CONTINUIDAD

Una función se considera continua cuando cumple:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5 & si \quad x \le 3 \\ x-2 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Para comprobar la continuidad hacemos los límites laterales y la función en el punto.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (2x-5) = 2.3-5 = 6-5 = 1$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-2) = 3-2 = 1$$

$$f(3) = 2.3-5 = 6-5 = 1$$

Como el límite por la derecha es igual al límite por la izquierda e igual a la función en el punto, consideramos que la función es **continua** en el punto x=3.

Hay dos tipos fundamentales de discontinuidad:

- No evitable:
  - De salto finito: Cuando los límites laterales son distintos pero tienen un valor real.
  - De salto infinito: Cuando los límites laterales son distintos, pero al menos uno de ellos toma un valor +∞ o -∞

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \ x \le 2 \\ 3x-1 & si \ x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(x+2\right) = 2+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(3x-1\right) = 3.2-1 = 6-1 = 5$$

$$Salto \quad \left|5-4\right| = 1$$

Como se puede ver los límites laterales son distintos entre sí, pero son números reales con lo cual la función sería **discontinua de salto finito**. En donde el salto sería el valor absoluto de la diferencia de los límites

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si\ x\le 3 \\ \dfrac{x+1}{2x-6} & si\ x>3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(3x+2)=3.3+2=9+2=11$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x+1}{2x-6}=\frac{3+1}{2.3-6}=\frac{4}{0}=+\infty$$

Como se puede ver los límites laterales son distintos entre sí, pero uno de los valores no es un número real, con lo cual la función sería **discontinua de salto infinito**.

- Evitable
  - De primera especie: Cuando los límites por la derecha y la izquierda son iguales pero distintos de la función en el punto.
  - De segunda especie: Cuando los límites son una indeterminación y al eliminarla se consigue que tome un valor.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x<1 \\ 3x-2 & si\ x=1 \\ 2x & si\ x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-}(x+1)=1+1=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}(2x)=2.1=2$$

$$f(1)=3.1-2=1$$

En este caso los límites laterales son iguales pero distintos de la función en el punto, con lo cual la función sería **discontinua evitable de primera especie.**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & si\ x\ne -2 \\ 3x-2 & si\ x=-2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to -2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}(x-2)=-2-2=-4$$