11 Funciones. Límites y continuidad

1. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ indicando el tipo de discontinuidad que presenta en ellos. Indica el salto de discontinuidad o, en su caso, el verdadero valor de la función en esos puntos.

2. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$ indicando el tipo de discontinuidad que presenta en ellos. Indica el salto de discontinuidad o, en su caso, el verdadero valor de la función en esos puntos.

3. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x - 6}{2 - \sqrt{x - 2}}$ indicando el tipo de discontinuidad que presenta en ellos. Indica el salto de discontinuidad o, en su caso, el verdadero valor de la función en esos puntos.

4. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leqslant 1 \\ x^2 - 3x + 1 & x > 1 \end{cases}$

5. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 6 - x & x < -2 \\ 6 & -2 \leqslant x < 3 \\ x^2 - 3 & x \geqslant 3 \end{cases}$

6. Halla el valor del parámetro a para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x < 1 \\ ax - 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

7. Halla el valor del parámetro a para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & x < 2 \\ \mathrm{L}(x - 1) & x \geqslant 2 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

8. Halla los valores de los parámetros a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x < 0 \\ x^2 + ax + b & 0 \leqslant x < 3 \\ x + 9 & x \geqslant 3 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

9. Comprueba si la función $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ verifica las condiciones del teorema de Weierstrass en el intervalo [1, 4]. ¿Se puede asegurar que la función está acotada en ese intervalo? ¿Se puede asegurar que la función está acotada en todo su dominio?

10. Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$ está acotada en el intervalo $[-2, 2]$.

SOLUCIONES

1. El dominio de $f(x)$ es $\mathbf{R} - \{3\}$.

En $x = 3$ tiene una discontinuidad evitable, ya que:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(x+1)\cdot(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+1) = 4$$

siendo el verdadero valor en $x = 3$: $f(3) = 4$

2. El dominio de $f(x)$ es $\mathbf{R} - \{-1, 2\}$.

En $x = 2$ tiene una discontinuidad evitable, ya que:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

El verdadero valor es $f(2) = \dfrac{5}{3}$.

En $x = -1$, $f(x)$ tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$

3. El dominio de la función es $[2, \infty) - \{6\}$. En $x = 6$ tiene una discontinuidad evitable:

$$\lim_{x\to 6} f(x) = \lim_{x\to 6} \frac{(x-6)\cdot(2+\sqrt{x-2})}{(2-\sqrt{x-2})\cdot(2+\sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x\to 6} \frac{(x-6)\cdot(2+\sqrt{x-2})}{6-x} = -4$$

siendo el verdadero valor en $x = 6$: $f(6) = -4$

4. Se estudia la continuidad en $x = 1$

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 - 2) = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 - 3x + 1) = -1$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$, la función es continua en toda la recta real.

5. La función es continua salvo, quizá, en $x = -2$ y en $x = 3$. Se estudia la continuidad en esos puntos:

- En $x = -2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (6 - x) = 8 \\ f(-2) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} 6 = 6 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito igual a 2.

- En $x = 3$, la función es continua:

$$f(3) = \lim_{x\to 3} f(x) = 6$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} 6 = 6 \\ f(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x^2 - 3) = 9 - 3 = 6 \end{array}\right.$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbf{R} - \{-2\}$

6. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 1$:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^3 - 1) = 0 \\ f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (ax - 1) = a - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1$$

7. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 2$:

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2^2 + 2a + a - 1 = 3 + 3a \\ f(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \text{L}1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3 + 3a = 0 \Rightarrow a = -1$

8. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 0$ y en $x = 3$:

- $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + ax + b) = b \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow b = 0$

- $f(3) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2 + ax + b) = 9 + 3a + b \\ f(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x + 9) = 3 + 9 = 12 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9 + 3a = 12 \Rightarrow a = 1$

9. $f(x)$ es continua en todo su dominio $\mathbf{R} - \{0\}$; por tanto, es continua en $[1, 4]$.

Como verifica las condiciones del teorema de Weierstrass, se puede asegurar que está acotada en el intervalo; sin embargo, no está acotada en el dominio, ya que:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

10. Se estudia la continuidad de la función en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 - 1) = -1$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0^+} (2x - 1) = -1$$

Como $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$. La función es continua en $x = 0$ y, por tanto, en $[-2, 2]$. Como verifica las condiciones del teorema de Weierstrass, se puede asegurar que está acotada en ese intervalo.