

<p>MATHpines</p>  <p>Prof. M.Díaz-Pinés</p>	<p>MATEMÁTICAS APLICADAS CC.SS.</p>
	<p>SELECTIVIDAD LOGSE 2001-2002</p> <p>Convocatoria ordinaria : Junio</p>
	<p>UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID</p>

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcular las matrices $M = A \cdot B$ y $N = B \cdot A$
 (b) Calcular $P^{(-1)}$, siendo $P = N - I$ donde I representa la matriz identidad.
 (c) Resolver el sistema $PX = C$

Resolución:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

M es una matriz de orden 1×1 consecuencia de multiplicar $A_{1,3} \cdot B_{3,1} = M_{1,1}$

En el orden contrario habrá de ser $B_{3,1} A_{1,3} = N_{3,3}$:

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)

Si designamos por I_3 la matriz unidad de orden 3:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = N - I_3, P = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \text{Adj}(P') = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \text{Det}(P) = 2$$

$$\text{inv}(P) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

(c) $PX = C$

$$PX = C, \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = P^{(-1)} C$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Comprobación automática:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

(a) Hallar las coordenadas del mínimo de la curva $y = x^2 - 4x - 5$

(b) Calcular el área del triángulo limitado por OX y las tangentes a la curva dada en los puntos de intersección de dicha curva con el eje OX.

Resolución

La curva corresponde a una función polinómica cuadrática por lo que es una parábola.

Al ser positivo el coeficiente de $x^2 \Rightarrow$ las ramas son ascendentes.

Los puntos de corte con OX serán los que tienen por abscisas las raíces de la función.

Como la expresión es "mónica" (el coeficiente de x^2 es 1) $\Rightarrow x_1 + x_2 = 4$ (-coeficiente de x) y $x_1 x_2 = -5$

Por tanto no es necesario su cálculo: $x_1 = -1$, $x_2 = 5$

Comprobación por el algoritmo ordinario: Basta hallar las raíces del polinomio:

$$x^2 - 4x - 5, \text{sol}(x^2 - 4x - 5) = (-1, 5)$$

El mínimo será el vértice V de la parábola.

Como el eje es $x = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow V(2, f(2))$

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

$$f(2) = -9, V(2, -9)$$

NB / No es preciso derivar para hallar el mínimo pedido : basta aplicar que se trata de una parábola

El mínimo de la función es 9 que se alcanza para $x = 2$.

Podemos decir también que $V(2, -9)$ es el punto que es mínimo (relativo y absoluto) de la curva

Por derivación:

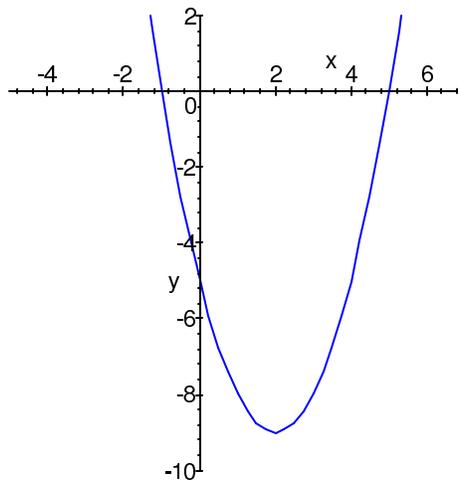
$$\frac{df}{dx} = 2x - 4, \frac{df}{dx} = 0, 2x - 4 = 0, x = 2$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2, \text{para todo valor } x$$

$$0 < \frac{d^2f}{dx^2}, y = -9, \text{mínimo}$$

Gráfica (no se pedía, pero no se prohibía hacerla)

$$y = x^2 - 4x - 5$$

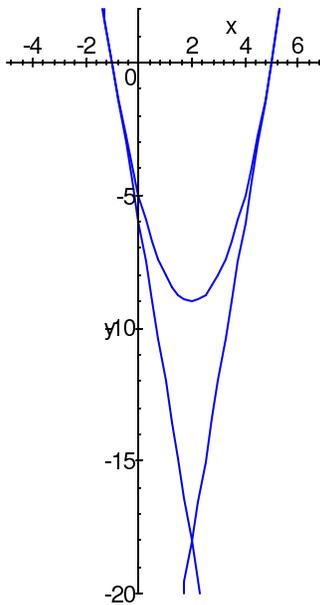


Rectas tangentes a la curva en los puntos del eje OX . Aplicamos $y = y_0 + D(f)(x_0)(x - x_0)$
 $y = f(-1) + D(f)(-1)(x + 1)$, $y = f(5) + D(f)(5)(x - 5)$

$$D(f)(-1) = -6, D(f)(5) = 6$$

Es lógico que las pendientes sean opuestas por la simetría de las tangentes respecto de la vertical $x = 2$

$$y = -6x - 6, y = 6x - 30$$



El vértice inferior del triángulo pedido es el de corte de las tangentes y ha de estar en el eje $x = 2$
 Basta averiguar qué punto de un de las tangentes tiene abscisa $x = 2$

$$\text{Subs}(x = 2, -6x - 6) = -18, M(2, -18)$$

El área pedida será $\Omega = \frac{bh}{2}$ donde $b = 5 - (-1) = 6$ y $h = 18$

$$\Omega = 54, u^2$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se tiene tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera, 4 blancas y 3 negras.

(a) Si se elige una caja al azar y luego se extrae una bola , ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

(b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas , ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

Resolución

Problema típico de aplicación del Teorema de Bayes.

Llamamos a los sucesos por la notación : C_i : caja i -ésima , N : bola negra , suceso condicionado $\frac{N}{C_i}$: que

aparezca

negra habiendo previamente elegido la caja C_i

(a) Por el T^a de la Probabilidad total : $P(N) = P(C_1) P\left(\frac{N}{C_1}\right) + P(C_2) P\left(\frac{N}{C_2}\right) + P(C_3) P\left(\frac{N}{C_3}\right)$

En principio, aceptamos que la elección de las cajas es equiprobable : $P(C_i) = P(C_j) = \frac{1}{3}$

$$P\left(\frac{N}{C_1}\right) = \frac{4}{7}, P\left(\frac{N}{C_2}\right) = 1, P\left(\frac{N}{C_3}\right) = \frac{3}{7}$$

$$P(N) = \left[\frac{1}{3}\right] \left(\frac{4}{7} + 1 + \frac{3}{7}\right) = \frac{2}{3}$$

(b) Esta pregunta está formulada inadecuadamente. Debería decir, " si elegida una bola al azar, resultase que es negra,

se pregunta cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja"

La probabilidad $P(N) = \frac{2}{3}$ y a ella colaboran las cajas 1, 2 y 3 con los sumandos $\frac{4}{21}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{7}$ respectivamente

$$\text{La probabilidad } P\left(\frac{C_2}{N}\right) = \frac{\left[\frac{1}{3}\right]}{\left[\frac{2}{3}\right]} = \frac{1}{2} = 50 \%$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se quiere comprobar si una máquina destinada al llenado de envases de agua mineral ha sufrido un desajuste.

Una muestra aleatoria de diez envases de esta máquina ha proporcionado los siguientes resultados:

0,49 , 0,52 , 0,51 , 0,48 , 0,53 , 0,55 , 0,49 , 0,50 , 0,52 , 0,49

Suponiendo que la cantidad de agua mineral que este tipo de máquinas deposita en cada envase sigue una distribución normal de media 0,5 litros y desviación típica 0,02 litros, se desea contrastar si el contenido medio de los envases de esta máquina es de 0,5 litros con un nivel de significación del 5 %.

(a) Plantear las hipótesis nula y alternativa del contraste.

(b) Determinar la región crítica del contraste.

(c) Realizar el contraste.

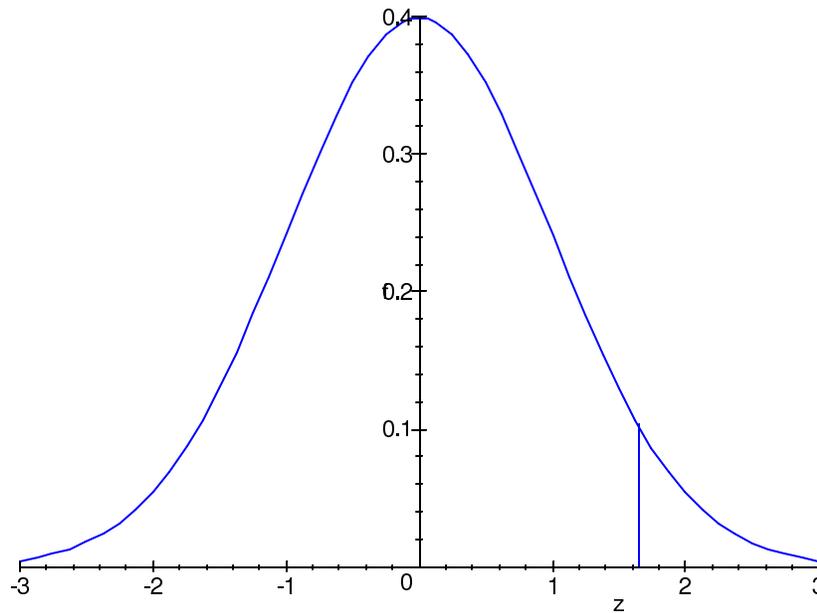
Resolución

(a) $H_0 : \mu = 0.5$, $H_1 : \mu \neq 0.5$

(b) Si la hipótesis H_0 fuese cierta $\Rightarrow \alpha = 0.05$

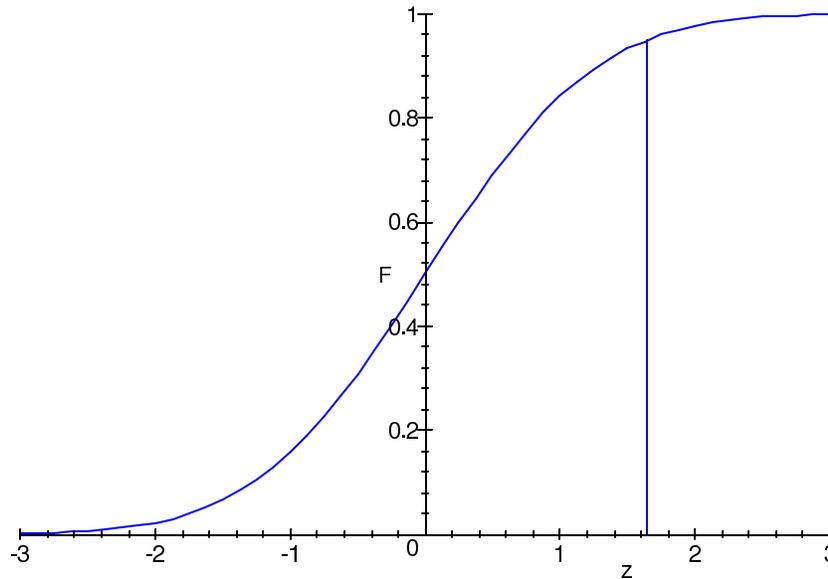
Al ser $\alpha = .05 \Rightarrow$ (Tabla de $N(0,1)$) $z_\alpha = 1.645$

función f(z) de densidad normal N(0,1)



La cola de la derecha corresponde al intervalo $(1.645 , \infty)$

función F(z) de distribución normal N(0,1)



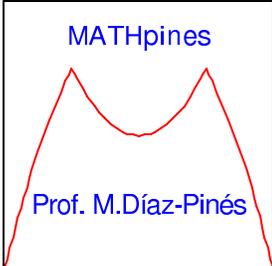
La altura (ordenada) $F(1.645) = .95$

la región crítica RC la determinan los valores $m(X)$ tales

$$\text{que } |m(X) - 0.5| > \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{n}} \text{ Como } \sigma = 0.02 \text{ y } n = 10 \Rightarrow \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{n}} = 0.0124$$

$$\text{RC : } (0.5 - 0.0124 , 0.5 + 0.0124) = (0.488 , 0.512)$$

(c) $m(X) = 0.508$ que está dentro de la RC \Rightarrow "no se rechaza H_0 "

	MATEMÁTICAS APLICADAS CC.SS.
	SELECTIVIDAD LOGSE 2001-2002 Convocatoria ordinaria : Junio
	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un proyecto de asfaltado puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G_1 y G_2 . Se trata de asfaltar tres zonas : A, B y C. En una semana, el grupo G_1 es capaz de asfaltar 3 unidades en la zona A, 2 en la zona B y 2 en la zona C. El grupo G_2 es capaz de asfaltar semanalmente 2 unidades en la zona A , 3 en la zona B y 2 en la zona C.

El coste semanal se estima en 3300 euros para G_1 y 3500 euros para G_2 . Se necesita asfaltar un mínimo de 6 unidades en la zona A, 12 en la zona B y 10 en la zona C.

¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste ?

Resolución

Se trata de un problema de programación lineal.

Ordenación de los datos:

Llamamos x y y al número n de semanas de los grupos G_1 y G_2 , respectivamente:

gr	n	A	B	C
G_1	x	3	2	2
G_2	y	2	3	2
gr	n	$3x+2y$	$2x+3y$	$2x+2y$

Las restricciones serán:

$$r1 := 6 \leq 3x + 2y$$

$$r2 := 12 \leq 2x + 3y$$

$$r3 := 10 \leq 2x + 2y$$

Además, los números x, y de semanas han de ser "no negativos":

$$r4 := 0 \leq x$$

$$r5 := 0 \leq y$$

Función objetivo: Aquí es la función "coste" $3300x + 3500y$ (Euros) que podemos expresarla en "cientos de Euros"

$$f(x, y) = 33x + 35y$$

Método gráfico

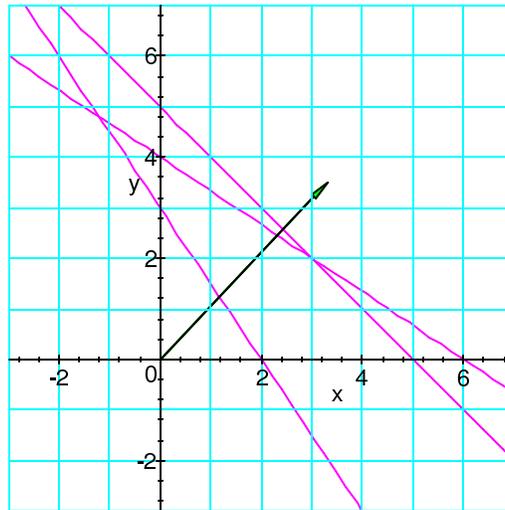
Rectas frontera de la región factible:

$$y = -\frac{3}{2}x + 3, y = -\frac{2}{3}x + 4, y = -x + 5, x = 0, y = 0$$

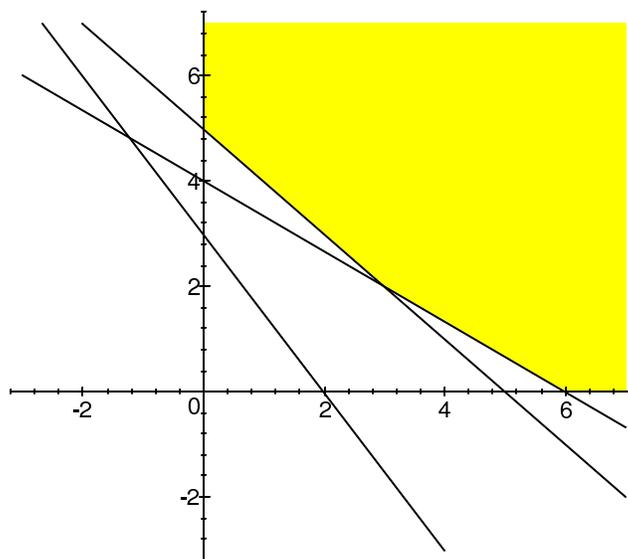
Vector gradiente o de avance:

Al ser $f(x, y) = 33x + 35y$ podemos considerar $w(33, 35)$. A efectos de la gráfica podemos tomar $(3.3, 3.5)$

$$w := [33, 35]$$



p3) Región factible:



$$\{6 \leq 3x + 2y, 12 \leq 2x + 3y, 10 \leq 2x + 2y, 0 \leq x, 0 \leq y\}$$

p4) La región es infinita, superiormente y a la derecha, por lo que no hay puntos que maximicen

El mínimo se observa gráficamente que es $A(3, 2)$

Hay una restricción ficticia o supérflua : $r_1 (6 \leq 3x + 2y)$, porque está incluida en $r_2 (12 \leq 2x + 3y)$

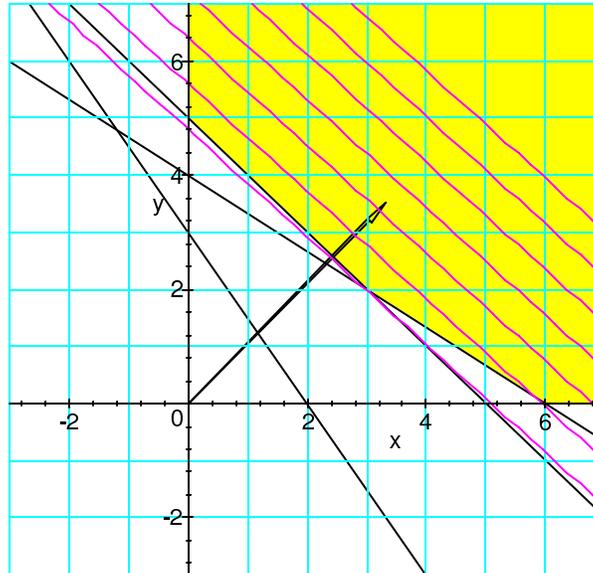
p5) Varias rectas equivananciales o de nivel:

$$33x + 35y = k$$

$$33x + 35y = 168, 33x + 35y = 196, 33x + 35y = 224, 33x + 35y = 252, 33x + 35y = 280, 33x + 35y = 308,$$

$$33x + 35y = 336$$

$$y = \frac{24}{5} - \frac{33}{35}x, y = \frac{28}{5} - \frac{33}{35}x, y = \frac{32}{5} - \frac{33}{35}x, y = \frac{36}{5} - \frac{33}{35}x, y = 8 - \frac{33}{35}x, y = \frac{44}{5} - \frac{33}{35}x, y = \frac{48}{5} - \frac{33}{35}x$$



p7) El vértice que primero alcanza la familia de rectas de nivel en la dirección y sentido $v = [33, 35]$ es $A(3, 2)$ que corresponde al Mínimo. No hay Máximo.

Resultado

La función dada $z = 33x + 35y$ tiene un Mínimo en $A(3, 2)$. No tiene Máximo.

Soluciones factibles son las correspondientes a cualquier punto del contorno, particularmente los vértices $(6, 0)$ y $(0, 5)$

Analíticamente, el punto A lo obtenemos como intersección de las fronteras de r_2 y r_3

$$\{2x + 3y = 12, x + y = 5\}$$

$$\{y = 2, x = 3\}$$

$$\{x = 3, y = 2.\}$$

Método numérico

Si sustituimos en la expresión de la función objetivo:

$$f(3, 2) = 169$$

Comprobamos los demás vértices del contorno del recinto factible:

$$f(6, 0) = 198, f(0, 5) = 175$$

$$f(6, 0) = 198, f(0, 5) = 175$$

x	y	$P(x, y)$	$f(x, y)$
6	0	B(6, 0)	198
0	5	C(0, 5)	175
3	2	A(3, 2)	169

Cálculo automático.

Con **MapleV** y su programa del método Simplex.

Nos permite obtener los vértices que hacen máximo o mínimo el valor de la función objetivo.

Sólo queda tener en cuenta las escalas de reducción utilizadas para manejar números más pequeños.

a)

$RI := \{ r1, r2, r3, r4, r5 \}$, $obj := 33x + 35y$, $maximize(obj, RI)$

$$\{y=2, x=3\}$$

169

El Ejercicio tan sólo pide el número de semanas de cada grupo para minimizar el coste.

Resultado: 3 semanas el grupo G_1 y 2 semanas el grupo G_2

El valor del coste mínimo no se pide expresamente, aunque se ha calculado:

169 "cientos de Euros" = 16.900 Euros

Ejercicio 2 . (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 4x$

(a) Hallar las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados y de sus máximos y mínimos relativos, si existen.

(b) Representar gráficamente la curva.

(c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la curva y el eje OX.

Resolución

$$f(x) = x^3 - 4x$$

Se trata de una "cúbica", gráfica de una función polinómica de grado 3. Como tal está definida, es continua, es derivable e integrable en todo el eje real: para todo valor x de \mathbb{R}

Al ser positivo el coeficiente de x^3 es de las cúbicas que vienen de abajo a la izquierda subiendo hacia arriba a la derecha.

Además la función es "impar" $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ la gráfica es simétrica respecto del origen

(a)

Con OX : se resuelve $\{ y = f(x), y = 0 \}$

$$\{y=0, y=x^3-4x\}, \{y=0, x=0\}, \{y=0, x=2\}, \{y=0, x=-2\}$$

Las abscisas de los puntos son las raíces de la función que son las mismas que las del polinomio y que las de la ecuación resultante de igualar a cero el polinomio:

Si factorizamos : $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$

$$x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$$

Los puntos son:

$$A(-2, 0), O(0, 0), B(2, 0)$$

Cortes con OY : se resuelve el sistema $\{ y = f(x), x = 0 \}$

Es la "ordenada en el origen" de la gráfica:

$$f(0) = 0$$

No hay ningún punto nuevo : ya lo teníamos, el origen $O(0, 0)$

Sólo corta a OY en el origen.

Extremos relativos:

$$\frac{df}{dx} = 0, 3x^2 - 4 = 0, \frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}, x_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Los valores críticos de x son $-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$, simétricos respecto de $O(0, 0)$ como estaba previsto.

Si uno corresponde a un máximo el otro corresponde a un mínimo:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 6x$$

$$D(D(f))\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}, 0 < 4\sqrt{3}, f(x_1) = -\frac{16}{9}\sqrt{3}, m\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{16}{9}\sqrt{3}\right), \text{mínimo}$$

$$D(D(f))\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -4\sqrt{3}, -4\sqrt{3} < 0, f(x_2) = \frac{16}{9}\sqrt{3}, m\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{16}{9}\sqrt{3}\right), \text{máximo}$$

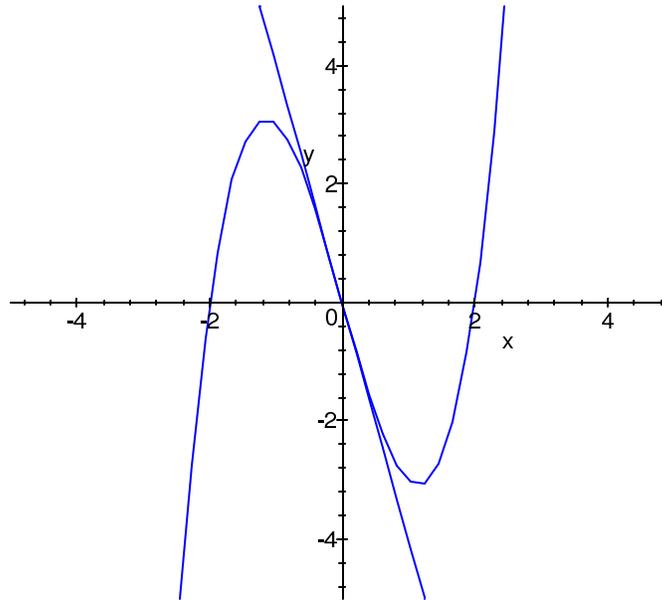
Inflexiones:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0, 6x = 0, x = 0$$

Recta de inflexión : $y = f(0) + D(f)(0)(x - 0)$

$$y = -4x$$

(b) Gráfica:



(c) El área es el doble de la que corresponde al intervalo $[-2, 0]$ (en que es positiva , por estar sobre OX)
o el doble de la correspondiente a $[0, 2]$, cambiada de signo

Podemos hallar la función área $\Omega(x) = \text{área del recinto correspondiente al intervalo } [0, x]$.

Para ello hallamos la integral indefinida:

$$\int x^3 - 4x dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$$

$$\Omega(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$$

$$\Omega(2) = -4$$

$$\text{Area} = 8, u^2$$

Mediante integración definida:

$$\int_{-2}^0 x^3 - 4x dx = 4$$

En el intervalo $[-2, 0]$ el área es $4 u^2 \Rightarrow$ el área pedida es $8 u^2$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas:

- (a) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble.
- (b) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

Resolución

Notamos por A el suceso "sacar el 6 doble" y por B "sacar un doble distinto del 6 doble"

Si hacemos un cuadro de doble entrada que represente el espacio muestral del experimento "lanzar dos dados":

[1, 1]	[1, 2]	[1, 3]	[1, 4]	[1, 5]	[1, 6]
[2, 1]	[2, 2]	[2, 3]	[2, 4]	[2, 5]	[2, 6]
[3, 1]	[3, 2]	[3, 3]	[3, 4]	[3, 5]	[3, 6]
[4, 1]	[4, 2]	[4, 3]	[4, 4]	[4, 5]	[4, 6]
[5, 1]	[5, 2]	[5, 3]	[5, 4]	[5, 5]	[5, 6]
[6, 1]	[6, 2]	[6, 3]	[6, 4]	[6, 5]	[6, 6]

$$p(A) = \frac{1}{36}, p(B) = \frac{5}{36}$$

$$p(A, A, A) = p(A^3) = p(A) p(A) p(A) = \left(\frac{1}{36}\right)^3$$

$$p(A^3) = \frac{1}{46656}, p(A^3) = .0000214$$

$$p(B, B, B) = p(B^3) = p(B) p(B) p(B) = \left(\frac{5}{36}\right)^3$$

$$\text{Como } p(B) = 5 p(A) \Rightarrow p(B) = \frac{5}{36} = 0.000107 \Rightarrow p(B^3) = 125 p(A^3) = 0.003 = \text{" 3 por mil "}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La duración de las llamadas de teléfono, en una oficina comercial, sigue una distribución normal con desviación típica 10 segundos. Se hace una encuesta entre 50 llamadas y la media de duración obtenida en esa muestra es 35 segundos. Calcular el intervalo de confianza al 99 % para la duración media de las llamadas.

Resolución

$$\text{Aquí el intervalo de confianza es } \left(m(x) - z_{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right], m(x) + z_{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \right)$$

$$\text{donde } n = 50, \sigma = 10, \alpha = 0.01, z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.58$$

Llevando estos valores a la fórmula del intervalo de confianza:

$$\left(35 - \frac{2.58 \cdot 10}{\sqrt{50}}, 35 + \frac{2.58 \cdot 10}{\sqrt{50}} \right)$$

$$\text{IC}(31.35, 38.65)$$

El intervalo de confianza es (31.35, 38.65)

