1 Matrices

1. Calcula los valores de las letras para que las siguientes matrices sean iguales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 & -b \\ 2 + c & -3 & d + 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} e & -3 & 1 - f & 5 \\ -3 & 2 + 5g & -6 & 3h - 1 \end{pmatrix}$$

2. Dadas la matriz fila $A = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$ y la matriz columna $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B$.

b) Calcula $B \cdot A$.

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A + B$, $A - B$ y $2A - 3B$.

b) Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

4. Dadas las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2, A^3 y A^4.

b) Calcula $A^2 - 3A + 2I$.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de A.

b) Calcula la matriz X que verifica la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

6. Calcula las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

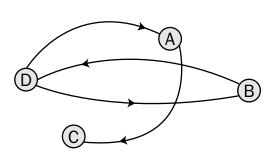
$$\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 16 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

7. Calcula el rango de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

8. En cierta zona de montaña existen cuatro refugios, A, B, C y D, que están comunicados por sendas según se establece en el siguiente grafo:



Ten en cuenta que, debido a su pendiente, el recorrido en alguno de los sentidos de ciertas sendas carece de interés para los deportistas.

a) Forma la matriz M asociada al grafo.

b) Calcula la matriz M^2 e interpreta los resultados.

SOLUCIONES

1. Si $A = B$ entonces:

$$\begin{matrix} 1=e & a=-3 & -2=1-f & -b=5 \\ 2+c=-3 & -3=2+5g & d+1=-6 & 5=3h-1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e=1 & a=-3 & f=3 & b=-5 \\ c=-5 & g=-1 & d=-7 & h=2 \end{cases}$$

2. a) $A \cdot B = (1\ 2\ 3\ 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (50)$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot (1\ 2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \\ 7 & 14 & 21 & 28 \end{pmatrix}$

3. a) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

$2A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \\ -3 & -14 & -5 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -7 & -12 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

4. a) $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} -29 & 30 \\ -45 & 46 \end{pmatrix}$

b) $A^2 - 3A + 2I =$

$= \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}$

5. a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_2 - 3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + F_2]{}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$

b) $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$

6.

$$\begin{cases} 2X + 4Y = \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \\ -2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} Y = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

7. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rango $A = 2$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_1 + F_2]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Como las dos filas que quedan no son proporcionales, se deduce que rango $B = 2$.

8. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Esta matriz expresa de qué forma se puede ir de un refugio a otro, o al mismo, pero pasando previamente por otro.