

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

**INSTRUCCIONES:** El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir **UNA Y SOLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

**PUNTUACIÓN:** La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

**Ejercicio 1.** (Puntuación máxima: 2 puntos.) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

a) (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.

b) (1 punto) Calcular el valor de  $a > 0$  para el cual se verifica la igualdad  $\int_0^a f(x) dx = 1$ .

**Ejercicio 2.** (Puntuación máxima: 2 puntos.) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.

b) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(3, 1)$ .

**Ejercicio 3.** (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real  $\lambda$ :

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro  $\lambda$ .

b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.

c) (0,5 puntos) En el caso  $\lambda = 2$ , indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} ; \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

a) (1 punto) Calcular la distancia entre  $r$  y  $s$ .

b) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a  $r$  y  $s$  y que corta a ambas.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a  $r$  y  $s$  y que pasa por el punto  $P(1, 0, 0)$ .

OPCIÓN B

**Ejercicio 1.** (Puntuación máxima: 2 puntos.) Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos  $A(0, 3)$  y  $B(0, -1)$  es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

**Ejercicio 2.** (Puntuación máxima: 2 puntos.) Para cada valor del parámetro real  $a$ , se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2 \quad ; \quad \pi_2 : x + ay + z = -1 \quad ; \quad \pi_3 : ax + y + z = 3.$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Calcular los valores de  $a$  para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.
- (0,5 puntos) Para los valores de  $a$  calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

**Ejercicio 3.** (Puntuación máxima: 3 puntos.) Sea  $A$  una matriz real cuadrada de orden  $n$  que verifica la igualdad  $A^2 = I$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden  $n$ .

Se pide:

- (1 punto) Expresar  $A^{-1}$  en términos de  $A$ .
- (1 punto) Expresar  $A^n$  en términos de  $A$  e  $I$ , para cualquier número natural  $n$ .
- (1 punto) Calcular  $a$  para que  $A^2 = I$ , siendo  $A$  la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 3 puntos.) Sea  $f(x)$  una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f(1) = 2 \quad ; \quad f'(0) = 3 \quad ; \quad f'(1) = 4.$$

Se pide:

- (1 punto) Calcular  $g'(0)$ , siendo  $g(x) = f(x + f(0))$ .
- (2 puntos) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$ .