2}=1006$

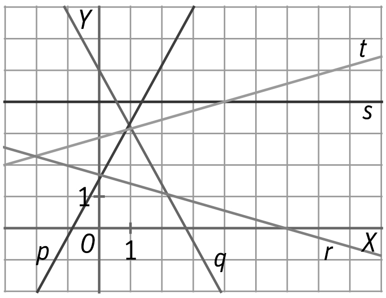
Por lo tanto un número es 1006 y el otro 1007.

57. Ordena de menor a mayor las pendientes de las siguientes rectas.



¿Qué rectas pasan por el origen?

¿Cuáles son horizontales?



Se observan las pendientes de las rectas y se tiene:

$$m_q<m_r<m_s<m_t<m_p$$

Ninguna recta pasa por el origen.

Es horizontal la recta *s* que tiene pendiente 0.

58. Actividad resuelta

59. En cada uno de los casos siguientes decide si es posible determinar una función *f*(*x*) de proporcionalidad directa que verifique las condiciones dadas.

a) $f(-6) = 1{,}38$

b) $f(0) = 1$

c) $f(2) = 2{,}36$ y $f(-3) = -3{,}54$

d) $f(1) = 1{,}4$ y $f(-3) = 4{,}2$

a) $f(-6) = 1{,}38 \Rightarrow 1{,}38 = m \cdot (-6) \Rightarrow m = \frac{1{,}38}{-6} = -0{,}23$

Luego la función de proporcionalidad directa es: $f(x) = -0{,}23x$

b) No se puede determinar una función de proporcionalidad directa porque la ordenada en el origen es 1.

c) $f(2) = 2{,}36 \Rightarrow 2{,}36 = m \cdot 2 \Rightarrow m = \frac{2{,}36}{2} = 1{,}18$ y $f(-3) = -3{,}54 \Rightarrow -3{,}54 = m \cdot (-3) \Rightarrow m = \frac{-3{,}54}{-3} = 1{,}18$

Luego la función de proporcionalidad directa es: $f(x) = 1{,}18x$

d) $f(1) = 1{,}4 \Rightarrow 1{,}4 = m \cdot 1 \Rightarrow m = 1{,}4$ y $f(-3) = 4{,}2 \Rightarrow 4{,}2 = m \cdot (-3) \Rightarrow m = \frac{4{,}2}{-3} = -1{,}4$.

Como $1{,}4 \neq -1{,}4$ entonces no se puede determinar una función de proporcionalidad directa.

60. Si la función lineal *f*(*x*) verifica que $\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = 2$, ¿cuál es el valor de $f(10) - f(5)$?

Como la función es lineal, la pendiente es $\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = 2$. Entonces:

$$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = 2 = \frac{f(10) - f(5)}{10 - 5} \Rightarrow f(10) - f(5) = 2 \cdot (10 - 5) = 2 \cdot 5 = 10$$

61. Escribe la ecuación explícita de las rectas que tienen estas características.

a) La pendiente es –3 y la ordenada en el origen 2.

b) La pendiente es 2 y pasa por el punto *A*(1, 4).

c) La ordenada en el origen es –1 y pasa por el punto *A*(1, 4).

d) La pendiente es –1 y pasa por el punto *A*(0, 3).

a) $y = -3x + 2$ **b)** $y = 2x + 2$ **c)** $y = 5x - 1$ **d)** $y = -x + 3$

62. Calcula la ecuación explícita y general de las siguientes rectas.

a) Recta que pasa por los puntos *A*(–1, 4) y *B*(2, 7).

b) Recta que pasa por los puntos *A*(5, 1) y *B*(7, 1).

c) Recta que pasa por los puntos *A*(2, 3) y *B*(2, 7).

a) Ecuación explícita: $y = x + 5$ Ecuación general: $x - y + 5 = 0$

b) Ecuación explícita: $y = 1$ Ecuación general: $y - 1 = 0$

c) Ecuación explícita: $x = 2$ Ecuación general: $x - 2 = 0$

63. Dados los siguientes pares de rectas, estudia si son paralelas o secantes. Calcula el punto de corte en aquellas que sean secantes.

a) $\boldsymbol{r: x+3y=3}$ $\boldsymbol{s: 3x-2y=-2}$

b) $\boldsymbol{r: -15x+10y=7}$ $\boldsymbol{s: 9x-6y=7}$

a) $r: x+3y=3 \Rightarrow r: y=-\frac{1}{3}x+1$ $\quad s: 3x-2y=-2 \Rightarrow s: y=\frac{3}{2}x+1$

Luego $m_r=-\frac{1}{3}\neq\frac{3}{2}=m_s$. Las rectas r y s son secantes.

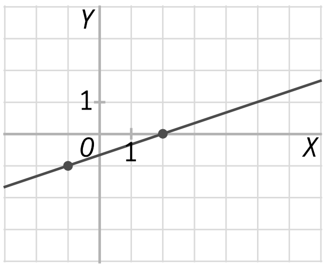
Punto de corte: $\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+1 \\ y=\frac{3}{2}x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow (0,1)$

b) $r: -15x+10y=7 \Rightarrow r: y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{10}$ $\quad s: 9x-6y=7 \Rightarrow s: y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{6}$

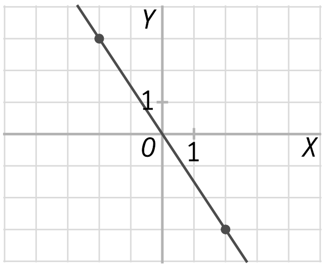
Luego $m_r=\frac{3}{2}=m_s$. Las rectas r y s son paralelas.

64. Calcula la ecuación punto-pendiente de estas rectas y escribe sus ecuaciones explícita y general.

a)



b)



a) Dos puntos por los que pasa la recta son $A(-1, -1)$ y $B(2, 0)$. Pendiente de la recta: $m=\frac{0-(-1)}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$.

Ecuación punto-pendiente: $y=\frac{1}{3}(x-2)$

Ecuación explícita: $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

Ecuación general: $x-3y-2=0$

b) Dos puntos por los que pasa la recta son $A(-2, 3)$ y $B(2, -3)$. Pendiente de la recta: $m=\frac{-3-3}{2-(-2)}=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$.

Ecuación punto-pendiente: $y-3=-\frac{3}{2}(x+2)$

Ecuación explícita: $y=-\frac{3}{2}x$

Ecuación general: $3x+2y=0$

65. Calcula *k* para que las rectas sean del tipo indicado:

a) $2x - y + 1 = 0$ **y** $x + ky - 5 = 0$ **son paralelas.** **b)** $-x + 5y + 3 = 0$ **y** $kx + 2y - 5 = 0$ **son secantes.**

a) $2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 1$, $x + ky - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{k}x + \frac{5}{k}$.

Si son rectas paralelas, entonces las pendientes deben coincidir: $2 = -\frac{1}{k} \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

b) $-x + 5y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$, $kx + 2y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{-k}{2}x + \frac{5}{2}$.

Si son rectas secantes, entonces las pendientes deben ser distintas: $\frac{1}{5} \neq -\frac{k}{2} \Rightarrow k \neq -\frac{2}{5}$

66. Actividad resuelta

67. Calcula la ecuación de la recta que siendo paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$ pasa por el punto *A*(1, 0). Exprésala en forma general.

La recta pedida es paralela a $2x - y + 5 = 0$, entonces debe tener la misma pendiente:

$$2x - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 2x + 5 \Rightarrow m = 2$$

Pasa por A(1, 0): $y = mx + n \Rightarrow 0 = 2 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -2$.

La ecuación explícita de la recta es: $y = 2x - 2$ y expresada en forma general es: $2x - y - 2 = 0$.

68. Calcula la ecuación de la recta que siendo paralela a la bisectriz del 1.er cuadrante, pasa por el punto $A(4,1)$.

La bisectriz del 1.er cuadrante tiene por ecuación $y = x$. La recta pedida es paralela a la bisectriz del 1.er cuadrante, entonces tiene la misma pendiente *m* = 1.

Pasa por $A(4,1)$: $y = mx + n \Rightarrow 1 = 1 \cdot 4 + n \Rightarrow n = -3$.

La ecuación explícita de la recta es: $y = x - 3$.

69. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de $r: 2x + 5y - 16 = 0$ y $s: y = -4x + 1$ y es paralela a la recta $t: x + 8y - 5 = 0$

La recta pedida pasa por el punto de corte de *r* y *s*: $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 16 \\ 4x + y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -\frac{11}{18}, y = \frac{31}{9}$

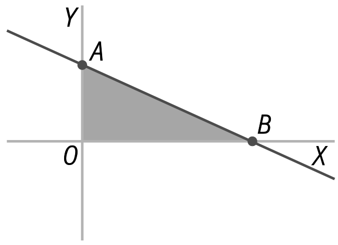
La recta pedida es paralela a *t*, entonces debe tener la misma pendiente:

$$t: x + 8y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{8}x + \frac{5}{8} \Rightarrow m = -\frac{1}{8}$$

$$y = mx + n \Rightarrow \frac{31}{9} = \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{11}{18}\right) + n \Rightarrow n = \frac{485}{144}$$

La ecuación explícita de la recta es: $y = -\frac{1}{8}x + \frac{485}{144}$

70. El área del triángulo de la figura es 5 unidades cuadradas. Si el vértice *A* es el punto *A*(0, 2), calcula la ecuación de la recta sobre la que está la hipotenusa.



Se halla el punto *B* que está sobre el eje *X*, luego las coordenadas son (*x*, 0).

Si el área es 5 unidades cuadradas, entonces:

$$\frac{2x}{2} = 5 \Rightarrow x = 5 .$$

Por tanto, *B*(5, 0).

Se calcula la recta que pasa por *A* y *B*:

Pendiente: $m = \frac{0-2}{5-0} = -\frac{2}{5}$. La ecuación explícita de la recta es: $y = -\frac{2}{5}x + 2$.

71. Villaperro y Villagato están a 20 km de distancia unidos por un camino. Laura baja corriendo desde Villagato a 7 km/h. Inés sube hacia Villagato a 3 km/h.

a) Escribe la ecuación de la recta que describe la distancia de cada una a Villaperro en función del tiempo.

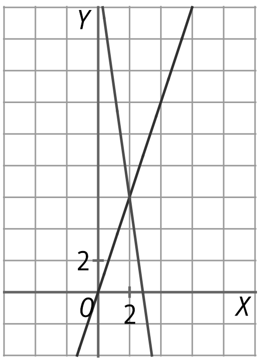
b) Representa ambas gráficas. ¿A qué hora se encuentran?

a) Si llamamos y a la distancia recorrida y x el tiempo, entonces las ecuaciones de la recta que describen las distancias de Laura e Inés son:

Ecuación de la distancia de Inés: $y = 3x$

Ecuación de la distancia de Laura: $y = 20 - 7x$

b)



Laura e Inés se encuentran a las 2 horas de haber salido.

72. Una barra de hierro mide 5 m de longitud a 0 ºC. Su longitud crece a medida que aumenta la temperatura según la función $l(t) = 5\left(1+12\cdot 10^{-6}t\right)$ donde t mide la temperatura en grados centígrados y $l(t)$ la longitud en metros.

a) Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de esta función lineal.

b) Calcula la longitud de la barra a 30 ºC.

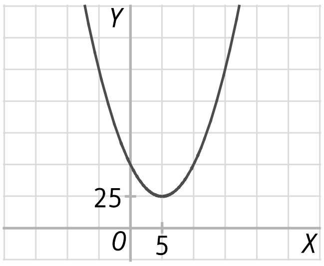
c) Si la barra mide 5,0054 m, ¿a qué temperatura está?

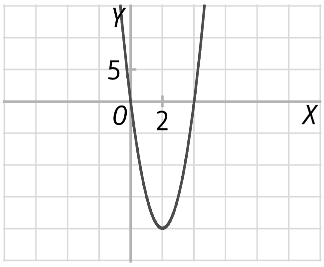
a) $l(t) = 5\left(1+12\cdot 10^{-6}t\right) = 60\cdot 10^{-6}t + 5$ Pendiente: $60\cdot 10^{-6}$ Ordenada en el origen: 5

b) $l(30) = 60\cdot 10^{-6}\cdot 30 + 5 = 5{,}0018$

c) $5{,}0054 = 60\cdot 10^{-6}t + 5 \Rightarrow t = 90\ °C$

73. Observa estas parábolas y contesta a las preguntas.



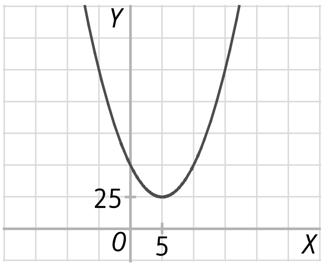


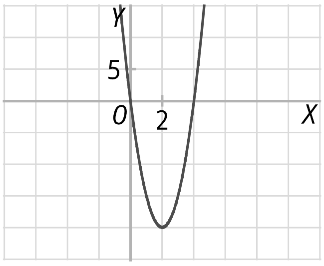
a) Escribe las coordenadas del vértice. ¿Es un máximo o un mínimo?

b) ¿Tiene puntos de corte con el eje de abscisas? En caso afirmativo, indica sus coordenadas.

c) ¿Tiene puntos de corte con el eje de ordenadas? En caso afirmativo, indica sus coordenadas.

d) Copia las parábolas en tu cuaderno y dibuja los ejes de simetría. ¿Cuáles son sus ecuaciones?



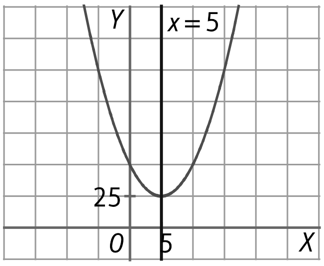


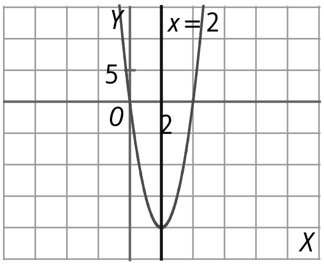
a) Vértice: (5, 25) Mínimo Vértice: (2, –20) Mínimo

b) No. Sí, (0, 0) y (4, 0)

c) Sí, (0, 50). Sí, (0, 0).

d)





Eje de simetría: $x = 5$ Eje de simetría: $x = 2$

74. Encuentra el eje de simetría y el vértice de la parábola $y = x^2 - 8x + 10$.

Eje de simetría: $x = \dfrac{-(-8)}{2\cdot 1} = 4 \Rightarrow x = 4$ Vértice: $x = 4 \Rightarrow y = 4^2 - 8\cdot 4 + 10 = -6 \Rightarrow (4,-6)$

75. Dada la parábola $y = x^2 - 6x + 5$, resuelve:

a) ¿En qué puntos corta la parábola al eje horizontal?

b) ¿Cuál es la ecuación de su eje de simetría?

c) Encuentra las coordenadas del vértice.

d) Represéntala.

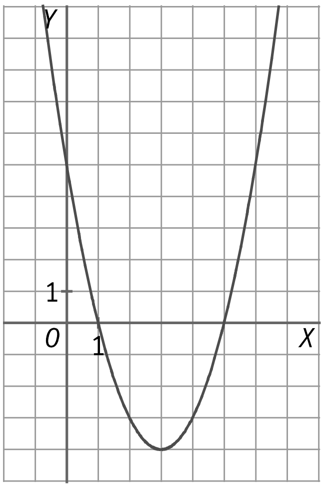
a) Puntos de corte con el eje horizontal: $y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5 \Rightarrow (1,0), (5,0)$

b) Ecuación del eje de simetría: $x = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$

c) Vértice: $x = 3 \Rightarrow y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4 \Rightarrow (3,-4)$

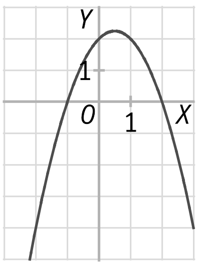
d)

x	0	1	2	4	5	6
y	5	0	–3	–3	0	5

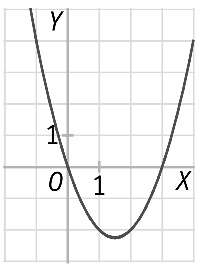


76. Empareja cada gráfica con su ecuación.

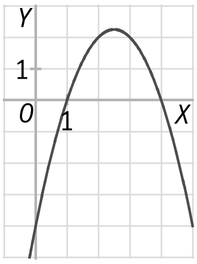
a)



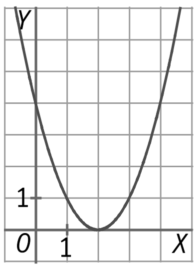
b)



c)



d)



A. $f(x) = x^2 - 4x + 4$ **B.** $h(x) = x^2 - 3x$ **C.** $g(x) = (x+1)(2-x)$ **D.** $i(x) = -x^2 + 5x - 4$

a) C. $g(x) = (x+1)(2-x) = -x^2 + x + 2$

b) B. $h(x) = x^2 - 3x$

c) D. $i(x) = -x^2 + 5x - 4$

d) A. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

77. Dada la parábola $y = x^2 - 6x + 10$:

a) ¿Corta el eje de abscisas en algún punto?

b) ¿Y el eje de ordenadas?

c) En caso afirmativo, encuentra sus coordenadas.

a) No corta al eje de abscisas porque la ecuación $x^2 - 6x + 10 = 0$ tiene discriminante $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4 < 0$.

b) Sí

c) Corte con el eje de ordenadas (0, 10).

78. Halla el valor de *a* para que el punto *A*(–2, 3) pertenezca a la parábola $f(x) = x^2 + 2x + a$.

Se sustituye el punto *A*(–2, 3) en la parábola y se resuelve:

$$3 = f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + a \Rightarrow 3 = 4 - 4 + a \Rightarrow a = 3$$

Luego $a = 3$.

79. Halla el valor de *k* para que el punto *A*(–1, 2) pertenezca a la parábola $f(x) = x^2 + kx + 8$.

Se sustituye el punto A(–1, 2) en la parábola y se resuelve:

$$2 = f(-1) = (-1)^2 + k \cdot (-1) + 8 \Rightarrow 2 = 1 - k + 8 \Rightarrow k = 7$$

Luego *k* = 7.

80. Representa las siguientes parábolas.

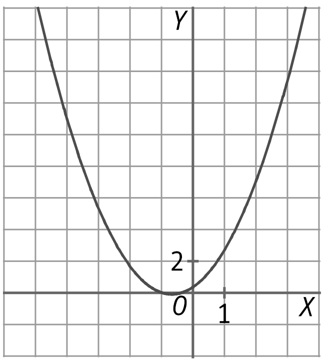
a) $y = x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

b) $y = (x - 3)^2$

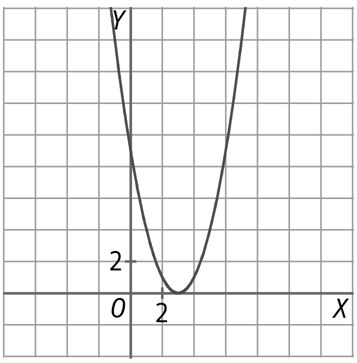
c) $y = (x + 5)^2 - 4$

d) $y = 3(x - 7)(2x - 1) + 4x + 8$

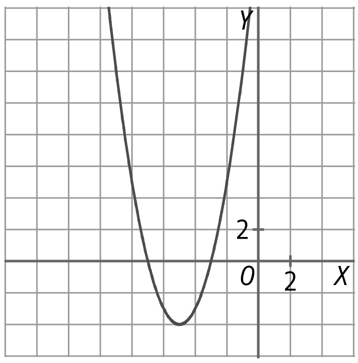
a)



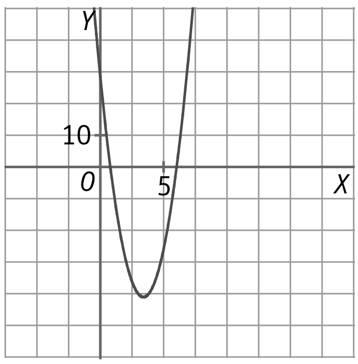
b)



c)



d)

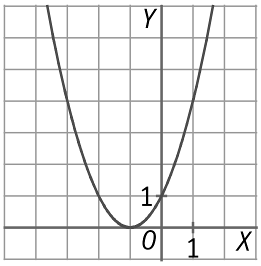


81. Escribe la ecuación de una parábola que tenga su vértice en el eje de abscisas y tenga abscisa negativa.

Respuesta modelo:

$y = x^2 + 2x + 1$

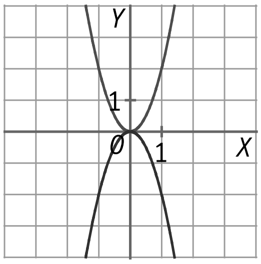
Abscisa del vértice: $x = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$



82. Escribe las ecuaciones de dos parábolas diferentes que tengan el mismo vértice.

Respuesta modelo:

$y = 2x^2$ e $y = -2x^2$



83. Calcula cuántos puntos de corte puede tener con el eje de abscisas la parábola $y = ax^2 + bx + c$ en cada caso.

a) Si $a > 0$ y $c > 0$.

b) Si $a \cdot c < 0$.

Se estudia el discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, es decir, $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) Si $a > 0$ y $c > 0$, entonces $4ac > 0$. Luego:

Si $b^2 > 4ac$, la ecuación tiene dos soluciones, es decir, la parábola tiene dos puntos de corte con el eje X.

Si $b^2 = 4ac$, la ecuación tiene una solución, es decir, la parábola tiene un punto de corte con el eje X.

Si $b^2 < 4ac$, la ecuación no tiene solución, es decir, la parábola no tiene puntos de corte con el eje X.

b) Si $a \cdot c < 0$, entonces $4ac < 0$. Luego $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, para cualquier valor de b. Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones, es decir, la parábola tiene dos puntos de corte con el eje X.

84. Escribe algunos valores de c para que la parábola $y = x^2 - 4x + c$ no corte al eje de abscisas.

Son válidos todos los valores de c tales que $c > 4$.

85. Deduce la fórmula que expresa el valor de la abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ partiendo de dos puntos con la misma ordenada.

Sean dos puntos $A(x_1, n), B(x_2, n)$ con la misma ordenada. El vértice de la parábola está situado en el eje de esta, entonces su abscisa es el punto medio de las abscisas de A y B.

Luego: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ es la fórmula que expresa el valor de la abscisa del vértice partiendo de dos puntos con la misma ordenada.

86. Halla dos números cuya suma sea 20 y tales que el cuadrado de uno más el doble del otro sea mínimo.

La suma de los dos números es 20, entonces uno es x y el otro $20 - x$.

Hay que minimizar la expresión $y = x^2 + 2(20 - x) = x^2 - 2x + 40$. Es una expresión cuadrática con $a > 0$, entonces el mínimo se encuentra en el vértice.

$$x = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$$

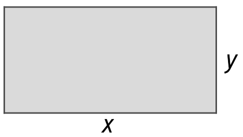
Luego un número es 1 y el otro 20 – 1 = 19.

87. Un agente comercial cobra por la venta de un cierto producto una comisión que viene dada por la expresión $C(x) = 100 + \frac{x}{100} - \frac{x^2}{1000}$ €, donde x representa la cantidad, en miles de euros, de la venta efectuada. Determina la cantidad que habrá que vender para que la comisión sea máxima.

La expresión $C(x)$ que determina la comisión que cobra el agente es una función cuadrática con $a < 0$. Luego el máximo se encuentra en el vértice.

Abscisa del vértice: $x = \dfrac{-\frac{1}{100}}{2 \cdot \left(\frac{-1}{1000}\right)} = 5$. Por tanto, la comisión será máxima cuando realice una venta de 5000 €.

88. Escribe la diagonal de un rectángulo de perímetro 20 cm en función de su base, x. ¿Cuál es el valor mínimo de dicha diagonal?



Sea x la base e y la altura del rectángulo. Si el perímetro es 20 cm entonces:

$$y = \frac{20 - 2x}{2} = 10 - x$$

El valor de la diagonal al cuadrado es: $d^2 = x^2 + (10 - x)^2 = x^2 + x^2 - 20x + 100 = 2x^2 - 20x + 100$.

La expresión de la diagonal al cuadrado es una función cuadrática con $a > 0$. El valor mínimo corresponde al vértice de la parábola:

$$x = \frac{-(-20)}{2 \cdot 2} = \frac{20}{4} = 5$$

Luego $d^2 = 2 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 100 = 50$.

Por tanto, el valor mínimo de la diagonal es $\sqrt{50}$ cm.

89. Una compañía de transportes ha comprobado que el número de viajeros diarios depende del precio del billete, según la función $n(p) = 3000 - 6p$ donde $n(p)$ es el número de viajeros cuando p es el precio del billete. Calcula:

a) La función que expresa los ingresos diarios I de esta empresa en función del precio del billete p.

b) El precio del billete que hace máximos dichos ingresos.

c) ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos máximos?

a) $I(p) = n(p)p = (3000 - 6p)p = -6p^2 + 3000p$.

b) $I(p)$ es una expresión cuadrática con $a < 0$, entonces el máximo es encuentra en el vértice $p = \dfrac{-3000}{2 \cdot (-6)} = 250$ viajeros.

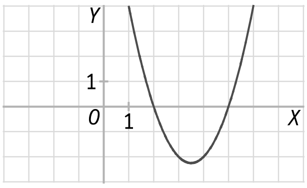
c) $I(250) = -6 \cdot 250^2 + 3000 \cdot 250 = 375000$. Por tanto los ingresos máximos ascenderán a 375 000 €.

90. Representa las funciones cuadráticas $f(x) = 5x^2 + 3x + 2$, $g(x) = -2x^2 + 3x + 1$ y $h(x) = x^2 - 7x + 10$.

a) ¿Cuál es el signo de *f*(2, 20132014)?

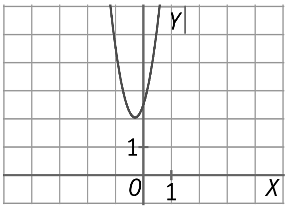
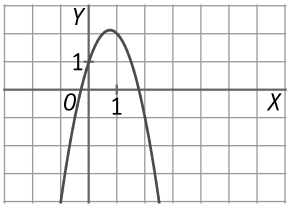
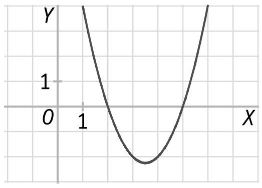
b) ¿Hay algún punto en el que *h*(*x*) sea negativa?

c) ¿A cuál de las tres funciones le corresponde esta gráfica?



Las gráficas de las tres funciones cuadráticas son:

$f(x) = 5x^2 + 3x + 2$ $\quad g(x) = -2x^2 + 3x + 1$ $\quad h(x) = x^2 - 7x + 10$

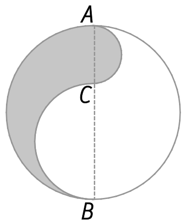




a) La parábola $f(x) = 5x^2 + 3x + 2$ no tiene puntos de corte con el eje *X*, luego *f*(2, 20132014) > 0.

b) Se estudian los puntos de corte de *h*(*x*) con el eje *X*: $h(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 5$. Por tanto, para los puntos con abscisa entre 2 y 5 la función cuadrática *h*(*x*) es negativa.

c) Corresponde a la función *h*(*x*) porque los puntos de corte con el eje de abscisas son (2, 0), (5, 0) y el vértice $\left(\frac{7}{2}, \frac{-9}{4}\right)$.

91. La región sombreada de la figura está limitada por tres semicircunferencias de diámetros *AC*, *CB* y *AB* siendo *C* un punto del diámetro *AB* de la mayor. Si *AC* = 2*x* y *AB* = 40:

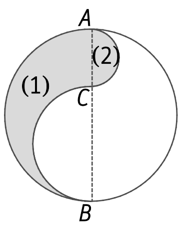


Escribe en función de *x* el perímetro y el área de esta región.

a) ¿Qué tipo de funciones son el perímetro y el área?

b) ¿Depende de *x* el perímetro de la figura?

c) ¿Cuáles son los valores del área para *x* = 0 y para *x* = 20?



Radio de la circunferencia diámetro *CB*: $r_{CB} = \dfrac{40 - 2x}{2} = 20 - x$

Radio de la circunferencia diámetro *AC*: $r_{AC} = x$

a) Perímetro región (1): $P_1 = 20\pi + (20 - x)\pi = 40\pi - \pi x$ Perímetro región (2): $P_2 = \pi x$

Perímetro de la región sombreada: $P = P_1 + P_2 = 40\pi - \pi x + \pi x = 40\pi \Rightarrow P = 40\pi$

Área región (1): $A_1 = \dfrac{\pi \cdot 20^2}{2} - \dfrac{\pi(20 - x)^2}{2} = \dfrac{40\pi x - \pi x^2}{2}$ Área región (2): $A_2 = \dfrac{\pi x^2}{2}$

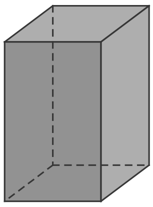
Área región de la región sombreada: $A = A_1 + A_2 = \dfrac{40\pi x - \pi x^2}{2} + \dfrac{\pi x^2}{2} = 20\pi x$ unidades^2.

b) El perímetro es una función constante y el área es una función lineal.

c) No depende de *x*, es una función constante.

d) Si *x* = 0, $A = 20\pi \cdot 0 = 0$. Si x = 20, $A = 20\pi \cdot 20^2 = 8000\pi$ unidades^2.

92. El volumen, *y*, de un prisma cuya base mide 36 cm^2 de área, depende de la altura *x* según la función $y = 36x$.



a) ¿Cuál es el volumen si la altura es 10 cm?

b) ¿Cuál es la altura de un prisma si su volumen es 126 cm^3?

a) Si $x = 10$, $y = 36 \cdot 10 = 360$ cm^3. Volumen 360 cm^3.

b) $126 = 36x \Rightarrow x = \frac{126}{36} = 3,5$. Altura 3,5 cm.

93. Las tarifas de los taxis de una ciudad están en función de una cantidad fija por bajada de bandera y una cantidad proporcional a los kilómetros recorridos. María paga 15 € por un viaje de 10 km, y 12,5 € por un viaje de 8 km.

a) ¿Cuál es la cantidad fija de bajada de bandera?

b) Escribe la función que relaciona el precio de la carrera con el número de kilómetros recorridos.

a) Si se tiene que pagar una cantidad fija por bajada de bandera y una cantidad proporcional a los kilómetros recorridos, entonces la función es lineal $y = mx + n$. Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 15 = m \cdot 10 + n \\ 12,5 = m \cdot 8 + n \end{array}\right\} \Rightarrow m = 1,25 \quad n = 2,5$$

Luego, la cantidad fija de la bajada de bandera es 2,5 €.

b) Si llamamos *x* al número de kilómetros recorridos e *y* al precio de la carrera, entonces la función es:

$$y = 1,25x + 2,5$$

94. El precio del alquiler de un coche en la empresa ALQBAR se compone de una cantidad fija de 34 € más una proporcional al número de kilómetros recorridos. Orlando, que ha hecho 50 km más que Carmen, ha pagado 8 € más. Escribe la función que relaciona los kilómetros recorridos con la cantidad a pagar.

Sean *x* los kilómetros recorridos e *y* la cantidad a pagar por Carmen.

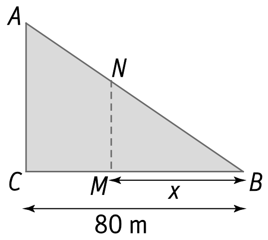
La función es lineal y la pendiente es:

$$m = \frac{8}{50} = 0,16$$

Luego la función que relaciona los kilómetros recorridos con la cantidad a pagar es:

$$y = 34 + 0,16x$$

95. Dos hermanos heredan una parcela en forma de triángulo rectángulo de 2400 m^2 de superficie con las dimensiones que se observan en la figura.



Desean construir un muro *MN* a *x* metros del vértice *B* que divida a la parcela en dos regiones de igual área.

a) Demuestra que la longitud del muro es $MN = \frac{3}{4}x$.

b) Prueba que el área de la región dada por el triángulo *MNB* viene dada por la función $f(x) = \frac{3}{8}x^2$.

c) Representa la parábola *y* = *f*(*x*). (Toma para la escala del eje de abscisas 10 m y para el eje de ordenadas 200 m^2).

d) A la vista de la gráfica decide aproximadamente la situación del muro.

e) Resolviendo una ecuación de segundo grado, decide el valor exacto de *x* para que las dos regiones tengan igual área.

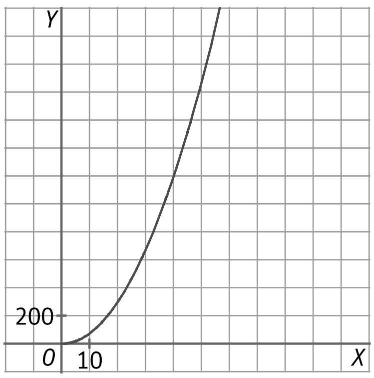
f) Calcula exactamente la longitud del muro que deben construir.

a) Si el área es 2400 m^2, entonces el lado *AC* es: $\frac{80 \cdot AC}{2} = 2400 \Rightarrow AC = \frac{2400 \cdot 2}{80} = 60\,\text{m}$.

Por el teorema de Tales: $\frac{MN}{60} = \frac{x}{80} \Rightarrow MN = \frac{60}{80}x = \frac{3}{4}x$

b) Área del triángulo *MNB*: $\frac{x \cdot \frac{3}{4}x}{2} = \frac{3}{8}x^2$

c)



d) A la vista de la gráfica, el muro se ha de situar a unos 55 m del vértice *B*.

e) Se resuelve $1200 = \frac{3}{8}x^2 \Rightarrow x = \sqrt{3200} = 56,57$. El muro se debe situar a 56,57 m del vértice *B*.

f) La longitud del muro es: $\frac{3}{4} \cdot 56,57 = 42,43$ m.

96. **El producto de todos los valores de *a* para los que las tres rectas $r: y = 2x - 1$, $s: 6x - 2y - 8 = 0$ y $t: y = ax - 7$ no forman triángulo es:**

A. 6 **B.** –56 **C.** 17 **D.** 24

Para que las tres rectas no formen triángulo la pendiente de la recta *t* debe coincidir con la pendiente de la recta *r* o de la recta *s,* o las tres rectas deben cortarse en el mismo punto.

La pendiente de *r* es 2 y la pendiente de *s* es 3. Luego *a* = 2 o *a* = 3.

Las rectas *r* y *s* se cortan en el punto (3, 5). Para que *t* pase por ese punto, *a* = 4.

Luego el producto es 24. Respuesta **D.**

97. **Las gráficas de $2x - y + 1 = 0$ y de $y = x^2$ se cortan en los puntos *A* y B. Las abscisas de *A* y *B* son las soluciones de la ecuación:**

A. $x^2 + 2x + 1 = 0$ **B.** $2x + 1 = 0$ **C.** $x^2 - 2x - 1 = 0$ **D.** $x^2 = 0$

Se resuelve $\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$. Luego la respuesta correcta es **C.**

98. **Si la parábola $y = -x^2 + bx - 9$ tiene su vértice en el eje de abscisas, *b* es:**

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

Si el vértice se encuentra en el eje de abscisas, entonces sus coordenadas son (*x*, 0). La abscisa del vértice es:

$$x = \frac{-b}{2 \cdot (-1)} = \frac{b}{2}$$

Se sustituye en la expresión de la parábola y se resuelve la ecuación de segundo grado con incógnita *b*:

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{b^2}{4} + \frac{b}{2} - 9 = 0 \Rightarrow b^2 - 36 = 0 \Rightarrow b = 6, b = -6$$

Luego la respuesta correcta es **D.**

99. **Los puntos *A*(2, –3), *B*(4, 3) y $C\left(5, \frac{k}{2}\right)$ están alineados. Por tanto, el valor (o valores) de *k* es:**

A. 12 **B.** –12 **C.** ±12 **D.** 12 y 6

Recta que pasa por *A* y *B*:

$$\left.\begin{array}{l} -3 = m \cdot 2 + n \\ 3 = m \cdot 4 + n \end{array}\right\} \Rightarrow m = 3, n = -9 \Rightarrow y = 3x - 9$$

La recta pasa por el punto C: $\frac{k}{2} = 3 \cdot 5 - 9 \Rightarrow \frac{k}{2} = 6 \Rightarrow k = 12$

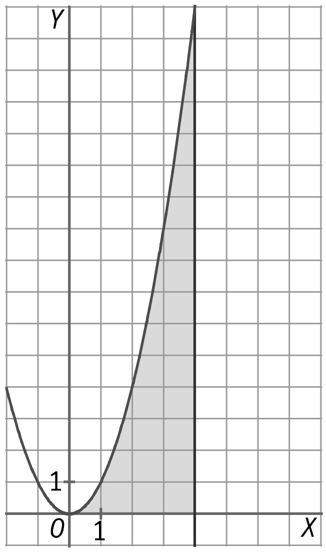
Luego la respuesta correcta es **A.**

100. Definimos un punto reticular como aquel en el que sus coordenadas son números enteros. ¿Cuántos puntos reticulares hay en el interior de la región limitada por el eje de abscisas, el conjunto de puntos de abscisa 4 y el conjunto de puntos (*x*, *y*) tales que $y = x^2$?

A. 24 **B. 35** **C. 34** **D. 30**

Observando la representación de la región se tiene que el número de puntos reticulares que hay en el interior de la región es 35.

Luego la respuesta correcta es **B.**



101. La tabla adjunta muestra la distancia *s* recorrida por una bola en un plano inclinado durante *t* segundos:

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
s	**0**	**10**	**40**	**90**	**160**	**250**

La distancia recorrida para *t* = 2,5 segundos es:

A. 45 **B. 62,5** **C. 70** **D. 75**

Observando la tabla se tiene que $s = 10t^2$. Luego si *t* = 2,5, $s = 10 \cdot (2{,}5)^2 = 62{,}5$.

Por tanto, la respuesta correcta es **B.**

102. Manuel tiene que resolver esta actividad:

"Escribe en la forma $y = ax^2 + bx + c$ la ecuación de la parábola $y = (x-2)^2 - 2(3x-1)$ y comprueba que lo que has obtenido es correcto". Esta es su respuesta:

> Operando y simplificando se obtiene la parábola:
> $y = (x-2)^2 - 2(3x-1) = x^2 - 4 - 6x + 2 = -2x^2 - 6x - 2$
> Se comprueba que la parábola obtenida coincide en un punto con la del enunciado.
> Por ejemplo, *x* = 2:
> - $y = x^2 - 6x - 2 \Rightarrow 2^2 - 6 \cdot 2 - 2 = -10$
> - $y = (x-2)^2 - 2(3x-1) \Rightarrow (2-2)^2 - 2(3 \cdot 2 - 1) = -10$
>
> Así pues, ambas expresiones son la misma.

¿Dónde está el error?

El error está en el desarrollo $(x-2)^2$. Según Manuel, $(x-2)^2 = x^2 - 4$ y es incorrecto, porque se trata del cuadrado de una diferencia, es decir, $(x-2)^2 = x^2 - 2x + 4$.

PONTE A PRUEBA

La factura de la luz

Actividad resuelta

El abono

Las entradas para la ópera en la temporada 2015-2016 pueden adquirirse según las siguientes tarifas:

- **Tarifa *A*: 150 € el abono para toda la temporada.**
- **Tarifa *B*: 75 € por un abono y 6 € por cada sesión a la que asistes.**
- **Tarifa *C*: 19 € por cada sesión a la que asistes.**

1. Completa la siguiente tabla.

	Precio por 5 sesiones	Precio por 10 sesiones	Precio por 15 sesiones
Tarifa *A*	$P_A(5) = 150$ €	$P_A(10) = \bullet\bullet\bullet$	$P_A(15) = \bullet\bullet\bullet$
Tarifa *B*	$P_B(5) = 105$ €	$P_B(10) = \bullet\bullet\bullet$	$P_B(15) = \bullet\bullet\bullet$
Tarifa *C*	$P_C(5) = 95$ €	$P_C(10) = \bullet\bullet\bullet$	$P_C(15) = \bullet\bullet\bullet$

2. Escribe en función del número de sesiones, *x*, el precio que deberá pagar según la tarifa utilizada, $P_A(x)$, $P_B(x)$ y $P_C(x)$.

3. Dibuja en un mismo sistema de ejes las gráficas que representan cada una de las tarifas.

4. A la vista de las gráficas, ¿cuál es la tarifa más interesante para Enrique si piensa asistir a 8 sesiones?

5. ¿A partir de cuántas sesiones crees que la tarifa más interesante es la *A*?

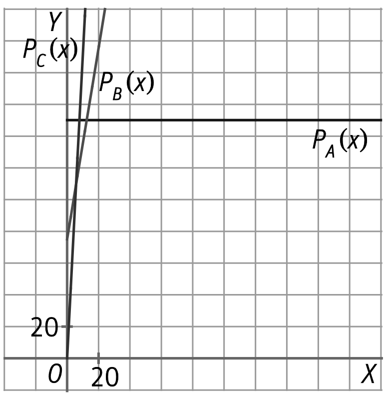
A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

1.

	Precio por 5 sesiones	Precio por 10 sesiones	Precio por 15 sesiones
Tarifa *A*	$P_A(5) = 150$ €	$P_A(10) = 150$ €	$P_A(15) = 150$ €
Tarifa *B*	$P_B(5) = 105$ €	$P_B(10) = 135$	$P_B(15) = 165$
Tarifa *C*	$P_C(5) = 95$ €	$P_C(10) = 190$	$P_C(15) = 285$

2. $P_A(x) = 150$, $P_B(x) = 75 + 6x$, $P_C(x) = 19x$

3.



4. A la vista de las gráficas, para 8 sesiones le interesa la tarifa *B*, porque el precio es menor, la gráfica está por debajo de las otras dos gráficas.

5. Observando las gráficas se ve que la que corresponde a la tarifa *A* queda por debajo de las otras a partir de las 13 sesiones. Por tanto, la respuesta correcta es **D.**

El teatro

El director de una sala de teatro sabe que si el precio de la entrada es de 20 € acuden unos 500 espectadores y por cada euro de reducción en dicho precio acuden 50 espectadores más.

1 Completa la tabla siguiente en tu cuaderno.

Reducción (€)	Precio de la entrada (€)	N.º de espectadores	Recaudación (€)
0	**20**	**500**	**20 500 = 10 000**
1	**19**	•••	•••
•••	•••	**600**	•••
x	•••	•••	•••

2. El director de la sala quiere determinar el precio de la entrada que le permita obtener la mayor recaudación. Llamando *R* a la función que da la recaudación (en euros) en función de la reducción *x* (en euros), la gráfica de *y* = *R*(*x*) es la de la figura.

3. Observando la gráfica y ayudándote del primer apartado si te hace falta, responde a las siguientes cuestiones:

- **¿Cuál es la recaudación para una reducción de 2 €?**
- **¿Cuál es la reducción para una recaudación de 4050 €? ¿Cuál es la imagen de 8 en la función *y* = *R*(*x*)?**
- **¿Cuál es la recaudación máxima?**

A. 11 050 B. 11 200 C. 11 250 D. 12 200

4. ¿Cuál sería entonces el precio de la entrada?

A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

1.

Reducción (€)	Precio de la entrada (€)	N.º de espectadores	Recaudación (€)
0	20	500	20 500 = 10 000
1	19	550	19 550 = 10 450
2	18	600	18 600 = 10 800
x	20 – *x*	500 + 50*x*	(500 + 50*x*)(20 – *x*)

2. El precio de la entrada para obtener mayor recaudación se obtiene con una reducción de 5 €. Luego el precio de la entrada es 15 €.

3. La recaudación para una reducción de 2 € es 10 800 €.

Para hallar la reducción para una recaudación de 4050 € se resuelve:

$(500+50x)(20-x)=4050 \Rightarrow x=-7\,(\text{no válida})\; x=17$.

Luego la reducción es de 17 € y el precio de la entrada de 20 – 17 = 3 €.

La imagen de *x* = 8 es *R*(8) = 10 800. Si se reduce el precio de la entrada 8 €, entonces el número de espectadores es 900 y la recaudación 10 800 €.

La recaudación máxima es 11 250 €, es decir, la respuesta correcta es C.

4. La reducción del precio de la entrada para obtener la máxima recaudación sería 5 €, es decir, el precio de la entrada sería 15 €. Luego la respuesta correcta es **D.**

AUTOEVALUACIÓN

1. Halla las funciones lineales que tienen las siguientes características. Indica la pendiente y la ordenada en el origen.

a) Es decreciente y el punto *B*(–2, 3) pertenece a ella.

b) Pasa por el punto *A*(2, 8) y su constante de proporcionalidad es 4.

c) Es constante y pasa por el punto *C*(1, 0)

a) Si la función lineal es decreciente, entonces $m < 0$. Se resuelve $3 = m \cdot (-2) + n \Rightarrow n = 3 + 2m$. Luego, la función lineal es $y = mx + 3 + 2m$, pendiente m y ordenada en el origen $3 + 2m$

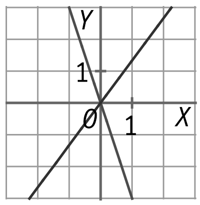
b) Se resuelve $8 = 4 \cdot 2 + n \Rightarrow n = 0$. Luego la función lineal es $y = 4x$, pendiente 4 y ordenada en el origen 0.

c) Si la función lineal es constante, entonces $m = 0$. Pasa por $C(1, 0)$, luego la función lineal es $y = 0$, pendiente 0 y ordenada en el origen 0.

2. Dibuja las gráficas de las funciones que sean de proporcionalidad directa.

a) $y = 4x + 8$ **b)** $y = -3x$ **c)** $y = \frac{4}{3}x$

Son funciones de proporcionalidad directa b) y c).



3. Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por los puntos *A*(–1, –5) y *B*(2, 3). Exprésala en forma general y explícita.

Pendiente: $m = \frac{3-(-5)}{2-(-1)} = \frac{8}{3}$

Ecuación punto-pendiente: $y + 5 = \frac{8}{3}(x + 1)$

Ecuación explícita: $y = \frac{8}{3}x - \frac{7}{3}$

Ecuación general: $-8x + 3y + 7 = 0$

4. Calcula la recta que pasa por el punto *A*(1, –3) y es paralela a la recta $y = 2x - 7$.

Pendiente de la recta $m = 2$

Ecuación punto-pendiente: $y + 3 = 2(x - 1)$

Ecuación general: $y = 2x - 5$

Ecuación explícita: $2x - y - 5 = 0$

5. ¿Son secantes las rectas $y = -2x + 9$ e $y = x - 1$? En caso afirmativo, halla su punto de corte.

Las pendiente de $y = -2x + 9$ es –2 y la pendiente de $y = x - 1$ es 1. Como son distintas, las rectas se cortan.

Punto de corte: $\left.\begin{array}{l} y = -2x + 9 \\ y = x - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x - 1 = -2x + 9 \Rightarrow x = \frac{10}{3}, y = \frac{7}{3} \Rightarrow \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$ es el punto de corte.

6. ¿El punto *A*(2, –3) pertenece a la parábola $y = x^2 - 6x + 1$?

Se sustituye el punto *A* en la parábola y se tiene $-3 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 1$. Luego el punto *A* pertenece a la parábola.

7. Dada la parábola $y = x^2 + 8x - 9$.

a) ¿Hacia dónde apuntan sus ramas?

b) Calcula las coordenadas de su vértice.

c) ¿Cuál es su eje de simetría?

d) Halla sus puntos de corte con los ejes de coordenadas.

e) Esboza su gráfica.

a) Las ramas de la parábola apuntan hacia arriba porque $a = 1 > 0$.

b) Abscisa del vértice: $x = \frac{-8}{2 \cdot 1} = -4$ Ordenada del vértice: $y = (-4)^2 + 8 \cdot (-4) - 9 = -25$

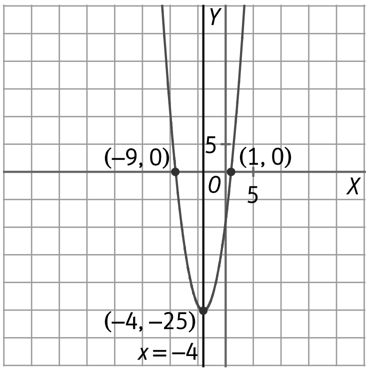
Coordenadas del vértice: $(-4, -25)$

c) Eje de simetría: $x = -4$

d) Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow (0, -9)$

Puntos de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -9 \Rightarrow (1, 0), (-9, 0)$

e)



8. Encuentra el valor máximo del producto de dos números que sumen 10.

Si x es uno de los números, el otro número es $10 - x$. Entonces hay que encontrar el máximo de la expresión:

$y = x(10 - x) = -x^2 + 10x$

Es una función cuadrática con $a < 0$. El valor máximo se encuentra en el vértice: $x = \frac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5$.

El valor máximo es $y = -5^2 + 10 \cdot 5 = 25$.

9. Escribe la diagonal de un rectángulo de perímetro 20 cm en función de su base, *x*. ¿Cuál es el valor mínimo de dicha diagonal?

Si el perímetro del rectángulo es 20 cm y la base x, entonces la altura del rectángulo es $y = 10 - x$.

La diagonal d es: $d^2 = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100 \Rightarrow d = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$

Se considera la expresión del cuadrado de la diagonal: $d^2 = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$ porque el mínimo para d^2, es mínimo para d. Esta expresión es una función cuadrática con $a > 0$. El valor mínimo se encuentra en el vértice:

$x = \frac{20}{2 \cdot 2} = 5$ $d^2 = 2 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 100 = 50$

Luego el valor mínimo de la diagonal es $d = \sqrt{50}$ cm.