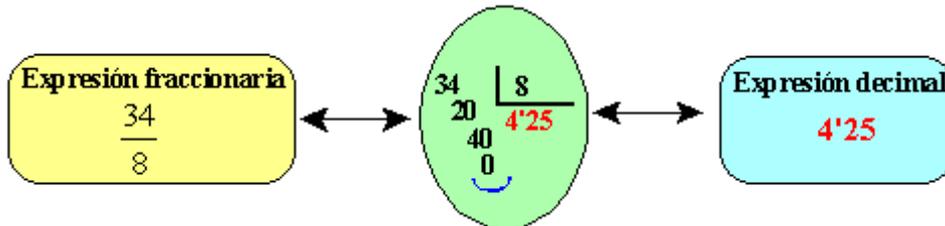


NÚMEROS DECIMALES

Expresión decimal de los números racionales

Decimales exactos y periódicos

La expresión decimal de una fracción se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador. Para la fracción $\frac{34}{8}$:



$$\text{Es decir: } \frac{34}{8} = 4,25$$

4'25 es la **expresión decimal** de $\frac{34}{8}$ y de cualquier fracción equivalente a ella. A su vez, $\frac{34}{8}$ o cualquier fracción equivalente se llama **fracción generatriz** de 4'25.

Diremos que 4'25 es un número **decimal exacto** porque tiene un número finito de cifras decimales.

No ocurre siempre así. Si calculamos el desarrollo decimal de la fracción $\frac{40}{33}$, obtenemos:

$$\begin{array}{r} 40 \quad | \quad 33 \\ 70 \quad | \quad 1'2121..... \\ 40 \quad | \\ 70 \quad | \\ 40 \quad | \\ \dots \end{array}$$

Los restos se repiten y en consecuencia nunca termina la división; $\frac{40}{33} = 1'21212121.....$

Al grupo de decimales que se repiten lo llamaremos **periodo** y lo indicaremos mediante un arco que los abarca:

$$1' \overbrace{21}$$

Diremos que es un decimal **periódico puro** porque el periodo comienza inmediatamente después de la coma decimal.

Del mismo modo, si calculamos el desarrollo decimal de $\frac{23}{12}$ obtenemos:

$$\begin{array}{r} 23 \quad | \quad 12 \\ 110 \quad \color{red}{1'91666...} \\ \underline{020} \\ 080 \\ \underline{080} \\ \dots \end{array}$$

En este caso el periodo no comienza después de la coma, diremos que $\frac{23}{12}$ es **periódico mixto** y se escribirá como

$$1'91\overline{6}$$

En resumen, los decimales periódicos pueden ser:

- Decimales **periódicos puros**, si el período comienza inmediatamente después de la coma.
- Decimales **periódicos mixtos**, si el período no comienza inmediatamente después de la coma.

Actividades

1. Indica la naturaleza decimal de las fracciones $\frac{2}{15}$, $\frac{6}{25}$ y $\frac{163}{3}$.
2. Busca la expresión decimal de $\frac{10}{9}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{12}{9}$, ..., $\frac{18}{9}$. ¿Observas algo especial?

Al dividir dos números los restos obtenidos siempre son menores que el divisor. Observa esta dos divisiones:

a)

$$\begin{array}{r}
 22 \overline{) 7} \\
 \underline{10} \\
 30 \\
 \underline{20} \\
 60 \\
 \underline{40} \\
 50 \\
 \dots
 \end{array}$$

Hasta ahora hemos obtenido los restos: 1, 3, 2, 6, 4 y 5. En el siguiente paso el resto será 0 o alguno de ellos se repetirá forzosamente y en consecuencia volverán a aparecer las mismas cifras en el divisor.

b)

$$\begin{array}{r}
 63 \overline{) 55} \\
 \underline{80} \\
 250 \\
 \underline{300} \\
 25 \\
 \dots
 \end{array}$$

No es necesario que aparezcan todos los restos posibles. En el momento que uno de ellos se repita, vuelven a aparecer las mismas cifras en el cociente y de nuevo los mismos restos.

De lo que hemos comentado se deduce que **todo número racional tiene una expresión decimal exacta o periódica.**

Cálculo de fracciones generatrices

a) Decimales exactos

$$0,24 = \frac{24}{100} ; 3,1 = \frac{31}{10} ; 3,478 = \frac{3478}{1000}$$

La fracción generatriz de un decimal exacto es una fracción que tiene por numerador al número, escrito sin coma decimal, y por denominador un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tiene.

b) Decimales periódicos puros

Consideremos el decimal: $4,\widehat{31} = 4,31311\dots\dots$ al que llamaremos x.

$$x = 4'313131....$$

Si multiplicamos los dos miembros por 100 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene el período) obtenemos:

$$100x = 431'3131....$$

Restando miembro a miembro las dos igualdades:

$$\begin{array}{r} 100x = 431'313131.... \\ x = 4'313131.... \\ \hline 99x = 431 - 4 \end{array} \quad x = \frac{427}{99} \text{ que es la fracción generatriz de } 4,\widehat{31}$$

Actividades

1. Utilizando el método anterior comprueba que:

$$2'\widehat{6} = \frac{26-2}{9}, \text{ es decir } 2'\widehat{6} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

$$1'\widehat{081} = \frac{1081-1}{999} = \frac{1080}{999} = \frac{40}{37}$$

La fracción generatriz de un decimal periódico puro es una fracción que tiene por numerador al propio número, escrito sin los signos coma y periodo, menos el número formado por las cifras anteriores a la coma. Por denominador tiene tantos nueves como cifras decimales hay en el periodo.

c) Decimales periódicos mixtos

Consideremos el decimal $1,0\widehat{63}$ al que llamaremos x:

$$x = 1'063636363....$$

Si multiplicamos los dos miembros por 10 (un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales haya antes del periodo) obtenemos el decimal periódico puro:

$$10x = 10'63636363....$$

Multiplicamos los dos miembros de la igualdad obtenida por 100 (un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el periodo) y obtenemos:

$$1000x = 1063'636363.....$$

Restando las dos últimas igualdades:

$$\begin{array}{r} 1000x = 1063'636363..... \\ 10x = 10'636363..... \\ \hline 990x = 1063 - 10 \end{array}$$

Por lo tanto $X = \frac{1063-10}{990}$ es decir, $1'0\overline{63} = \frac{1053}{990} = \frac{117}{110}$

Actividades

2) Utilizando el método anterior comprueba que:

a) $3'1\overline{6} = \frac{316-31}{90} = \frac{285}{90} = \frac{19}{6}$

b) $0'237\overline{45} = \frac{23745-237}{99000} = \frac{23508}{99000} = \frac{653}{2750}$

La fracción generatriz de un decimal periódico mixto es una fracción que tiene por numerador al propio número, escrito sin los signos coma y periodo, menos el número formado por las cifras anteriores al periodo quitándole la coma. Por denominador tiene tantos nueves como cifras hay en el periodo seguidos de tantos ceros como cifras hay entre la coma y el periodo.

Hemos comprobado también que **todo decimal exacto o periódico se puede escribir como una fracción**, en consecuencia:

El conjunto de los números racionales es igual que el conjunto de los números decimales exactos o periódicos.

¿Existen decimales no exactos, ni periódicos?

Si un número decimal no es exacto, necesariamente ha de tener infinitas cifras decimales. Si además es no periódico, éstas no pueden guardar ninguna secuencia repetitiva. Por ejemplo:

5'1234567891011121314.....

2'01001000100001.....

Existen otros números que son bastante familiares y que tampoco se pueden expresar como fracción. Esto ocurre con el número **B**, las raíces no exactas y otros números "famosos".

$\pi = 3'141592654.....$

$\sqrt{2} = 1'414213562.....$

$\sqrt{5} = 2'236067977.....$

El número áureo

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1'61803998....$$

La proporción cordobesa

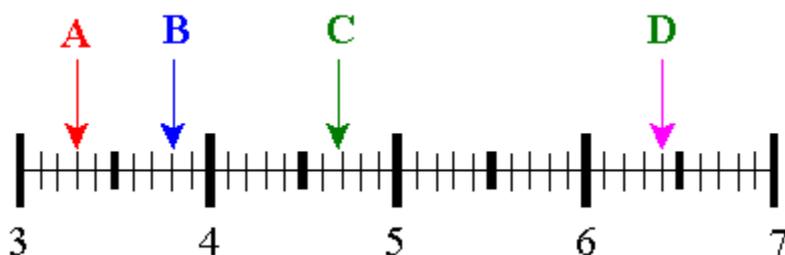
$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = 1'306562964....$$

Estos números que no se pueden escribir en forma de fracción reciben el nombre de números **IRRACIONALES** y se caracterizan por tener infinitas cifras decimales y no ser periódicos.

Representación de números decimales

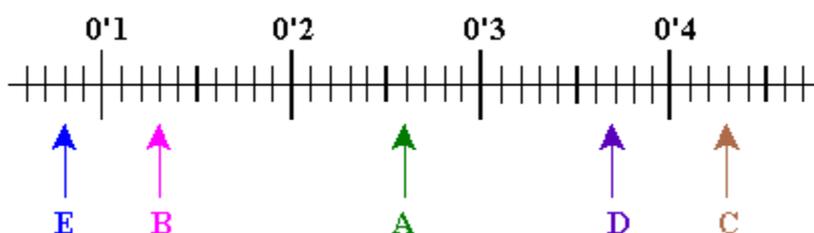
Actividades

1.- Si dividimos una unidad arbitraria en diez partes iguales, obtenemos la **escala decimal**. En ella se podrán representar de forma precisa decimales exactos con una única cifra decimal.



La flecha A señala el número 3'3. ¿Qué números indican las otras flechas?

2. A su vez, cada décima puede ser dividida en diez partes iguales. En esta actividad la escala superior divide la unidad en décimas y la inferior en centésimas: podremos representar decimales exactos con dos cifras decimales.



La flecha A indica 0'26. ¿Qué marcan B, C, D y E?

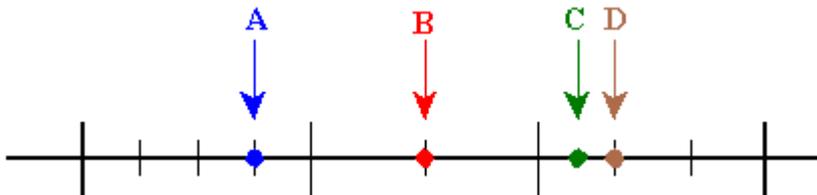
3. Observa que 0'20 es igual que 0'2 y 0'30 que 0'3. Observa también que 0'26 está entre 0'2 y 0'3, pero más próximo a 0'3.

Completa: 0'17 está entre ... y, pero más próximo a

4. Sin mirar la escala escribe el número que está en la mitad entre 0'2 y 0'3. Haz lo mismo con los números 0'8 y 0'9; 0 y 0'1 y entre 0'9 y 1.

5. Ordena de menor a mayor los números: 0'8, 0'15, 0'3, 0'08, 0'71 y 0'9.

6. También podemos dividir la unidad en mitades , tercios, cuartos, quintos, etc Indica los números que se corresponden con A, B, C y D:



7. Busca un número comprendido entre $0,\hat{9}$ y 1. ¿Es posible?. ¿Y entre $0,2\hat{9}$ y $0,3?$. Halla la fracción generatriz de $0,\hat{9}$ y $0,2\hat{9}$ y simplifica, ¿qué observas?.

8. Ordena de menor a mayor

a. -3'07, 7'03, -3'069, 7'2, 7'02, 7'006 y 7'029

b. -2,0 $\hat{6}$, -2'065, -2,06 $\hat{5}$, 0'38, 0,37 $\hat{9}$, 0'309, 0'379 y 0'3

9. Halla un número periódico comprendido entre $a = 1'2345675$ y $b = 1'2345676$.

10. Completa cada fila con los números de la naturaleza indicada, de menor a mayor:

	Dec . exacto	Dec .periódico puro	Dec .periódico mixto	Irracional	Fracción	
$\frac{2}{3}$						0'7
$1\bar{2}$						$\frac{7}{3}$
-0'33						-0'32
-2'3 $\bar{9}$						-2'4
$1\bar{25}$						$1'25\bar{3}$

Actividades de operaciones con números decimales

a. Decimales exactos

11. Realiza las siguientes operaciones con números decimales exactos.

Suma y resta de números decimales

$$3'45 + 0'126 =$$

$$9'5 - 2'36 =$$

Multiplicación

$$4'3 \cdot 0'25 =$$

$$0'032 \cdot 7'05 =$$

Se multiplican como si fueran enteros y se toman tantos decimales como sumen en total.

Multiplicación por 10, 100, 1000, etc.

$$0'35 \cdot 10 = 3'5$$

$$0'35 \cdot 100 = 35$$

$$0'35 \cdot 1000 = 350$$

Se desplaza la coma hacia la derecha tantas veces como ceros tenga.

División entre decimales

$$34'25 : 6'352 = \dots\dots\dots$$

Si multiplicamos el dividendo y el divisor por la misma cantidad, el resultado de la división no varía. Basándonos en esta propiedad podremos dividir decimales exactos:

$$34'25 : 6'352 = 34'25 \cdot 1000 : 6'352 \cdot 1000 = 34250 : 6352 = \dots\dots\dots$$

$$2'25 : 11'34 = 2'25 \cdot 100 : 11'34 \cdot 100 = 225 : 1134 = \dots\dots\dots$$

Para quitar la coma decimal multiplicamos dividendo y divisor por un uno seguido de tantos ceros como el mayor número de decimales de ambos.

b. Decimales periódicos

Anteriormente hemos operado con decimales exactos. Si consideramos decimales periódicos se nos presentan problemas: ¿Cómo multiplicar $3,\hat{6}$ por $1,\hat{27}$?

La única solución será expresarlos como fracción y operar con ellas:

$$3,\hat{6} \cdot 1,\hat{27} = 11/3 \cdot 14/11 = 14/3 = 4,\hat{6}$$

Actividades

12. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $2,\hat{7} + 2'3$ b) $5,\hat{6} + 5,\hat{6}$ c) $(2,\hat{2})^2$ d) $31,\hat{7} : 4,0\hat{8}$

Cálculo aproximado. Redondeo y errores

Cálculo aproximado

Actividades

13. Tres amigos piensan repartir equitativamente las 10.000 euros de un premio de lotería. ¿Podrán hacerlo sin que sobre nada?

En la práctica cotidiana nos vemos obligados con frecuencia a estimar un número del que, por diversas causas, no podemos o no necesitamos conocer su valor exacto. Así pues, la imprecisión en la medida, la imposibilidad matemática, la vaguedad en la información u otras razones nos fuerzan a sustituir un número por otro suficientemente cercano.

Actividad resuelta

14. Un ayuntamiento encarga a un contratista la remodelación de una plaza circular de 50 m de radio. Después de acordarse un precio de 200 € por m², el contratista presenta el siguiente presupuesto:

$$\text{Valor de la contrata} = 200 \cdot \text{Área de la plaza} = 200 \cdot 3'15 \cdot 50^2 = 1.575.000 \text{ €}$$

El alcalde, que dio por bueno el valor de π , lo aprobó.



Realiza el cálculo anterior aproximando B por 3'141592 y dinos si te parece honrado el contratista.

¿Te parece honrada una aproximación de B por 3'1416?

Aproximaciones de un número por exceso y por defecto

Del valor de $\pi = 3'141592653\dots\dots$, se obtienen las siguientes desigualdades:

3	<	π	<	4
3'1	<	π	<	3'2
3'14	<	π	<	3'15
3'141	<	π	<	3'142
3'1415	<	π	<	3'1416
.....			
3'141592653	<	π	<	3'141592654

Diremos que los números de la izquierda son **aproximaciones de π por defecto** (son menores que él) y los de la derecha **son aproximaciones por exceso** (son mayores). También diremos que:

3 y 4 son **aproximaciones a unidades**,

3'1 y 3'2 **aproximaciones a décimas (o de orden 1)**

3'14 y 3'15 **aproximaciones a centésimas (o de orden 2)**, etc.

Podemos recoger estos resultados en la tabla:

Aproximaciones de π	Por defecto	Por exceso
A unidades	3	4
A décimas	3'1	3'2
A centésimas	3'14	3'15
.....

Actividades

15. Aproxima a centenas, unidades y milésimas el número 2.374'3376.

16. En un auditorio circular de 53 m de diámetro se desean instalar asientos de manera que no pueda haber menos de 2 m². por persona, tal y como establecen las normas del Ayuntamiento.

Si calculamos el área, aproximando π , y dividimos por 2, sabremos el número de asientos que debemos comprar.

Aproximando B a centésimas obtenemos:

Área por defecto: $3'14 \cdot 26'5^2 = 2.205'065 \text{ m}^2$, en los que caben 1.102 localidades.

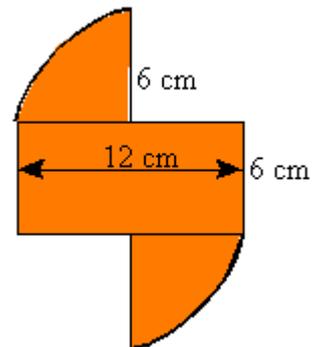
Área por exceso: $3'15 \cdot 26'5^2 = 2.212'0875 \text{ m}^2$, en los que caben 1.106.

- ¿Sería legal aproximar π por exceso?
- ¿Te parece buena la aproximación a centésimas por defecto?
- ¿Qué orden de aproximación consideras adecuado?

Actividades resueltas

17. Supongamos que deseamos conocer con una precisión de dos cifras decimales el área de esta mesa:

$$\text{Area} = 12 \cdot 6 + \frac{\pi \cdot 6^2}{2} = 72 + 18\pi$$



Veamos hasta qué orden de aproximación de π hemos de llegar para conseguirlo:

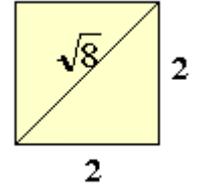
	Área por defecto	Área por exceso	
$\pi = 3$	126	144	$\pi = 4$
$\pi = 3'1$	127'8	129'6	$\pi = 3'2$
$\pi = 3'14$	128'52	128'7	$\pi = 3'15$
$\pi = 3'141$	128'538	128'556	$\pi = 3'142$
$\pi = 3'1415$	128'547	128'5488	$\pi = 3'1416$

Para garantizar que el área es 128'54... hemos tenido que aproximar hasta las diezmilésimas. ¿Cuántas cifras de área se garantizan si aproximamos π a la millonésima? Escribe su valor en tal caso.

Redondeo

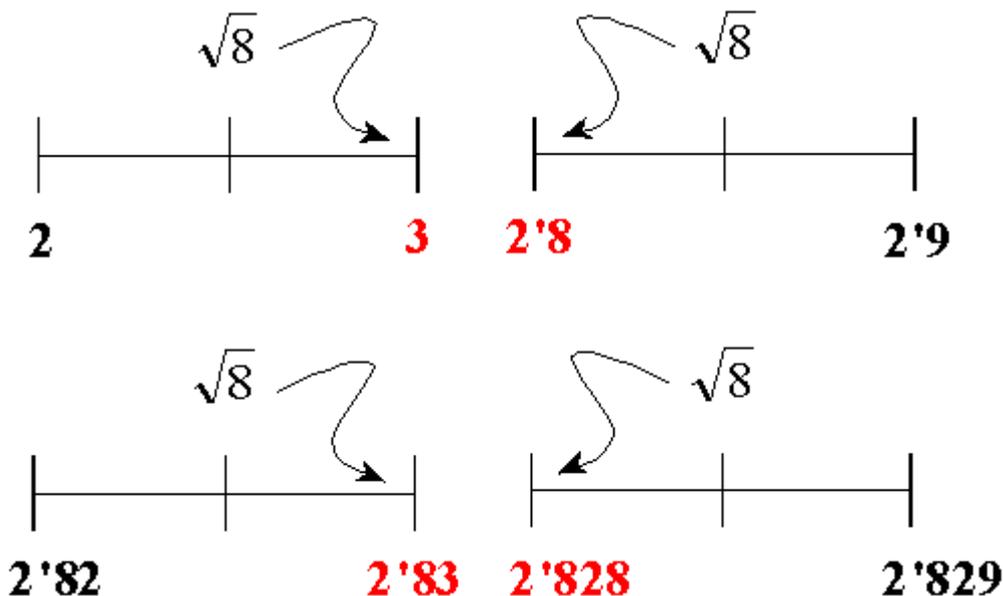
Normalmente sólo nos interesará elegir la aproximación más cercana al valor real con el fin de cometer un error mínimo.

Consideremos un cuadrado de lado 2. La medida de su diagonal viene dada



por el número $\sqrt{8} = 2'828427125\dots\dots$, de infinitas cifras decimales.

Llamamos redondeo de un orden determinado a la aproximación de dicho orden más cercana al número exacto.



De esta manera, el redondeo a unidades será 3, a décimas 2'8, a centésimas 2'83, a milésimas 2'828, a diezmilésimas 2'8284, etc.

Cifras significativas.

Las cifras significativas de una medida están formadas por los dígitos que se conocen no afectados por el error, más una última cifra sometida al error de la medida. Así, por ejemplo, si digo que el resultado de una medida es 3,72 m, quiero decir que serán significativas las cifras 3, 7 y 2. Que los dígitos 3 y 7 son cifras exactas y que el dígito 2 puede ser erróneo. O sea, el aparato de medida puede medir hasta las centésimas de metro (centímetros), aquí es donde está el error del aparato y de la medida. Por tanto, has de tener en cuenta:

- Que el número de dígitos con el que se da un resultado de una medida (directa o indirecta) es importante. No puedes poner todos los dígitos que te da la calculadora. Los resultados no pueden ser más precisos que los datos de donde se obtienen, es decir, los

resultados deben tener tantas cifras significativas o menos que los datos de procedencia.

Cuando el resultado de una operación matemática nos dé como resultado un número con demasiados dígitos hemos de redondearlo para que el número de cifras significativas sea coherente con los datos de procedencia

Redondeo.

Una vez que sepas cuantas cifras significativas debes tener, el número se redondea utilizando las siguientes reglas:

- Si el primer dígito no significativo (primero de la derecha) es menor que cinco, se elimina y se mantiene el anterior que se convierte así en el último. Ejemplo si el número es 3,72; como el último dígito es 2 (menor que cinco), quedaría 3,7.
- Si el primer dígito no significativo (primero de la derecha) es igual o mayor que cinco, se añade una unidad al anterior que se convierte así en el último. Ejemplo si seguimos redondeando el resultado anterior (3,7) quedaría 4 dado que 7 es mayor que cinco, se suma una unidad al anterior que pasaría de 3 a 4.

Actividades

18. Dado el número 47894 efectúa su redondeo a centenas, a decenas y a unidades.

19. Redondea a décimas, centésimas y milésimas el número 127'2008....

Error absoluto

Si conocemos el valor de un número A y lo sustituimos por una estimación A' , estaremos cometiendo un error que vendrá dado por la diferencia entre A y A' . A esta diferencia, tomada siempre con signo positivo, se le llama **error absoluto**, y lo escribiremos como:

Error absoluto : $E_a = |A - A'|$

Actividad resuelta

20. Juan y Luis son dos alumnos de Topografía. En una clase de prácticas han de medir la altura del edificio de correos y la de la catedral respectivamente.

Juan obtiene un valor de 29'5 m para el edificio de correos, cuya altura real es de 30 m y Luis mide 65'8 para una altura real de 65 m

$$E_a(\text{Juan}) = |30 - 29'5| = |0'5| = 0'5$$

$$E_a(\text{Antonio}) = |65 - 65'8| = |-0'8| = 0'8$$

Generalmente el valor exacto de A no se conoce con lo cual resultará imposible conocer el error que se comete al sustituirlo por una aproximación. Sí podremos conocer el margen de error. Por ejemplo:

En lugar de utilizar $A = \sqrt{2} = 1'41421356\dots$ trabajamos con $A' = 1'41$, una aproximación a centésimas. El error absoluto no se puede conocer, pero sí sabemos que necesariamente ha de ser menor que 0'0042135.....y por lo tanto menor que 0'005 (media centésima). Si en lugar de $A' = 1'41$ utilizáramos $A' = 1'414$, el error cometido sería menor que media milésima.

Error relativo

El problema que presenta el error absoluto consiste en que no nos permite comparar entre dos aproximaciones:

Juan le dice a Luis: yo sólo me he equivocado en medio metro, mientras que tú lo has hecho en 80 cm. Por lo tanto he sido más fino que tú.

Luis replica: no estoy de acuerdo puesto que la altura del edificio de correos es de 30 m y la de la catedral de 65 m. Tu proporción de error es $0'5/30 = 0'16666\dots$, mientras que la mía es $0'8/65 = 0'123\dots$

Llamaremos **error relativo** al resultado de dividir el error absoluto entre el valor real. Es decir:

$$\text{Error relativo} = \frac{|A - A'|}{A}$$

También se suele expresar en tanto por ciento ($E_r \cdot 100$). En el ejemplo anterior Luis tiene un error del 12'3% aproximadamente y Juan del 16'6%.

Erastótenes, que vivió en el siglo III a. de J.C., calculó la longitud de la circunferencia terrestre y comprobó que debía tener 38.400 km. Según las mediciones modernas, Erastótenes cometió un error de tan sólo el 4%.

Propagación de errores

Los errores cometidos al sustituir valores reales por aproximaciones se incrementan cuando efectuamos cálculos con ellas. Aún así, es posible controlar el margen de error del resultado final.