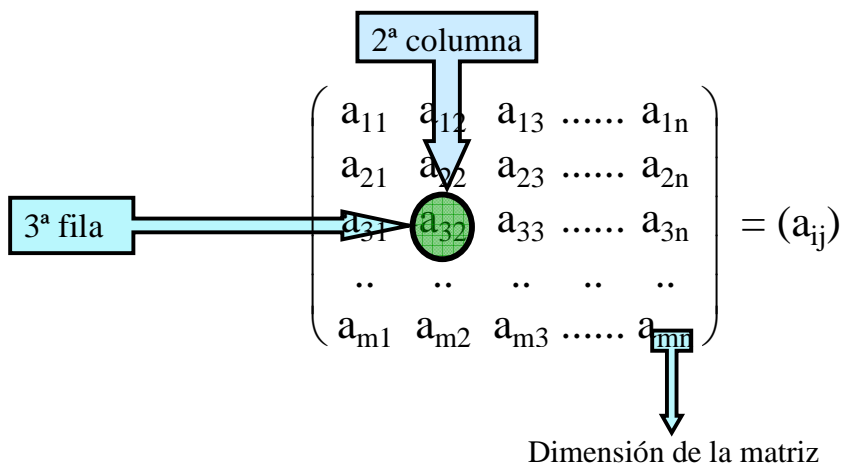


TEMA 2 – ÁLGEBRA DE MATRICES

2.1 – NOMENCLATURA Y DEFINICIONES

2.1.1 - DEFINICIÓN

Las matrices son tablas numéricas rectangulares



Esta es una matriz de m filas y n columnas. Es de **dimensión** $m \times n$.

Los elementos, a_{ij} , son números reales ($a_{ij} \in \mathbb{R}$)

Al designar una matriz genérica, como la anterior, cada término tiene dos subíndices que indican la fila y la columna a las que pertenece. El elemento “ a_{32} ” es el que está en la tercera fila y segunda columna.

Para simplificar, la matriz anterior se puede designar así: $A = (a_{ij})_{m,n}$

2.1.2 – IGUALDAD DE MATRICES

Dos **matrices** son **iguales** cuando son de la misma dimensión y, además, coinciden término a término:

$$\left. \begin{matrix} A = (a_{ij})_{m,n} \\ B = (b_{ij})_{m,n} \end{matrix} \right\} A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

2.1.3 – TIPOS DE MATRICES

- **Matriz fila:** $A_{1 \times n} = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$

- **Matriz columna:** $A_{m \times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

- **Matriz nula:** Matriz cuyos elementos son todos nulos: $O_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz cuadrada:** Si el número de filas es igual al número de columnas ($m = n$)

$$A_{n \times n} = A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

→ Diagonal secundaria
→ Diagonal principal

- **Matriz triangular superior (inferior):** Matriz cuadrada cuyo elementos que están por debajo (encima) de la diagonal principal son nulos.

$$A_{n \times n} = A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal :** Matriz cuadrada en que la todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son nulos.

$$A_{n \times n} = A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz escalar:** Matriz diagonal con los elementos de la diagonal principal iguales

$$A_{n \times n} = A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- **Matriz unidad o identidad :** Matriz escalar con los elementos de la diagonal principal unos.

$$I_{n \times n} = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz traspuesta de una matriz $A = (a_{ij})_{m,n}$** es otra matriz $A^t = (a_{ji})_{n,m}$ que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz simétrica:** matriz cuadrada que coincide con su traspuesta ($A = A^t$)

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz antisimétrica:** matriz cuadrada que coincide con menos su traspuesta ($A = -A^t$)

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 – OPERACIONES CON MATRICES

2.2.1 – SUMA DE MATRICES

Para que dos **matrices** puedan **sumarse**, es necesario que tengan la misma dimensión. En tal caso, se suman término a término: $(a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$

2.2.2 – PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ

Para **multiplicar un número por una matriz**, se multiplica por el número cada elemento de la matriz:

$$k \cdot (a_{ij})_{m,n} = (ka_{ij})_{m,n}$$

2.2.3 – PRODUCTO DE UNA MATRIZ FILA POR UNA MATRIZ COLUMNA

El **producto de un vector fila por un vector columna**, ambos de la misma dimensión, es un número que se obtiene multiplicándolos término a término y sumando los resultados:

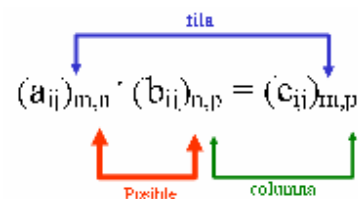
$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \dots + a_n \cdot b_n$$

2.2.4 – PRODUCTO DE MATRICES

Para que dos **matrices** A y B puedan **multiplicarse**, A.B, es necesario que *el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz*.

En tal caso, el producto A.B = C es otra matriz cuyos elementos se obtienen multiplicando cada vector fila de la primera por cada vector columna de la segunda, del siguiente modo:

$$\left. \begin{matrix} A = (a_{ij})_{m,n} \\ B = (b_{ij})_{n,p} \end{matrix} \right\} A \cdot B = C \Leftrightarrow (c_{ij})_{m,p}$$



Siendo c_{ij} el producto de la fila i de A por la columna j de B:

$$c_{ij} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \dots \quad a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

La matriz C resultante tiene tantas filas como A, m , y tantas columnas como B, p .

2.2.4 – EJEMPLO

Calcular la matriz $M = P^2 - 3P - I$ siendo $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

2.3 – PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON MATRICES**2.3.1 – PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES**

Las matrices de dimensión $m \times n$ pueden sumarse, y el resultado es otra matriz $m \times n$. Además, la suma cumple las siguientes propiedades:

- 1. Asociativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$
- 2. Conmutativa:** $A + B = B + A$
- 3. Elemento neutro:** La matriz $\mathbf{O}_{m,n}$, cuyos elementos son todos 0 (**matriz nula**), sumada con cualquier otra matriz de dimensión $m \times n$, la deja igual, es decir, $A + \mathbf{O} = \mathbf{O} + A = A$
- 4. Elemento opuesto:** Toda matriz A , tiene su opuesta $-A$. La opuesta de $A = (a_{ij})$ es $-A = (-a_{ij})$, pues $(a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0) = \mathbf{O}$

2.3.2 – PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE NÚMEROS POR MATRICES

Si $a, b \in \mathbb{R}$, y $A, B \in M_{m,n}$, se cumplen las siguientes propiedades:

- 1.** $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$
- 2.** $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$
- 3.** $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$
- 4.** $1 \cdot A = A$

2.3.3 – PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

- 1. Asociativa:** $(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}) \cdot C_{p \times q} = A_{m \times n} \cdot (B_{n \times p} \cdot C_{p \times q})$
- El producto de matrices **no es conmutativo:** $A \cdot B \neq B \cdot A$

Como consecuencia, hemos de mantener el orden en que aparezcan las matrices que han de multiplicarse. Por tanto, utilizaremos expresiones del siguiente tipo: “La matriz A está multiplicada *por la izquierda* (o *por la derecha*) por la matriz B .”

3. **Elemento neutro:** $A.I = I.A = A$ siendo I la **matriz identidad o unidad**.
4. **No siempre existe el elemento inverso:** $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$, siendo A^{-1} la **matriz inversa de A**

No todas las matrices tienen inversa:

- Si una matriz tiene inversa se la llama **invertible o regular**.
- Si una matriz no tiene inversa se le llama **singular**.

2.3.4 – PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS

1. **Distributiva a izquierda:** $A.(B + C) = A.B + A.C$
2. **Distributiva a derecha:** $(A + B).C = A.C + B.C$

2.3.5 – PRODUCTOS NOTABLES

1. $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, excepto si A y B son conmutativas
2. $(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$, excepto si A y B son conmutativas
3. $(A + B).(A - B) \neq A^2 - B^2$, excepto si A y B son conmutativas

2.3.6 – PROPIEDADES DE LA TRASPOSICIÓN DE MATRICES

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(k.A)^t = k.A^t$
4. $(A.B)^t = B^t.A^t$
5. Si A es una matriz simétrica: $A^t = A$

2.3.7 – PROPIEDADES DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$
3. $(k.A)^{-1} = \frac{1}{K}.A^{-1}$
4. $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
5. Si I es la matriz identidad o unidad: $I^{-1} = I$
6. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

2.4 – CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

2.4.1 – APLICANDO LA DEFINICIÓN

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Ejemplo:

[1] Hallar la inversa, si existe, de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x + z & 2y + t \\ 4x + 2z & 4y + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2y + t = 0 \\ 4x + 2z = 0 \\ 4y + 2t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 1 \\ 4x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = -2 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

$$\Rightarrow \text{No tiene solución}$$

Solución: No existe la inversa de A

[2] Hallar la inversa, si existe, de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 3x + 4z & 3y + 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2t = 0 \\ 3x + 4z = 0 \\ 3y + 4t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow -2z = -3 \Rightarrow z = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -2$$

$$\begin{cases} y + 2t = 0 \\ 3y + 4t = 1 \end{cases} \Rightarrow -2t = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Solución: } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Comprobación: } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Está bien}$$

Observación:

- Para hallar la inversa de una matriz 2 x 2 hay que resolver 2 sistemas de 2 ecuaciones
 - Para hallar la inversa de una matriz 3 x 3 hay que resolver 3 sistemas de 3 ecuaciones
 - Para hallar la inversa de una matriz 4 x 4 hay que resolver 4 sistemas de 4 ecuaciones
 -
 - Para hallar la inversa de una matriz n x n hay que resolver n sistemas de n ecuaciones
- Por tanto *este método sólo es aconsejable para matrices de dimensión 2 x 2.*

2.4.2 – APLICANDO EL MÉTODO DE GAUSS**(A | I) ~ (I | A)****Pasos:**

1. Hacemos ceros debajo de la diagonal principal (de izquierda a derecha)
2. Hacemos ceros encima de la diagonal principal (de derecha a izquierda)
3. Arreglamos la diagonal principal (dividiendo cada fila por el número correspondiente)

Nota: Si al hacer ceros una fila o columna es toda cero \Rightarrow No existe la inversa

Ejemplo:

[1] Hallar la inversa, si existe, de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) F_2 = \tilde{F}_2 - 2F_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{No existe la inversa de A}$$

[2] Hallar la inversa, si existe, de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) F_2 = \tilde{F}_2 - 3F_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) F_1 = \tilde{F}_1 + F_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_2 = \tilde{F}_2 / (-2) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Comprobación: } A \cdot A^{-1} = I : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Está bien}$$

[3] Hallar la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) F_3 = \tilde{F}_3 - F_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) F_3 = 2\tilde{F}_3 + F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right) F_1 = 7\tilde{F}_1 + F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & 0 & 6 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right) F_1 = \tilde{F}_1 / 7$$

$$F_2 = F_2 / 14$$

$$F_3 = F_3 / 7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/7 & 1/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 & 3/7 & 2/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 7 & -2/7 & 1/7 & 2/7 \end{array} \right)$$

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/7 & 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & 2/7 & -3/7 \\ -2/7 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Comprobación: } A \cdot A^{-1} = I : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5/7 & 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & 2/7 & -3/7 \\ -2/7 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Bien}$$

Observación: Para hallar la inversa de una matriz por el método de Gauss, se pueden cambiar filas pero en $(A | I)$ no antes, pero nunca columnas.

$$[4] \text{ Hallar la inversa de la matriz } \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.3 – POR DETERMINANTES (Ver tema 3)

2.5 – EJERCICIOS TÍPICOS DE MATRICES

2.5.1 – POTENCIA N-ÉSIMA DE UNA MATRIZ

Para calcular la potencia n-ésima de una matriz, A^n , se calcula A, A^2, A^3, A^4, \dots hasta que descubramos la ley de formación de las sucesiones que la forman o lleguemos a la matriz Identidad
Ejemplos:

$$[1] \text{ Calcular } A^n \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

....

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[2] Calcular A^{128} siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot I = A$$

Sólo hay tres posibles resultados : A, A^2, A^3 (el resto se repiten)

Dividimos 128 entre 3 y nos quedamos con el resto: $128 = 3 \cdot 42 + 2 \Rightarrow$

$$A^{128} = A^{3 \cdot 42 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.5.2 – APLICACIONES DE LA INVERSAS: RESOLVER ECUACIONES MATRICIALES

Propiedades: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$; $A \cdot I = A$

Ejemplos:

[1] $A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

[2] $X \cdot A = B \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot I = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$

[3] $AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B)$

[4] $XA^{-1} + B = C \Rightarrow X \cdot A^{-1} = C - B \Rightarrow X \cdot A^{-1} \cdot A = (C - B) \cdot A \Rightarrow X \cdot I = (C - B) \cdot A \Rightarrow X = (C - B) \cdot A$

[5] $AXB + C = I \Rightarrow AXB = (I - C) \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (I - C) \cdot B^{-1} \Rightarrow I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot (I - C) \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (I - C) \cdot B^{-1}$

2.5.3 – RESOLVER SISTEMAS MATRICIALES

Se aplica el método de reducción para despejar las matrices incógnita.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema matricial $\begin{cases} X - 3Y = A \\ 2X + 2Y = B \end{cases}$ siendo A y B matrices conocidas

$$\begin{cases} X - 3Y = A \\ 2X + 3Y = B \end{cases} \quad \text{Multiplicamos la primera ecuación por } -2 \text{ y las sumamos: } 8Y = B - 2A \Rightarrow$$

$$Y = \frac{1}{8}(B - 2A) \quad (\text{Calculamos } Y)$$

$$X = 3Y + A \quad (\text{Calculamos } X)$$

2.5.4 – HALLAR LAS MATRICES QUE CONMUTAN CON UNA DADA

Commutar significa que $AX = XA$

Ejemplo: Hallar las matrices que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A \cdot X &= X \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2x + y \\ z & 2z + t \end{pmatrix} \\ &\begin{cases} x + 2z = x \\ y + 2t = 2x + y \\ z = z \\ t = 2z + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = t \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = t \end{cases} \end{aligned}$$

Dos ecuaciones con cuatro incógnitas (2 g.l.) $\Rightarrow z = 0, x = \alpha, t = \alpha, y = \beta$

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2.6 – DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES

2.6.1 – COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ vectores y $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ números, al vector formado del siguiente

$$\text{modo: } a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + a_3 \cdot \vec{v}_3 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n$$

Se le llama **combinación lineal** de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$

Ejemplo: Escribir el vector $(0,3,-3)$ como combinación lineal de los vectores:

$$\vec{v}_1 = (1,1,0), \vec{v}_2 = (2,-1,3)$$

$$(0,3,-3) = \alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2$$

$$(0,3,-3) = \alpha \cdot (1,1,0) + \beta \cdot (2,-1,3)$$

$$(0,3,-3) = (\alpha + 2\beta, \alpha - \beta, 3\beta) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha + 2\beta \\ 3 = \alpha - \beta \\ -3 = 3\beta \end{cases}$$

De la tercera ecuación $\beta = -1$

Sustituimos en la segunda ecuación: $3 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = 2$

Comprobamos que se cumple la primera: $0 = 2 + 2 \cdot (-1)$. Como se cumple se puede poner como

combinación lineal $(0,3,-3) = 2 \cdot \vec{v}_1 - 1 \cdot \vec{v}_2$ (Si no se cumpliese, no se podría poner y el ejercicio no tendría solución)

2.6.2 – DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES

Un conjunto de vectores: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ se dice que son **linealmente dependientes** (L.D.) si alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás.

Un conjunto de vectores: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ se dice que son **linealmente independientes** (L.I.) si ninguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás.

En la práctica: Para saber si un conjunto de vectores son linealmente dependientes o independientes lo que se hace es una combinación de ellos igualada al vector cero

$$a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + a_3 \cdot \vec{v}_3 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$$

- Si todos los a_i son cero \Rightarrow Los vectores son linealmente independientes
- Si algún a_i es no nulo \Rightarrow Los vectores son linealmente dependientes

2.7 – RANGO DE UNA MATRIZ

2.7.1 – DEFINICIÓN

Llamamos **rango de una matriz** al número de filas o columnas linealmente independientes.

2.7.2 – CÁLCULO

Para estudiar el rango de una matriz:

- 1 – Hacemos ceros debajo de la diagonal principal.
- 2 – El número de filas no nulas es el rango

Ejemplo: Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 = 3F_2 - 2F_1 \\ F_3 = 3F_3 - 5F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 19 & -26 & 53 \\ 0 & -38 & 52 & -106 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3 = F_3 + 2F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 19 & -26 & 53 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango $A = 2$

Para estudiar el rango de una matriz con parámetros

- Se lleva el parámetro lo más abajo y a la derecha posible.
- Se hacen ceros debajo de la diagonal principal (la fila que cambiamos no se puede multiplicar por el parámetro).
- Se igualan, por separado, los elementos de la diagonal principal a cero
- Un caso más que el números de parámetros (se estudia cada caso)

Ejemplo: Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 = -2F_2 + F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3 = F_3 + aF_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$2 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución

$-1 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución

$1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

Dos valores de $a \Rightarrow$ Tres casos:

- CASO 1 : $a = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango $A = 2$

- CASO 2 : $a = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango $A = 2$

- CASO 3 : $a \neq \pm 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango $A = 3$

2.7.3 – UTILIZAR EL RANGO PARA ESTUDIAR LA DEPENDENCIA O INDEPENDENCIA DE VECTORES

Para estudiar si un conjunto de vectores son linealmente dependientes o independientes se colocan como si fuesen las filas de una matriz, se estudia el rango de la matriz (ceros debajo de la diagonal principal)

- Si alguna fila es toda nula \Rightarrow Son linealmente dependientes
- Si ninguna fila es nula \Rightarrow Son linealmente independientes

Ejemplos:

[1] Estudiar si son L.I. o L.D. los vectores $(2,3,0,5)$, $(0,0,-1,2)$, $(4,0,1,0)$ y $(12,0,2,2)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3 = F_3 - 2F_1 \\ F_4 = F_4 - 6F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & -10 \\ 0 & -18 & 2 & -28 \end{pmatrix} F_2 \leftrightarrow F_3 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -18 & 2 & -28 \end{pmatrix} F_4 = F_4 - 3F_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} F_4 = F_4 - F_3 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Linealmente Dependientes}$$

[2] Estudiar si los vectores $(1,6,4)$, $(2,0,-1)$, $(5,6,3)$ son L.I o L.D.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 5F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -12 & -9 \\ 0 & -24 & -17 \end{pmatrix} F_3 = F_3 - 2F_2 \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -12 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{L. Independientes}$$