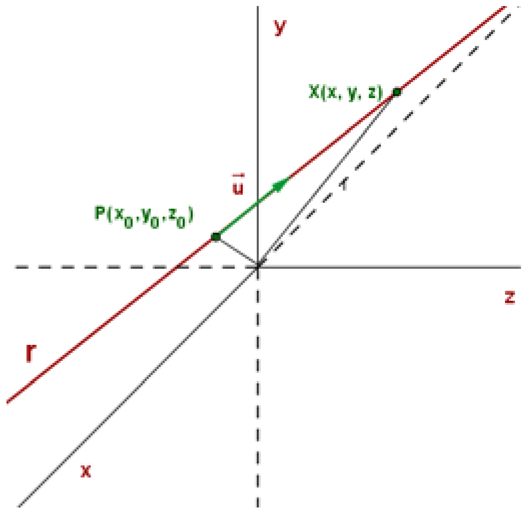
Ecuaciones de la recta en el espacio

Ecuación vectorial de la recta

Sea P(x_1, y_1) es un punto de la recta r y $\vec{u}$ su vector director, el vector $\overrightarrow{PX}$ tiene igual dirección que $\vec{u}$, luego es igual a $\vec{u}$ multiplicado por un escalar:



$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

Ecuaciones paramétricas de la recta

Operando en la **ecuación vectorial** de la recta llegamos a la igualdad:

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda \cdot u_1, y_0 + \lambda \cdot u_2, z_0 + \lambda \cdot u_3)$$

Igualando coordenadas se llega a:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot u_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot u_2 \\ z = z_0 + \lambda \cdot u_3 \end{cases}$$

Ecuaciones continuas de la recta

Despejando e igualando λ en las **ecuaciones paramétricas** se tiene:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

Ecuaciones implícitas de la recta

Una **recta** puede venir determinada por la **intersección de los planos**.

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Si en las **ecuaciones continuas de la recta** quitamos denominadores y pasamos todo al primer miembro, obtenemos también las **ecuaciones implícitas**.

Ejemplos

1. Hallar las **ecuaciones paramétricas**, en forma **continua** e **implícitas** de la recta que pasa por el punto A = (−1, 2, 1) y cuyo vector director es $\vec{u} = (4,5,-1)$.

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 - 5\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda & \lambda = \dfrac{x-1}{4} \\ y = 2 + 5\lambda & \lambda = \dfrac{y-2}{5} \\ z = 1 - \lambda & \lambda = \dfrac{z-1}{-1} \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{-1}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} \qquad \frac{x-1}{4} = \frac{z-1}{-1}$$

$$\begin{cases} 5x - 4y + 13 = 0 \\ -x - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

2. Hallar las **ecuaciones paramétricas**, en forma **continua** e **implícita** de la recta que pasa por los puntos A(1, 0, 1) y B(0, 1, 1).

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 1-0, 1-1) = (-1, 1, 0)$$

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} \qquad \frac{x-1}{-1} = \frac{z-1}{0}$$

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -z + 1 = 0 \end{cases}$$

3. Sea r la recta de ecuación:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$$

¿Pertenecen a r los puntos A(0, −2, −2) y B(3, 2, 6)?

$$\frac{0-1}{1}=\frac{-2}{2}=\frac{-2-1}{3} \qquad A \in r$$

$$\frac{3-1}{1}\neq\frac{2}{2}\neq\frac{6-1}{3} \qquad B \notin r$$

4. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-y-2z \end{cases}$

Hallar las **ecuaciones** en forma **continua** y **paramétrica**.

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-y-2z \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 2z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{z}{3} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & 2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{5z}{-3}$$

$z=0 \qquad x=0 \qquad y=0 \qquad A(0,0,0)$

$z=3 \qquad x=1 \qquad y=-5 \qquad B(1,-5,3)$

$\overrightarrow{AB}=(1,-5,3)$

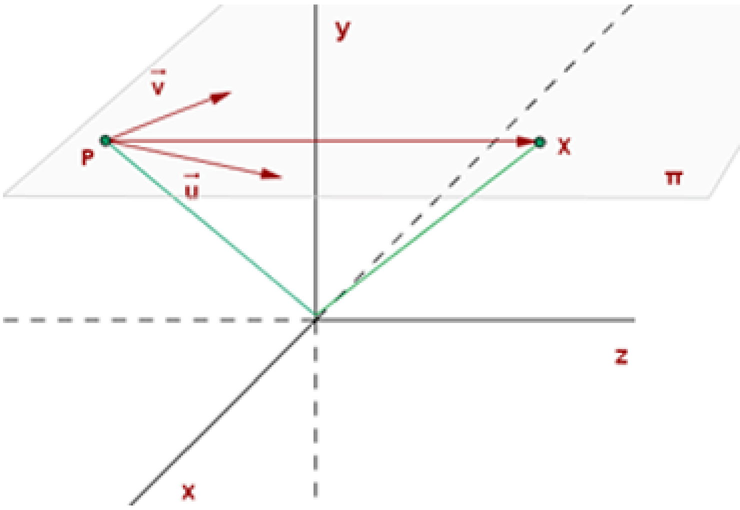
$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-5\lambda \\ z=3\lambda \end{cases}$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{3}$$

Ecuaciones del plano

Ecuación vectorial

Un **plano** queda determinado por un **punto P** y un **par de vectores** con distinta dirección.



Para que el punto P pertenezca al plano π el vector $\overrightarrow{PX}$ tiene que ser coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Luego se puede expresar como combinación lineal de ambos.

$$\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

Ecuaciones paramétricas del plano

Operando en la ecuación vectorial del plano llegamos a la igualdad:

$$(x, y, z) = (x_0 + u_1\lambda + v_1\mu, y_0 + u_2\lambda + v_2\mu, z_0 + u_3\lambda + v_3\mu)$$

Esta igualdad se verifica si:

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = y_0 + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = z_0 + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases}$$

Ecuación general o implícita del plano

Partiendo de las ecuaciones paramétricas, un punto está en el plano π si tiene solución el sistema:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= u_1 \lambda + v_1 \mu \\ y - y_0 &= u_2 \lambda + v_2 \mu \\ z - z_0 &= u_3 \lambda + v_3 \mu \end{aligned}$$

Este sistema tiene que ser compatible determinado en las incógnitas λ y μ· Por tanto el determinante de la matriz ampliada del sistema con la columna de los términos independientes tiene que ser igual a cero.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollamos el determinante.

$$\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}(x - x_0) - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

Damos los valores:

$$A = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \qquad B = -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

Sustituimos:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Realizamos las operaciones y le damos a D el valor:

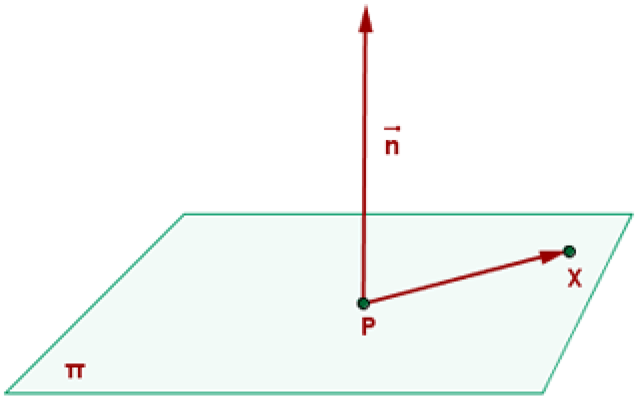
$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

Obtenemos la **ecuación general de plano**:

Ax + By + Cz + D = 0

Vector normal

El vector $\vec{n}$ =(A,B,C) es un **vector normal** al plano, es decir, **perpendicular al plano**.

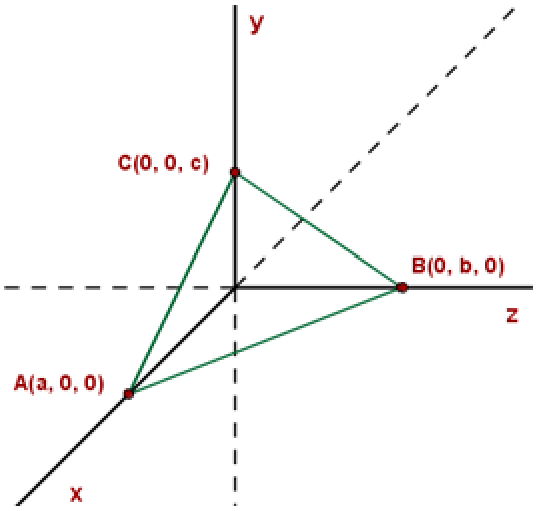


Si P(x_0, y_0, z_0) es un punto del plano, el vector $\overrightarrow{PX} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ es perpendicular al vector $\vec{n}$ $\vec{n}$, y por tanto el producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0$$

De este modo también podemos determinar la **ecuación general del plano**, a partir de un **punto** y un **vector normal**.

Ecuación canónica o segmentaria del plano



Sean los puntos A(a, 0, 0), B(0, b, 0) y C(0, 0, c), la **ecuación canónica** viene dada por:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$a = \frac{-D}{A} \qquad b = \frac{-D}{B} \qquad c = \frac{-D}{C}$$

Ejemplos:

1. Hallar las **ecuaciones paramétricas** e **implícitas** del plano que pasa por el punto A(1, 1, 1) y tiene como vectores directores a $\vec{u}(1,-1,1)$ y $\vec{v}(2,3,-1)$.

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda + 3\mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-1 & -1 & 3 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

-2x + 3y + 5z – 6 = 0

2. Hallar las **ecuaciones paramétricas** e **implícitas** del plano que pasa por los puntos A(−1, 2, 3) y B(3, 1, 4) y contiene al vector $\vec{u}$ (0,0,1) .

$$\overrightarrow{AB} = (3+1, 1-2, 4-3) = (4, -1, 1)$$

$$\begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda + \mu \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 4 & 0 \\ y-2 & -1 & 0 \\ z-3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -x - 4y + 7 = 0$$

3. Hallar las **ecuaciones paramétricas** e **implícitas** del plano que pasa por los puntos A(−1, 1, −1), B(0, 1, 1) y C(4, −3, 2).

$$\overrightarrow{AB} = (0+1, 1-1, 1+1) = (1, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4+1, -3-1, 2+1) = (5, -4, 3)$$

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda + 5\mu \\ y = 1 - 4\mu \\ z = -1 + 2\lambda + 3\mu \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 5 \\ y-1 & 0 & -4 \\ z+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad 8x + 7y - 4z - 3 = 0$$

4. Sea π el plano de **ecuaciones paramétricas**:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda + 2\mu \\ z = 4\lambda - 3\mu \end{cases}$$

Se pide comprobar si los puntos A (2, 1, 9/2) y B(0, 9, −1) pertenecen al plano.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & -1 & 2 \\ z & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \qquad -5x + 7y + 3z - 9 = 0$$

$$-5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{9}{2} - 9 \neq 0 \qquad A \notin \pi$$

$$-5 \cdot 0 + 7 \cdot 9 + 3 \cdot (-1) - 9 \neq 0 \qquad B \notin \pi$$

5. Hallar la **ecuación segmentaria** del plano que pasa por los puntos A(1, 1, 0), B(1, 0, 1) y C(0, 1, 1).

$$\overrightarrow{AB} = (1-1, 0-1, 1-0) = (0, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0-1, 1-1, 1-0) = (-1, 0, 1)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -x - y - z + 2 = 0$$

Dividiendo por −2 obtenemos la **ecuación segmentaria**:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$$

5. Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por el punto (1, 0, 0) y es perpendicular al plano $x - y - z + 2 = 0$.

Por ser la recta perpendicular al plano, el **vector normal** del plano, $\vec{n}(1, -1, -1)$ será el vector director de la recta que pasa por el punto (1, 0, 0).

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$$

7. Hallar la **ecuación del plano** que pasa por el punto A(2, 0, 1 y contiene a la recta de ecuación:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$$

De la ecuación de la recta obtenemos el punto B y el vector $\vec{u}$.

$$B(1,-3,0) \qquad \overrightarrow{AB}=(1-2,-3-0,0-1)=(-1,-3,-1)$$

$$A(2,0,1) \qquad \vec{u}=(2,1,-1) \qquad \overrightarrow{AB}=(-1,-3,-1)$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -1 \\ y & 1 & -3 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \qquad 4x-3y+5z-13=0$$

Puntos en el espacio

Coordenadas del punto medio de un segmento

Sean A (x_1, y_1, z_1) y B (x_2, y_2, z_2) los extremos de un segmento, el **punto medio** del segmento viene dado por:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

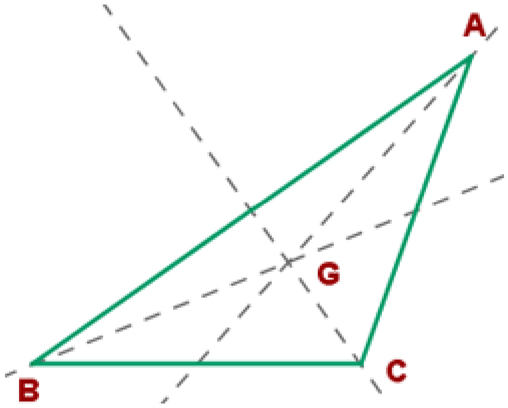
Ejemplo

Dados los puntos A(3, −2, 5) y B(3, 1, 7) , hallar las coordenadas del punto medio del segmento que determinan.

$$M\left(\frac{3+3}{2},\frac{-2+1}{2},\frac{5+7}{2}\right) \qquad M\left(3,-\frac{1}{2},6\right)$$

Coordenadas del baricentro de un triángulo

Sean A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2) y C (x_3, y_3, z_3) los vértices de un triángulo, las **coordenadas del baricentro** son:



$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

Ejemplo

Sean A = (2, 1, 0), B = (1, 1, 1) y C = (4, −2, 1) los vértices de un triángulo. Determinar las coordenadas del **baricentro**.

$$G\left(\frac{1+3-1}{3},\frac{-1+2+4}{3},\frac{3-2+1}{3}\right) \qquad G\left(1,\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Puntos alineados

Tres o más puntos están alineados si están en una **misma recta**, y por tanto el **rango de los vectores** determinados por ellos es **1**.

Ejemplo

Comprobar si los **puntos** A(2, 3, 1), B(5, 4, 3) y C(2, 1, 2) están **alineados**.

$$\overrightarrow{AB}=(5-2,4-3,3-1)=(3,1,2)$$

$$\overrightarrow{AC}=(2-2,1-3,2-1)=(0,-2,1)$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}\neq 0$$

$$rang\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=2$$

Los puntos no están alineados.

Puntos coplanarios

Dos o más **vectores** son **coplanarios** si son **linealmente dependientes**, y por tanto sus **componentes** son **proporcionales** y su **rango** es **2**.

Dos o más **puntos** son **coplanarios**, si los **vectores** determinados por ellos también son **coplanarios**.

Ejemplo

1. Comprobar si los **puntos** A(1, 2, 3), B(4, ,7, 8), C(3, 5, 5), D(−1, −2, −3) y E(2, 2, 2) son **coplanarios**.

Los **puntos** A, B, C, D y E son **coplanarios** si:

$$rang\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) = 2$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-1, 7-2, 8-3) = (3, 5, 5)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3-1, 5-2, 5-3) = (2, 3, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (-1-1, -2-2, -3-3) = (-2, -4, -6)$$

$$\overrightarrow{AE} = (2-1, 2-2, 2-3) = (1, 0, -1)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$rang\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) = 3$$

Los puntos A, B, C, D y E no son coplanarios.