

Soluciones

1. a)
$$\begin{matrix} & B & C & F & & \text{Me} & \text{Ca} \\ M & \begin{pmatrix} 40 & 20 & 7 \\ 30 & 12 & 7 \end{pmatrix} & & & B & \begin{pmatrix} 120 & 45 \\ 110 & 60 \\ 95 & 55 \end{pmatrix} \\ N & & & & C & \\ & & & & F & \end{matrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 40 & 20 & 7 \\ 30 & 12 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 & 45 \\ 110 & 60 \\ 95 & 55 \end{pmatrix} = \begin{matrix} & \text{Me} & \text{Ca} \\ M & \begin{pmatrix} 7665 & 3385 \\ 5585 & 2455 \end{pmatrix} \\ N & \end{matrix}$$

2. a)
$$AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

b)
$$C^t B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

c)
$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

3.
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$XA^2 + BA = A^2 \Rightarrow XI_3 + BA = I_3 \Rightarrow X = I_3 - BA$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & -5 & -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 - F_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} F_3 \leftrightarrow F_4 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

5.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 4 & m \\ -1 & -m & 1-m \end{pmatrix}$$

$$C_3 \rightarrow C_3 - C_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ m & 4 & 0 \\ -1 & -m & 2-m \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ m & 4 & 0 \\ 0 & 2-m & 2-m \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow 2F_1 - F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ m & 4 & 0 \\ 0 & 2-m & 2-m \end{pmatrix}$$

Si $m = 2$, $\text{rg}(A) = 1$, ya que en ese caso los elementos de la primera y de la tercera fila son cero.

Si $m \neq 2$, $\text{rg}(A) = 3$, ya que en ese caso la matriz es triangular y tiene todos los elementos de la diagonal principal distintos de cero.

6. a) El rango de los vectores $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 1, 4)$ y $v_3 = (1, 3, 2)$ es igual al rango de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow 2F_3 - F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de dicha matriz es 2, ya que la 2.^a y 3.^a filas son proporcionales y la primera y segunda no lo son. Luego hay dos vectores linealmente independientes entre ellos.

b) Para determinar si $v_4 = (2, 1, 3)$ depende linealmente de $\{v_1, v_2, v_3\}$, basta con comprobar si el rango de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es 2. Para ello se estudia el rango de la matriz A'.

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego el rango de esa matriz es 3, ya que es triangular con todos los elementos de la diagonal principal distintos de cero. Por tanto, v_4 no depende linealmente de v_1, v_2 y v_3 .

7. Para determinar si A y B son invertibles, se calculan sus rangos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
, que es una matriz triangular

con elementos no nulos en la diagonal, luego $\text{rg}(A) = 3$ y la matriz A es invertible. Se calcula su inversa por el método de Gauss-Jordan:

$$(A | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \rightarrow F_1 - F_2 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \\ F_3 \rightarrow -F_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Luego
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

En la matriz B se observa que $F_1 = -F_2 + 2F_3$. Por tanto, las filas no son linealmente independientes, luego la matriz no es invertible.

8. a) $(2 \ 2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (2 \ -2)$

b) $(2 \ -2) + (1 \ -1) = (3 \ -3)$

c) $(3 \ -3) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-3 \ 3)$