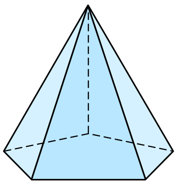
Cuerpos geométricos

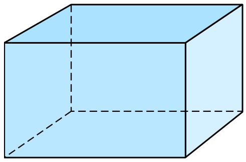
EJERCICIOS

001 **Determina el nombre de los poliedros y su número de caras y aristas.**

a)



b)

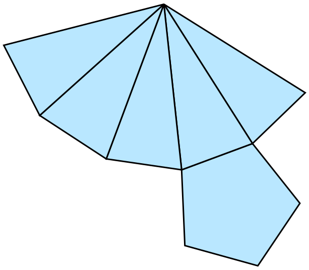


a) Hexaedro: 6 caras y 10 aristas.

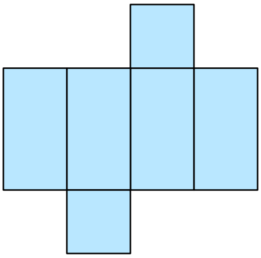
b) Hexaedro: 6 caras y 12 aristas.

002 **Realiza el desarrollo plano de los poliedros del ejercicio anterior, indicando los pasos que sigues al hacerlo.**

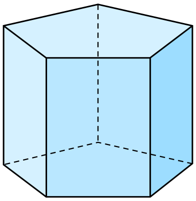
a)

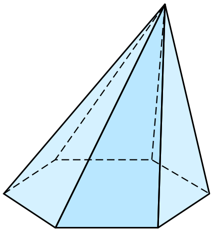


b)



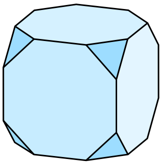
003 **Dibuja dos heptaedros que tengan distinto número de aristas y de vértices. (Fíjate en los ejemplos anteriores.)**





004 **Este poliedro es un cubo truncado (cada vértice del cubo ha sido cortado formando un triángulo equilátero).**

¿Es el poliedro cóncavo o convexo? Comprueba que se cumple la fórmula de Euler.



Es convexo. Caras = 14, aristas = 36, vértices = 24.
Sí cumple la fórmula de Euler → 14 + 24 = 36 + 2.

005 **Indica el poliedro regular que se puede formar con:**

a) Triángulos equiláteros. **b) Cuadrados.**

¿Cuántas caras coinciden en cada vértice?

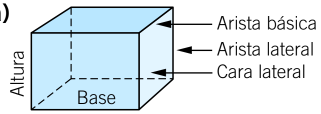
a) Tetraedro (3), octaedro (4) e icosaedro (5). b) Cubo (3).

006 **¿Podrías formar un poliedro regular utilizando solo hexágonos regulares? ¿Y utilizando polígonos regulares de más de seis lados?**

No es posible hacer poliedros regulares con polígonos de más de 6 lados, ya que la medida de los ángulos poliedros sería mayor de 360°.

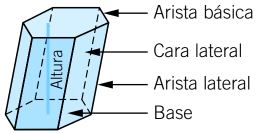
007 **Clasifica estos prismas y nombra sus principales elementos.**

a)



Ortoedro

b)

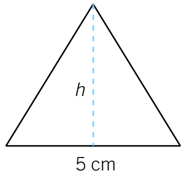


Prisma hexagonal oblicuo

008 **Obtén el área de un cubo de arista 9 cm.**

Su área es la suma del área de sus 6 caras, luego $A = 6 \cdot 9^2 = 486$ cm^2.

009 **Halla el área de un prisma triangular, es decir, la base es un triángulo equilátero, regular, de arista básica 5 cm y 16,5 cm de altura.**



Hallamos, en primer lugar, el área de la base:

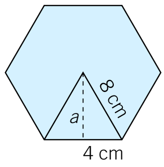
$$h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}3 \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{1}{2} b \cdot h \rightarrow A_B = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4{,}3 = 10{,}8 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 3 \cdot A_{\text{Cara}} \rightarrow A_L = 3 \cdot 5 \cdot 16{,}5 = 247{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B \rightarrow A_T = 247{,}5 + 2 \cdot 10{,}8 = 269{,}1 \text{ cm}^2$$

010 **Calcula el área de un prisma hexagonal regular de arista básica 8 cm y altura 10 cm.**



Calculamos, en primer lugar, el área de la base:

$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = 6{,}9 \text{ cm}$$

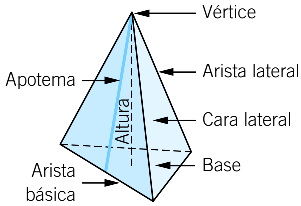
$$A_{\text{Base}} = \frac{P \cdot a}{2} \rightarrow A_{\text{Base}} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}9}{2} = 165{,}6 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 6 \cdot A_{\text{Cara}} = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B \rightarrow A_T = 480 + 2 \cdot 165{,}6 = 811{,}2 \text{ cm}^2$$

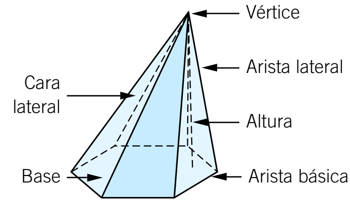
011 **Clasifica estas pirámides y nombra sus principales elementos.**

a)



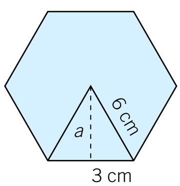
Pirámide triangular recta

b)



Pirámide hexagonal oblicua

012 **Calcula el área total de una pirámide hexagonal regular con arista básica 6 cm y apotema de sus caras laterales 12 cm.**



Hallamos el área de la base hexagonal:

$$6^2 = a^2 + 3^2 \rightarrow a = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 5{,}2 \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2} \rightarrow A_B = \frac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} b \cdot h \rightarrow A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 6 \cdot A_{\text{Cara}} \rightarrow A_L = 6 \cdot 36 = 216 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 216 + 93{,}6 = 309{,}6 \text{ cm}^2$$

013 **Con cualquier triángulo como base se puede construir una pirámide recta. ¿Es posible hacerlo con cualquier cuadrilátero?**

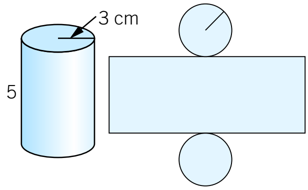
Con un triángulo sí es posible, ya que el vértice estará en la recta perpendicular al triángulo que pasa por la intersección de las mediatrices (circuncentro). Con un cuadrilátero no es posible, pues las mediatrices no tienen que cortarse necesariamente en un punto.

014 **Dibuja el desarrollo plano y calcula el área de los siguientes cuerpos de revolución.**

a) Un cilindro de 3 cm de radio de la base y 5 cm de altura.

b) Un cono de 4 cm de radio y 6 cm de generatriz.

a)

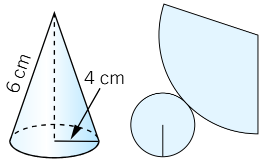


$$A_L = 2\pi rh \rightarrow A_L = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 94{,}2 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi r^2 \rightarrow A_B = \pi \cdot 3^2 = 28{,}26 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B \rightarrow$$
$$\rightarrow A_T = 94{,}2 + 2 \cdot 28{,}26 = 150{,}72 \text{ cm}^2$$

b)



$$A_L = \pi rg \rightarrow A_L = \pi \cdot 4 \cdot 6 = 75{,}36 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi r^2 \rightarrow A_B = \pi \cdot 4^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 75{,}36 + 50{,}24 =$$
$$= 125{,}6 \text{ cm}^2$$

015 **¿Qué altura tiene un cilindro de área lateral 75,36 cm² y radio de la base 4 cm?**

$$A_L = 2\pi rh \rightarrow 75{,}36 = 2\pi \cdot 4 \cdot h \rightarrow h = \frac{75{,}36}{25{,}12} = 3 \text{ cm}$$

016 **Un cono tiene la misma base que un cilindro y su área es la mitad. ¿Cuál tendrá mayor altura?**

Por tener el mismo radio y la mitad de área:

$$\pi r(h + r) = \pi r(g + r) \rightarrow h = g$$

La altura del cilindro debe ser igual que la generatriz del cono, y como la altura del cono es siempre menor que su generatriz, la altura del cilindro es mayor que la del cono.

017 **En una esfera de 20 cm de radio, calcula el área de un huso esférico de 40° y un casquete esférico de altura 10 cm.**

$$A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi r^2 \cdot n}{360} \rightarrow A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi \cdot 20^2 \cdot 40}{360} = 558{,}2 \text{ cm}^2$$

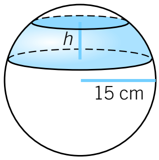
$$A_{\text{Casquete}} = 2\pi rh \longrightarrow A_{\text{Casquete}} = 2\pi \cdot 20 \cdot 10 = 1.256 \text{ cm}^2$$

018 **En una naranja de 15 cm de diámetro, ¿qué área de cáscara le corresponde a cada uno de sus 12 gajos?**

Cada gajo es un huso esférico de $\frac{360}{12} = 30°$ de amplitud.

$$A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi r^2 \cdot n}{360} \rightarrow A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 30}{360} \rightarrow A_{\text{Huso}} = 58{,}9 \text{ cm}^2$$

019 **Halla la altura de una zona esférica para que su área sea la misma que la de un huso esférico de 10° de amplitud, siendo el radio de la esfera asociada de 15 cm. ¿Y si el radio fuera de 30 cm? ¿Depende el resultado del radio de la esfera?**



$$A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi r^2 \cdot n}{360} \rightarrow A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi \cdot 15^2 \cdot 10}{360} \rightarrow A_{\text{Huso}} = 78{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Zona}} = 2\pi r^2 h \rightarrow A_{\text{Zona}} = 2\pi \cdot 15^2 \cdot h = 1.413 \cdot h$$

Por tanto: $78{,}5 = 1.413 \cdot h \rightarrow h = 0{,}06$ cm.

Si el radio es $r = 30$ cm, tenemos que:

$$A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi \cdot 30^2 \cdot 10}{360} = 314 \text{ cm}^2$$

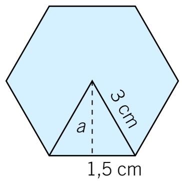
$$314 = 2\pi \cdot 30^2 \cdot h \rightarrow h = \frac{314}{5.652} = 0{,}06 \text{ cm}$$

que es la misma altura de la zona, lo que podíamos haber deducido planteando la igualdad y simplificando:

$$\frac{4\pi r^2 \cdot n}{360} = 2\pi r^2 h \rightarrow h = \frac{2 \cdot n}{360}$$

expresión en la que no interviene el radio, r.

020 **Calcula el volumen de un prisma hexagonal regular cuya arista de la base mide 3 cm y la altura 4 cm.**



Hallamos el área de la base:

$3^2 = a^2 + 1{,}5^2 \rightarrow a = \sqrt{9 - 2{,}25} = 2{,}6$ cm

$A_B = \dfrac{P \cdot a}{2} \rightarrow A_B = \dfrac{6 \cdot 3 \cdot 2{,}6}{2} = 23{,}4$ cm^2

$V = A_B \cdot h \rightarrow V = 23{,}4 \cdot 4 = 93{,}6$ cm^3

021 **Halla el volumen del cilindro circunscrito en el prisma del ejercicio anterior.**

El radio del cilindro coincide con el lado del hexágono (3 cm).

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 113{,}04$ cm^3

022 **Determina la longitud de la arista de un cubo cuyo volumen es igual al de un ortoedro de aristas 3, 4 y 5 cm, respectivamente.**

$V_{\text{Ortoedro}} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ cm^3 $\qquad V_{\text{Cubo}} = l^3 \rightarrow 60 = l^3 \rightarrow l = 3{,}91$ cm

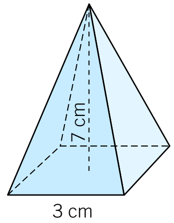
023 **Si los volúmenes de dos cilindros son iguales y sus radios son uno el doble del otro, ¿qué relación hay entre sus alturas?**

$\pi r^2 h = \pi r'^2 h' \xrightarrow{r' = 2r} \pi r^2 h = \pi \cdot 4 \cdot r^2 h' \rightarrow h = 4h'$

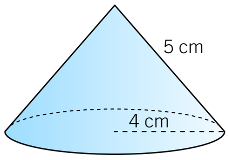
El cilindro con menor radio tiene cuádruple altura que el otro cilindro.

024 **Calcula el volumen de las siguientes figuras.**

a)



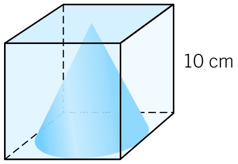
b)



a) $V = \dfrac{1}{3} A_{\text{Base}} \cdot h \rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 7 = 21$ cm^3

b) $V = \dfrac{1}{3} \pi r^2 h \rightarrow V = \dfrac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 50{,}24$ cm^3

025 **Halla el volumen comprendido entre el cubo y el cono de la figura.**



$V_{\text{Cubo}} = 10^3 = 1.000$ cm^3

$V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3} \pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 261{,}7$ cm^3

$V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Cono}} = 1.000 - 261{,}7 = 738{,}3$ cm^3

026 **Dado un cono de radio r y altura h, ¿cómo aumenta más su volumen: aumentando 1 cm el radio o al aumentar 1 cm la altura?**

Si aumentamos el radio en 1 cm:

$$V = \frac{1}{3}(\pi(r+1)^2 \cdot h) = \frac{1}{3}(\pi(r^2+2r+1)\cdot h) = \frac{1}{3}(\pi r^2 \cdot h) + \frac{1}{3}(\pi(2r+1)\cdot h)$$

El volumen aumenta en: $\frac{1}{3}(\pi(2r+1)\cdot h)$.

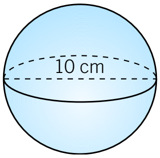
Si aumentamos la altura en 1 cm: $V = \frac{1}{3}(\pi r^2 \cdot (h+1)) = \frac{1}{3}(\pi r^2 \cdot h) + \frac{1}{3}(\pi r^2)$.

El volumen aumenta en: $\frac{1}{3}(\pi r^2)$.

$$\frac{1}{3}(\pi(2r+1)\cdot h) > \frac{1}{3}(\pi r^2) \rightarrow (2r+1)\cdot h > r^2 \rightarrow h > \frac{r^2}{2r+1}$$

Es mayor el aumento en el caso del radio cuando $h > \dfrac{r^2}{2r+1}$.

027 **Calcula el volumen de una esfera cuyo diámetro es 10 cm.**

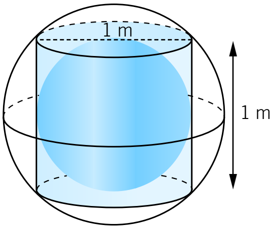


$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = 523{,}33 \text{ cm}^3$$

028 **Si el volumen de una esfera es 22 dm³, ¿cuál es su radio?**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow 22 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{22}{\frac{4}{3}\pi}} = 1{,}74 \text{ dm}$$

029 **Determina el volumen de las esferas circunscrita e inscrita en un cilindro de altura y diámetro 1 m. ¿Cuál es la diferencia entre los radios de ambas esferas?**



La esfera inscrita tiene de radio la mitad del diámetro del cilindro: 0,5 m.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}5^3 = 0{,}52 \text{ m}^3$$

El radio de la esfera circunscrita es la mitad de la diagonal del cilindro, que calculamos con el teorema de Pitágoras.

Esta diagonal mide: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ m.

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{1{,}41}{2}\right)^3 = 1{,}47 \text{ m}^3$$

La diferencia entre los radios es: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} = \dfrac{1{,}41-1}{2} = 0{,}205$ m.

030 **Busca en un atlas una ciudad que tenga latitud Norte y longitud Oeste, y otra con latitud Sur y longitud Este.**

Latitud Norte y longitud Oeste: Nueva York.

Latitud Sur y longitud Este: Sidney.

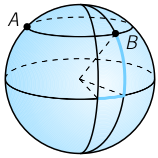
031 **Las coordenadas de la ciudad *A* son 20° E 30° N, y las de la ciudad *B* son 50° O 25° S. ¿Cuántos grados de longitud y latitud separan a las ciudades *A* y *B*?**

La diferencia en latitud es: $25° + 30° = 55°$.

La diferencia en longitud es: $20° + 50° = 70°$.

032 **Si los puntos *A* y *B* están en el mismo paralelo, ¿qué relación hay entre sus latitudes?**

¿Tendrían alguna relación si estuvieran en el mismo meridiano?

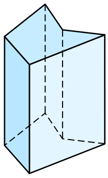


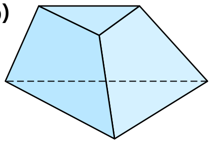
Si están en el mismo paralelo, tienen igual latitud.

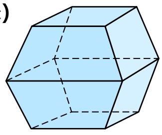
Y si están en el mismo meridiano, tienen igual longitud, pero esto no indica nada respecto a la latitud.

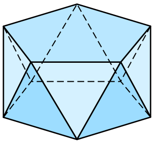
ACTIVIDADES

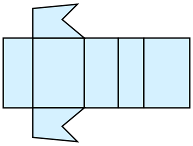
033 ●● **Dibuja el desarrollo de estos poliedros.**

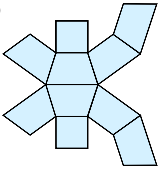
a)


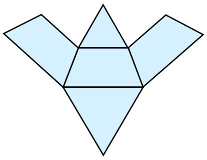
b)


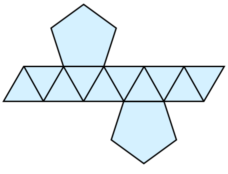
c)


d)


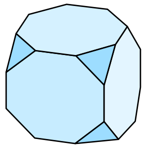
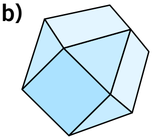
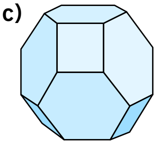
a)


c)


b)


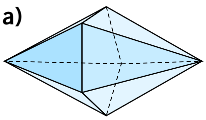
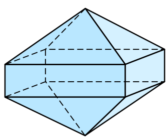
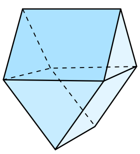
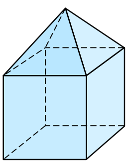
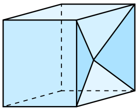
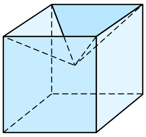
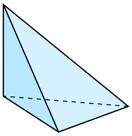
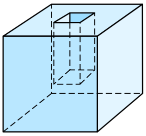
d)


034 **Los siguientes poliedros, ¿son regulares? Razona tu respuesta.**

a) 
b) 
c) 

No son regulares, al no ser sus caras iguales en forma ni en tamaño.

035 **Comprueba si estos poliedros cumplen la fórmula de Euler.**

a) 
c) 
e) 
g) 
b) 
d) 
h) 
f) 

Clasifícalos en cóncavos o convexos.

a) Caras = 10 Vértices = 7 Aristas = 15 $\rightarrow 10 + 7 = 15 + 2$
Convexo.

b) Caras = 9 Vértices = 9 Aristas = 16 $\rightarrow 9 + 9 = 16 + 2$
Cóncavo.

c) Caras = 12 Vértices = 10 Aristas = 20 $\rightarrow 12 + 10 = 20 + 2$
Convexo.

d) Caras = 9 Vértices = 9 Aristas = 16 $\rightarrow 9 + 9 = 16 + 2$
Cóncavo.

e) Caras = 8 Vértices = 8 Aristas = 14 $\rightarrow 8 + 8 = 14 + 2$
Convexo.

f) Caras = 4 Vértices = 4 Aristas = 6 $\rightarrow 4 + 4 = 6 + 2$
Convexo.

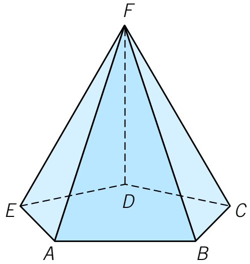
g) Caras = 9 Vértices = 9 Aristas = 16 $\rightarrow 9 + 9 = 16 + 2$
Convexo.

h) Caras = 11 Vértices = 16 Aristas = 24 $\rightarrow 11 + 16 \neq 24 + 2$
Cóncavo.

036 **En esta tabla están representados los poliedros regulares. Complétala y comprueba que todos cumplen la fórmula de Euler.**

	C	***V***	***A***	***C* + *V* − *A***
Tetraedro	4	4	6	2
Cubo	6	8	12	2
Octaedro	8	6	12	2
Dodecaedro	12	20	30	2
Icosaedro	20	12	30	2

037 **Dibuja una pirámide pentagonal. Cuenta sus aristas, vértices y caras y comprueba que se cumple la fórmula de Euler.**



Caras = 6, vértices = 6, aristas = 10.

Sí cumple la fórmula de Euler $\rightarrow$ $6 + 6 = 10 + 2$.

038 **Determina el polígono que forma la base de un prisma en cada caso.**

a) Si tiene 10 vértices.

b) Si tiene 9 aristas.

c) Si tiene 9 caras.

a) Pentágono. b) Triángulo. c) Heptágono.

039 **Averigua el polígono que forma la base de una pirámide en cada caso.**

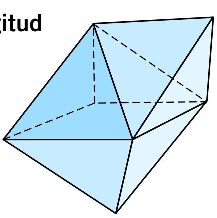
a) Si tiene 10 vértices.

b) Si tiene 12 aristas.

c) Si tiene 9 caras.

a) Eneágono. b) Hexágono. c) Octógono.

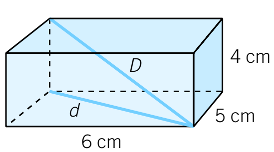
040 **Tenemos un tetraedro y un octaedro, con la misma longitud de arista, y los pegamos por una cara para formar otro poliedro. ¿Cumple este poliedro la fórmula de Euler?**



Caras = 10, vértices = 7, aristas = 15.

Sí la cumple: $10 + 7 = 15 + 2$.

041 **Las tres aristas de un ortoedro miden 5, 6 y 4 cm, respectivamente. Halla su diagonal.**



$d =$ diagonal de la base $= \sqrt{6^2 + 5^2} \rightarrow$

$\rightarrow d = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} = 7{,}8$ cm

$D =$ diagonal del ortoedro $= \sqrt{4^2 + d^2} \rightarrow$

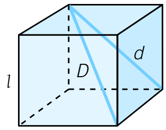
$\rightarrow D = \sqrt{16 + 61} = \sqrt{77} = 8{,}8$ cm

042 **Obtén la diagonal de un cubo cuya arista mide 3 cm.**

$d =$ diagonal de la base $= \sqrt{3^2 + 3^2}$ cm

$D =$ diagonal del cubo $= \sqrt{3^2 + (\sqrt{18})^2} = \sqrt{9 + 18} = \sqrt{27} = 5{,}2$ cm

043 ●●● **La diagonal de un cubo mide $\sqrt{27}$ m. ¿Cuánto mide su arista? ¿Y la diagonal de una cara?**

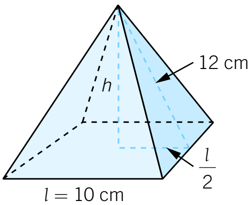


$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$

$D^2 = d^2 + l^2 = 3l^2 \rightarrow (\sqrt{27})^2 = 3l^2 \rightarrow l^2 = 9 \rightarrow l = 3$ m

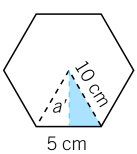
$d^2 = 2l^2 \rightarrow d = l\sqrt{2} \rightarrow d = 3\sqrt{2} = 4{,}2$ m

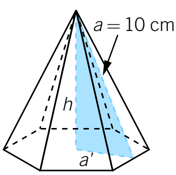
044 ● **La apotema de una pirámide cuadrangular regular mide 12 cm y su arista básica 10 cm. ¿Cuánto mide su altura?**



$$a^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow 12^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow h^2 = 144 - 25 = 119 \rightarrow h = 10{,}9 \text{ cm}$$

045 ● **La apotema de una pirámide hexagonal regular mide 10 cm y su arista básica 10 cm. ¿Cuánto medirá su altura?**





Hallamos la apotema, a', de la base:

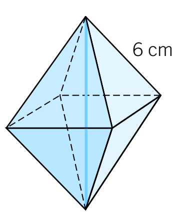
$$10^2 = a'^2 + 5^2 \rightarrow a' = \sqrt{75} \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo de color de la pirámide:

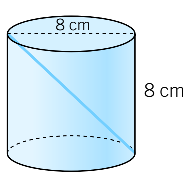
$$a^2 = h^2 + a'^2 \rightarrow 10^2 = h^2 + (\sqrt{75})^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow h^2 = 100 - 75 \rightarrow h = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

046 ●● **Halla la longitud de los segmentos marcados en los siguientes cuerpos geométricos.**

a)

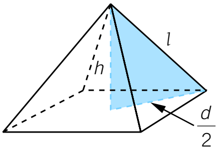


b)



a) Hallamos la diagonal de la base, que es un cuadrado de lado $l = 6$ cm.

$$d^2 = 6^2 + 6^2 = 2 \cdot 6^2 \rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo de color:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \rightarrow 6^2 = h^2 + \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow h^2 = 36 - 18 \rightarrow h = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

Luego el segmento mide $2h = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2} = 8{,}5$ cm.

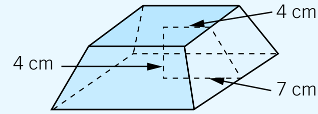
b) El segmento marcado es la diagonal de un cuadrado de lado $l = 8$ cm.

$$d = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{2 \cdot 8^2} = 8\sqrt{2} = 11{,}3 \text{ cm}$$

047 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA ALTURA DE LA CARA LATERAL DE UN TRONCO DE PIRÁMIDE?

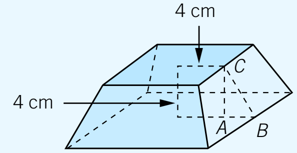
Calcula la longitud de la altura de la cara lateral de este tronco de pirámide.



Tronco de pirámide: es un poliedro con dos caras paralelas, llamadas bases, y varias caras laterales que son trapecios isósceles. Se forma al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base.

PRIMERO. Se define el triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$.

$$\overline{AB} = 7 - 4 = 3 \text{ cm}$$
$$\overline{AC} = h = 4 \text{ cm}$$

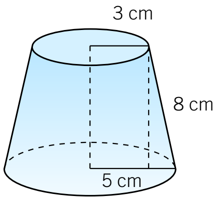


SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras.

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 \qquad \overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$$

048 ●●

Al cortar un cono por un plano paralelo a la base, se obtiene otro cono y un tronco de cono. Calcula la altura del tronco de cono.

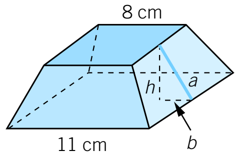


La altura es:

$$h = \sqrt{8^2 - (5-3)^2} = \sqrt{60} = 7{,}75 \text{ cm}$$

049 ●●●

Dibuja un tronco de pirámide de base cuadrada. Los lados de las bases miden 8 cm y 11 cm y la altura 4 cm. Halla la altura de la cara lateral.

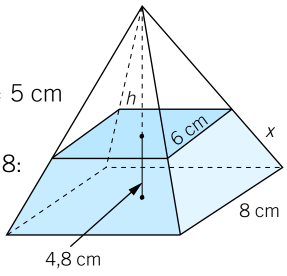


Aplicamos el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$a = \sqrt{b^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{11-8}{2}\right)^2 + 4^2} =$$
$$= \sqrt{18{,}25} = 4{,}27 \text{ cm}$$

050 ●●●

Calcula la arista lateral, *x*, del tronco de pirámide y la altura, *h*, de la pirámide.

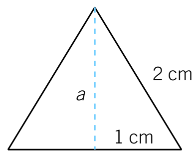


$$x = \sqrt{\left(\frac{8-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8-6}{2}\right)^2 + 4{,}8^2} = \sqrt{25{,}04} = 5 \text{ cm}$$

Por semejanza de triángulos, tomando $H = h + 4{,}8$:

$$\left.\begin{array}{l} h \longrightarrow 6 \\ h + 4{,}8 \rightarrow 8 \end{array}\right\} \rightarrow h = 14{,}4 \text{ cm} \rightarrow$$
$$\rightarrow H = 14{,}4 + 4{,}8 = 19{,}2 \text{ cm}$$

051 Calcula el área total de un prisma triangular recto de altura 3 cm y cuya base es un triángulo equilátero de 2 cm de lado.



Hallamos el área de la base:

$$2^2 = a^2 + 1^2 \rightarrow a = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}\text{ cm}$$

$$A_B = \frac{1}{2}b \cdot a \rightarrow A_B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Y calculamos el área de una cara lateral (rectángulo):

$$A_{\text{Cara}} = 2 \cdot 3 = 6\text{ cm}^2 \rightarrow A_L = 3 \cdot A_C = 3 \cdot 6 = 18\text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B \rightarrow A_T = 18 + 2\sqrt{3} = 21{,}5\text{ cm}^2$$

052 Halla el área de un ortoedro de altura 5 cm y cuya base es un rectángulo de 3 × 4 cm.

Calculamos el área de cada clase de cara lateral:

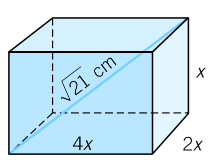
$$A_{①} = 3 \cdot 5 = 15\text{ cm}^2 \qquad A_{②} = 4 \cdot 5 = 20\text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base}} = 4 \cdot 3 = 12\text{ cm}^2$$

$$A_T = 2 \cdot A_{①} + 2 \cdot A_{②} + 2 \cdot A_{\text{Base}}$$

$$A_T = 2 \cdot 15 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 12 = 30 + 40 + 24 = 94\text{ cm}^2$$

053 El largo de un ortoedro es el doble que el ancho, y el ancho es el doble que la altura. Si su diagonal vale $\sqrt{21}$ cm, halla el área total.



Altura $= x$
Ancho $= 2x$
Largo $= 2 \cdot 2x = 4x$

La diagonal de la base, d', es:

$$d' = \sqrt{(4x)^2 + (2x)^2} = \sqrt{20x^2}\text{ cm}$$

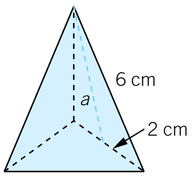
Y la diagonal del ortoedro, d, es:

$$d^2 = d'^2 + x^2 \rightarrow (\sqrt{21})^2 = (\sqrt{20x^2})^2 + x^2 \rightarrow 21 = 20x^2 + x^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 21 = 21x^2 \rightarrow x = 1\text{ cm}$$

Luego sus dimensiones son 4 cm, 2 cm y 1 cm:

$$A_T = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16 + 8 + 4 = 28\text{ cm}^2$$

054 **Determina el área total de una pirámide triangular recta con aristas laterales de 6 cm, y con base un triángulo equilátero de 4 cm de lado.**

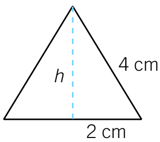


Hallamos la apotema de una cara lateral:

$$a = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2}\, b \cdot a \rightarrow A_C = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5{,}66 = 11{,}32 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 3 \cdot A_C \rightarrow A_L = 3 \cdot 11{,}32 = 34 \text{ cm}^2$$



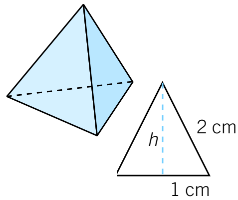
Calculamos el área de la base:

$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3{,}5 \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{1}{2}\, b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}5 = 7 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 34 + 7 = 41 \text{ cm}^2$$

055 **Obtén el área de una cara y el área total de un tetraedro regular cuya arista vale 2 cm.**



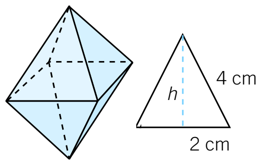
Hallamos el área de una cara:

$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2}\, b \cdot h \rightarrow A_C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_T = 4 \cdot A_C = 4\sqrt{3} = 6{,}93 \text{ cm}^2$$

056 **Calcula el área de una cara y el área total de un octaedro regular cuya arista mide 4 cm.**



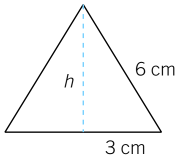
Calculamos el área de una cara:

$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{12} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_T = 8 \cdot A_{\text{Cara}} \rightarrow A_T = 8 \cdot 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3} = 55{,}4 \text{ cm}^2$$

057 **Halla el área de una cara y el área total de un icosaedro regular cuya arista es de 6 cm.**



El área total del icosaedro es: $A_T = 20 \cdot A_{\text{Cara}}$.

$$h = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} \rightarrow h = 5{,}2 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2}\, b \cdot h \rightarrow A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5{,}2 = 15{,}6 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Total}} = 20 \cdot 15{,}6 = 312 \text{ cm}^2$$

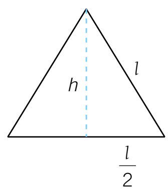
058 **Calcula la arista de:**

a) Un tetraedro de área total $16\sqrt{3}$ cm².

b) Un icosaedro cuyas caras miden $\sqrt{3}$ cm².

c) Un octaedro de área total $18\sqrt{3}$ cm².

a) $A_T = 4 \cdot A_{\text{Cara}} \rightarrow 16\sqrt{3} = 4 \cdot A_C \rightarrow A_C = 4\sqrt{3}$ cm^2



$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

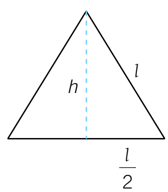
$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} l \cdot h \rightarrow A_C = \frac{1}{2} l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4\sqrt{3} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow l^2 = 16 \rightarrow l = 4 \text{ cm}$$

b) $$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} b \cdot h \rightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{2} l \cdot \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \rightarrow 2\sqrt{3} = l \cdot \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\sqrt{3} = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow l^2 = 4 \rightarrow l = 2 \text{ cm}$$

c) $A_T = 8 \cdot A_{\text{Cara}} \rightarrow 18\sqrt{3} = 8 \cdot A_C \rightarrow A_C = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2



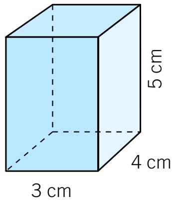
$$h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow$$

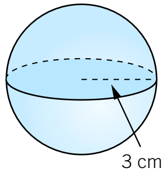
$$\rightarrow l^2 = 9 \rightarrow l = 3 \text{ cm}$$

059 **Calcula el área de los siguientes cuerpos y figuras esféricas.**

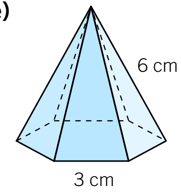
a)



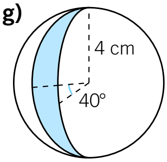
c)



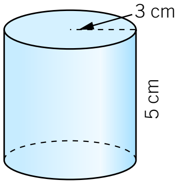
e)



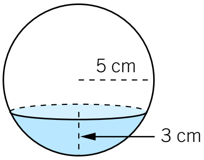
g)



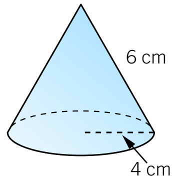
b)



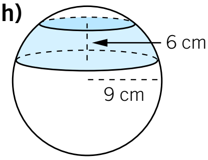
d)



f)



h)



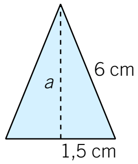
a) $A_T = 2 \cdot (3 \cdot 4) + 2 \cdot (4 \cdot 5) + 2 \cdot (3 \cdot 5) = 24 + 40 + 30 = 94$ cm^2

b) $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh \rightarrow A_T = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow$
$\rightarrow A_T = 56{,}52 + 94{,}2 = 150{,}72$ cm^2

c) $A_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2 \rightarrow A_{\text{Esfera}} = 4\pi \cdot 3^2 = 113{,}04$ cm^2

d) $A_{\text{Casquete}} = 2\pi rh \rightarrow A_{\text{Casquete}} = 2\pi \cdot 5 \cdot 3 = 94{,}2$ cm^2

e) Calculamos la apotema de una cara lateral:

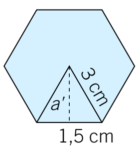


$$a = \sqrt{6^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{33{,}75} = 5{,}8 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} b \cdot a \rightarrow A_C = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5{,}8 = 8{,}7 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 6 \cdot A_C \rightarrow A_L = 6 \cdot 8{,}7 = 52{,}2 \text{ cm}^2$$

Después, determinamos el área de la base:



$$a' = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{6{,}75} = 2{,}6 \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{P \cdot a'}{2} \rightarrow A_B = \frac{6 \cdot 3 \cdot 2{,}6}{2} = 23{,}4 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 52{,}2 + 23{,}4 = 75{,}6 \text{ cm}^2$$

f) Hallamos el área lateral:
$A_L = \pi rg \rightarrow A_L = \pi \cdot 4 \cdot 6 = 75{,}36$ cm^2
$A_B = \pi r^2 \rightarrow A_B = \pi \cdot 4^2 = 50{,}24$ cm^2
$A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 75{,}36 + 50{,}24 = 125{,}6$ cm^2

g) $A_{\text{Huso}} = \dfrac{4\pi r^2 \cdot n}{360°} \rightarrow A_{\text{Huso}} = \dfrac{4\pi \cdot 4^2 \cdot 40°}{360°} = 22{,}33$ cm^2

h) $A_{\text{Zona}} = 2\pi rh \rightarrow A_{\text{Zona}} = 2\pi \cdot 9 \cdot 6 = 339{,}12$ cm^2

060 **Halla el área de:**

a) Un cubo cuya diagonal de una cara mide 10 cm.
b) Un cilindro de 20 cm de diámetro de la base y altura 12 cm.
c) Un cono de 4 cm de radio y 6 cm de altura.
d) Una esfera de 12 cm de diámetro.
e) Un huso esférico de 80° y radio 20 cm.
f) Un casquete esférico de 10 cm de radio y 9 cm de altura.
g) Una zona esférica de 8 cm de altura y 12 cm de radio.
h) Una pirámide hexagonal regular de altura 3 cm y lado de la base 3 cm.

a) $d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow 10^2 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{50}$ cm
$A_{\text{Cara}} = l^2 \rightarrow A_C = 50$ cm^2
$A_{\text{Cubo}} = 6 \cdot A_C \rightarrow A_{\text{Cubo}} = 6 \cdot 50 = 300$ cm^2

b) $A_L = 2\pi rh \rightarrow A_L = 2\pi \cdot 10 \cdot 12 = 753{,}6$ cm^2
$A_B = \pi r^2 \rightarrow A_B = \pi \cdot 10^2 = 314$ cm^2
$A_T = A_L + 2 \cdot A_B \rightarrow A_T = 753{,}6 + 2 \cdot 314 = 1.381{,}6$ cm^2

c) $A_L = \pi rg \rightarrow A_L = \pi \cdot 4 \cdot \sqrt{4^2 + 6^2} = 90{,}56 \text{ cm}^2$
$A_B = \pi r^2 \rightarrow A_B = \pi \cdot 4^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$
$A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 90{,}56 + 50{,}24 = 104{,}8 \text{ cm}^2$

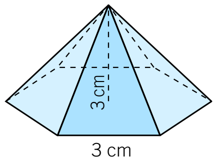
d) $A_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2 \rightarrow A_{\text{Esfera}} = 4\pi \cdot 6^2 = 452{,}2 \text{ cm}^2$

e) $A_{\text{Huso}} = \dfrac{4\pi r^2 \cdot n}{360°} \rightarrow A_{\text{Huso}} = \dfrac{4\pi \cdot 20^2 \cdot 80°}{360°} = 1.116{,}4 \text{ cm}^2$

f) $A_{\text{Casquete}} = 2\pi rh \rightarrow A_{\text{Casquete}} = 2\pi \cdot 10 \cdot 9 = 565{,}2 \text{ cm}^2$

g) $A_{\text{Zona}} = 2\pi rh \rightarrow A_{\text{Zona}} = 2\pi \cdot 12 \cdot 8 = 602{,}9 \text{ cm}^2$

h) Calculamos primero la arista lateral y la apotema de la cara lateral:



Arista $= \sqrt{3^2 + 3^2} = 4{,}24$ cm

Apotema $= \sqrt{18 - 1{,}5^2} = 3{,}97$ cm

$A_{\text{Cara}} = \dfrac{3 \cdot 3{,}97}{2} = 5{,}96 \text{ cm}^2$

$A_L = 6 \cdot 5{,}96 = 35{,}76 \text{ cm}^2$

La apotema de la base es:

$a = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2} = 2{,}6$ cm

$A_{\text{Base}} = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{18 \cdot 2{,}6}{2} = 23{,}4 \text{ cm}^2$

$A_T = 35{,}76 + 23{,}4 = 59{,}16 \text{ cm}^2$

061 **El área lateral de una pirámide recta de base cuadrada y, por tanto, regular, es 80 cm² y el perímetro de la base mide 32 cm. Calcula la apotema de la pirámide.**

$$A_L = \frac{P \cdot a}{2} \rightarrow 80 = \frac{32 \cdot a}{2} \rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

062 **Dos cilindros tienen la misma superficie lateral y sus radios miden 6 m y 8 m. Calcula su altura, sabiendo que se diferencian en 3 m. Halla también la superficie lateral y total de cada cilindro.**

$2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot (x + 3) = 2\pi \cdot 8 \cdot x \rightarrow 12{,}56x = 113{,}04 \rightarrow x = 9$ m

El cilindro de radio 6 m tiene una altura de 12 m, y el cilindro de radio 8 m tiene una altura de 9 m.

Cilindro de radio 6 m:
Área lateral $= 2\pi \cdot 6 \cdot 12 = 452{,}16 \text{ m}^2$
Área base $= \pi \cdot 6^2 = 113{,}04 \text{ m}^2$
Área total $= 452{,}16 + 2 \cdot 113{,}04 = 678{,}24 \text{ m}^2$

Cilindro de radio 8 m:
Área lateral $= 2\pi \cdot 8 \cdot 9 = 452{,}16 \text{ m}^2$
Área base $= \pi \cdot 8^2 = 200{,}96 \text{ m}^2$
Área total $= 452{,}16 + 2 \cdot 200{,}96 = 854{,}08 \text{ m}^2$

063 Un cilindro tiene una altura igual que el diámetro de la base y su área es de 470 cm². Halla el radio de la base.

Altura: $2x$, radio: x.

Área lateral $= 2x \cdot \pi \cdot x = 6{,}28x^2$

Área base $= \pi \cdot x^2 = 3{,}14x^2$

Área total $= 6{,}28x^2 + 2 \cdot 3{,}14x^2 = 12{,}56x^2 = 470 \rightarrow x = 6{,}12$ cm

064 Calcula la altura de un cilindro si el área de una de las bases es igual a la superficie lateral, y cada una de ellas mide 154 cm². Halla el área total.

Radio: x, altura: y.

Área base $= \pi \cdot x^2 = 154 \rightarrow x = 7$ cm

Área lateral $= 14 \cdot \pi \cdot y = 154 \rightarrow y = 3{,}5$ cm

Radio: 7 cm, altura: 3,5 cm.

065 Determina la superficie lateral de un cono cuya altura coincide con el diámetro de la base, si la longitud de la circunferencia de la base mide 18,85 cm.

$2\pi r = 18{,}85$ cm $\rightarrow r = 3$ cm, $h = 3 \cdot 2 = 6$ cm

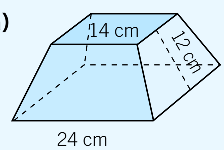
$g = \sqrt{6^2 + 3^2} = 6{,}71$ cm $\rightarrow A_L = \pi r g = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 6{,}71 = 63{,}21$ cm²

066 **HAZLO ASÍ**

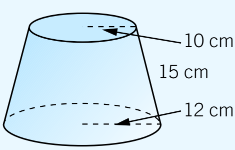
¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA LATERAL DE UN TRONCO DE PIRÁMIDE Y DE UN TRONCO DE CONO?

Calcula el área lateral de estas figuras.

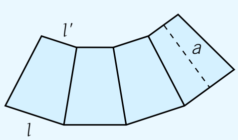
a)



b)

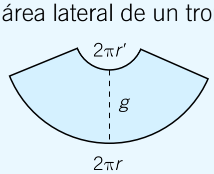


a) El área lateral de un tronco de pirámide es:



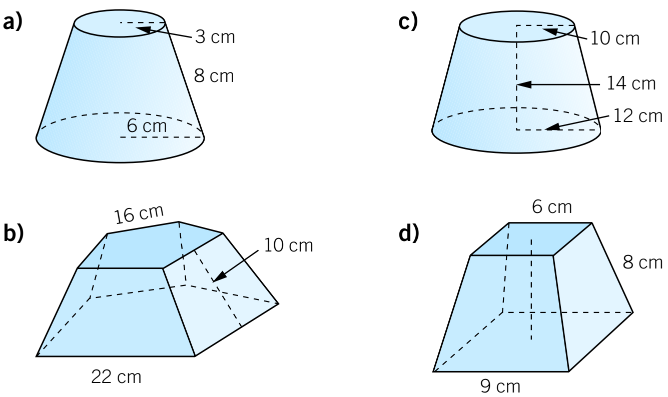
$$A_{\text{Lateral}} = \frac{n \cdot (l + l')}{2} \cdot a = \frac{4 \cdot (24 + 14)}{2} \cdot 12 = 912 \text{ cm}^2$$

b) El área lateral de un tronco de cono es:



$$A_{\text{Lateral}} = \pi(r + r')g = \pi(12 + 10) \cdot 15 = 1.036{,}2 \text{ cm}^2$$

067 Calcula el área total de estas figuras.



a) Área lateral $= \pi \cdot (6 + 3) \cdot 8 = 226{,}08$ cm^2

Área base 1 $= \pi \cdot 6^2 = 113{,}04$ cm^2

Área base 2 $= \pi \cdot 3^2 = 28{,}26$ cm^2

Área total $= 226{,}08 + 113{,}04 + 28{,}26 = 367{,}38$ cm^2

b) Área lateral $= 5 \cdot \dfrac{16 + 22}{2} \cdot 10 = 950$ cm^2

c) La generatriz es: $g = \sqrt{14^2 + 2^2} = \sqrt{200} = 14{,}14$ cm.

Área lateral $= \pi \cdot (10 + 12) \cdot 14{,}14 = 976{,}79$ cm^2

Área base 1 $= \pi \cdot 12^2 = 452{,}16$ cm^2

Área base 2 $= \pi \cdot 10^2 = 314$ cm^2

Área total $= 976{,}79 + 452{,}16 + 314 = 1.742{,}95$ cm^2

d) Área lateral $= 4 \cdot \dfrac{6 + 9}{2} \cdot 8 = 240$ cm^2

Área base 1 $= 81$ cm^2

Área base 2 $= 36$ cm^2

Área total $= 240 + 81 + 36 = 357$ cm^2

068 El radio de una esfera mide 3 cm. Calcula su área total.

$A = 4\pi \cdot 3^2 = 113{,}04$ cm^2

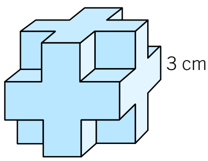
069 El círculo máximo de una esfera tiene un área de 78,54 cm^2. Determina el radio y el área total.

Círculo $= \pi \cdot x^2 = 78{,}54$ cm$^2 \rightarrow x = 5$ cm

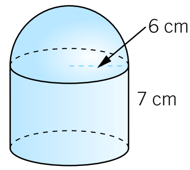
$A = 4\pi \cdot 5^2 = 314$ cm^2

070 **Obtén el área total de los siguientes cuerpos geométricos.**

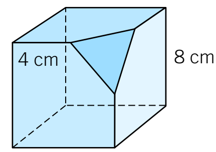
a)



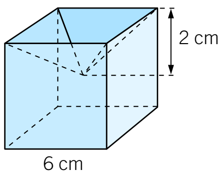
c)



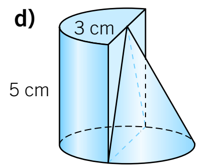
e)



b)



d)



a) Hallamos el área de un cuadrado de lado $l = 3$ cm $\rightarrow A = l^2 = 9$ cm^2.

Son 6 cruces y cada cruz consta de 5 cuadrados $\rightarrow A = 6 \cdot 5 \cdot 9 = 270$ cm^2.

Son 8 huecos y cada hueco está formado por 3 cuadrados $\rightarrow$
$\rightarrow A = 8 \cdot 3 \cdot 9 = 216$ cm^2

Luego el área total será:

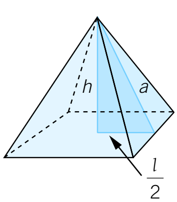
$$A_T = 270 + 216 = 486 \text{ cm}^2$$

que es igual al área de un cubo de arista: $3 \cdot 3 = 9$ cm $\rightarrow$
$\rightarrow A_{\text{Cara}} = 9^2 = 81$ cm$^2 \rightarrow A_T = 6 \cdot A_C \rightarrow A_T = 6 \cdot 81 = 486$ cm^2

b) La superficie total es la suma del área de las 5 caras del cubo y las 4 caras laterales de la pirámide.

$$A_{\text{Cubo}} = 5 \cdot 6^2 = 5 \cdot 36 = 180 \text{ cm}^2$$
$$A_{L\text{ Pirámide}} = 4 \cdot A_{\text{Cara}}$$

Para hallar el área de una cara, calculamos su apotema, a:



$$a^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \rightarrow a = 3,6 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2}\, b \cdot a \rightarrow A_C = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3,6 = 10,8 \text{ cm}^2$$

$$A_{L\text{ Pirámide}} = 4 \cdot 10,8 = 43,2 \text{ cm}^2$$

Luego $A_T = 180 + 43,2 = 223,2$ cm^2.

c) El área del cilindro es:

$$A = 2\pi rh + \pi r^2 = 2\pi \cdot 6 \cdot 7 + \pi \cdot 6^2 = 376,8 \text{ cm}^2$$

y la de la semiesfera es:

$$A = \frac{4\pi r^2}{2} \rightarrow A = 2\pi \cdot 6^2 = 226,1 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 376,8 + 226,1 = 602,9 \text{ cm}^2$$

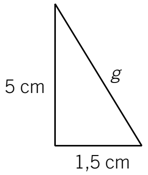
d) Hallamos el área del semicilindro:

$$A_L = \frac{2\pi rh}{2} + 2rh - rh = \pi \cdot 1{,}5 \cdot 5 + 1{,}5 \cdot 5 = 31{,}05 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Bases}} = 2 \cdot \frac{\pi r^2}{2} \rightarrow A_B = \pi \cdot 1{,}5^2 = 7{,}07 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 31{,}05 + 7{,}07 = 38{,}12 \text{ cm}^2$$

Para calcular el área del semicono, hallamos lo que mide la generatriz:



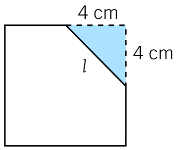
$$g = \sqrt{5^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{25 + 2{,}25} = 5{,}22 \text{ cm}$$

$$A_L = \frac{\pi rg}{2} \rightarrow A_L = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}5 \cdot 5{,}22}{2} = 12{,}29 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base}} = \frac{\pi r^2}{2} \rightarrow A_B = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}5^2}{2} = 3{,}53 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 12{,}29 + 3{,}53 = 15{,}82 \text{ cm}^2$$

e) Determinamos lo que mide el lado del triángulo de la esquina:



$$l^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \rightarrow l = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara completa}} = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$$

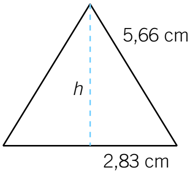
$$A_{\text{Corte}} = \frac{1}{2}\, b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Cara recortada}} = 64 - 8 = 56 \text{ cm}^2$$

El área lateral del cubo será:

$$A_L = 3 \cdot A_{\text{Cara}} + 3 \cdot A_{\text{Cara recortada}} \rightarrow A_L = 3 \cdot 64 + 3 \cdot 56 = 192 + 168 = 360 \text{ cm}^2$$

Finalmente hallamos el área del triángulo de la esquina del cubo:

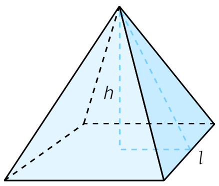


$$h = \sqrt{5{,}66^2 - 2{,}83^2} = \sqrt{24} \rightarrow h = 4{,}9 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Esquina}} = \frac{1}{2}\, l \cdot h \rightarrow A_{\text{Esquina}} = \frac{1}{2} \cdot 5{,}66 \cdot 4{,}9 = 13{,}9 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 360 + 13{,}9 = 373{,}9 \text{ cm}^2$$

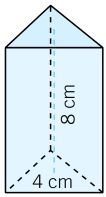
071 **Obtén el volumen de una pirámide cuadrangular recta de arista 10 cm y altura 5 cm.**

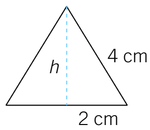


$$A_B = l^2 \rightarrow A_B = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h \rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 5 = 166{,}7 \text{ cm}^3$$

072 **Calcula el volumen de un prisma triangular recto de altura 8 cm y cuya base es un triángulo equilátero de lado 4 cm.**





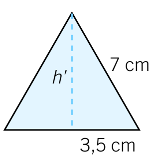
Hallamos el área de la base:

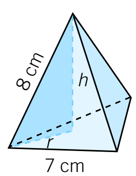
$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{1}{2} b \cdot h \rightarrow A_B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{12} = 6{,}9 \text{ cm}^2$$

$$V = A_B \cdot h \rightarrow V = 6{,}9 \cdot 8 = 55{,}2 \text{ cm}^3$$

073 **Halla el volumen de una pirámide triangular recta con aristas laterales de 8 cm, y con base, un triángulo equilátero de 7 cm de lado.**





Hallamos el área de la base:

$$h' = \sqrt{7^2 - 3{,}5^2} = \sqrt{36{,}75} = 6{,}1 \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{1}{2} b \cdot h' \rightarrow A_B = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6{,}1 = 21{,}4 \text{ cm}^2$$

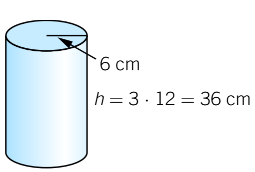
Para calcular la altura de la pirámide aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo de color, y tenemos en cuenta que, por ser equilátero, el radio es:

$$r = \frac{2}{3} h' \rightarrow r = \frac{2}{3} \cdot 6{,}1 = 4{,}1 \text{ cm}$$

$$8^2 = h^2 + r^2 \rightarrow h = \sqrt{64 - 16{,}81} = 6{,}9 \text{ cm}$$

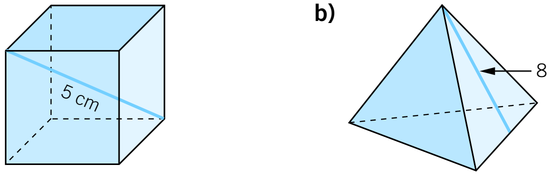
$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h \rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 21{,}4 \cdot 6{,}9 = 49{,}2 \text{ cm}^3$$

074 **Calcula el volumen de un cilindro de 12 cm de diámetro, y altura, el triple del diámetro.**



$$V = \pi r^2 h \rightarrow V = \pi \cdot 6^2 \cdot 36 = 4.069{,}4 \text{ cm}^3$$

075 Obtén el volumen de estos cuerpos geométricos.



a) La arista es: $5 = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} \rightarrow a = 2{,}89$ cm.

$V = 2{,}89^3 = 25{,}66$ cm^3

b) La arista es: $8 = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \rightarrow a = 9{,}23$ cm.

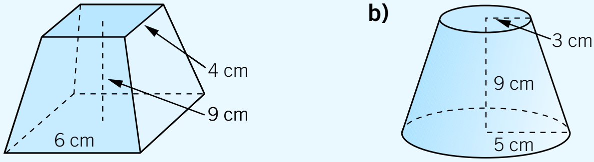
La altura es: $h = \sqrt{8^2 - \left(\dfrac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{56{,}88} = 7{,}54$ cm.

$V = 9{,}23 \cdot 8 \cdot 7{,}54 = 556{,}75$ cm^3

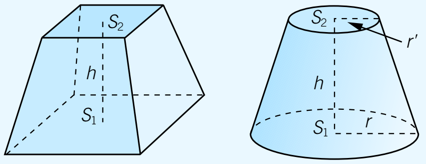
076 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL VOLUMEN DE UN TRONCO DE PIRÁMIDE Y DE UN TRONCO DE CONO?

Calcula el volumen de estas figuras.



El volumen de un tronco de pirámide o de un tronco de cono se puede calcular mediante la fórmula:



$$V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$$

a) $S_1 = 6^2 = 36$ cm^2

$S_2 = 4^2 = 16$ cm^2

$V = \dfrac{9}{3} \cdot (36 + 16 + \sqrt{36 \cdot 16}) = 228$ cm^3

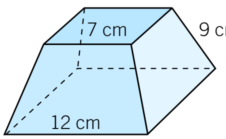
b) $S_1 = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78{,}5$ cm^2

$S_2 = \pi r'^2 = \pi \cdot 3^2 = 28{,}26$ cm^2

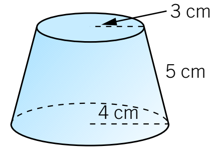
$V = \dfrac{9}{3} \cdot (78{,}5 + 28{,}26 + \sqrt{78{,}5 \cdot 28{,}26}) = 461{,}58$ cm^3

077 **Calcula el volumen de estas figuras.**

a)



b)



a) Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio, hallamos la altura de la cara lateral: $h_{\text{Cara}} = \sqrt{9^2 - \left(\dfrac{12-7}{2}\right)^2} = \sqrt{74{,}75} = 8{,}64$ cm.

Y aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras, obtenemos la altura del tronco de pirámide: $h = \sqrt{8{,}64^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{68{,}4} = 8{,}27$ cm, y el volumen es:

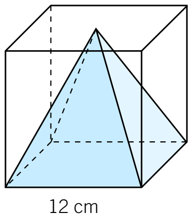
$$V = \frac{8{,}27}{3} \cdot (12^2 + 7^2 + \sqrt{12^2 \cdot 7^2}\,) = 763{,}6 \text{ cm}^3$$

b) Aplicando el teorema de Pitágoras, hallamos la altura:

$h = \sqrt{5^2 - (4-3)^2} = \sqrt{24} = 4{,}9$ cm, y el volumen es:

$$V = \frac{4{,}9}{3} \cdot (\pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 4^2 + \sqrt{\pi \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 4^2}\,) = 189{,}76 \text{ cm}^3$$

078 **En el interior de un cubo de 12 cm de arista construimos una pirámide cuya base es una cara del cubo y el vértice es el centro de la cara opuesta. Calcula el área y el volumen de esta pirámide.**



La apotema es: $a = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 13{,}42$ cm.

$$\text{Área lateral} = 4 \cdot \frac{12 \cdot 13{,}42}{2} = 322{,}08 \text{ cm}^2$$

Área base $= 12^2 = 144$ cm^2. Área total $= 144 + 322{,}08 = 366{,}08$ cm^2

$$\text{Volumen} = \frac{12^2 \cdot 12}{3} = 576 \text{ cm}^3$$

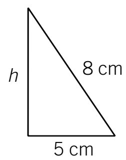
079 **Halla el volumen de un cono:**

a) De radio 5 cm y altura 8 cm.

b) De radio 5 cm y generatriz 8 cm.

a) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 8 = 209{,}3$ cm^3

b) Hallamos la altura del cono:



$h = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{64 - 25} = 6{,}24$ cm

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 6{,}24 = 163{,}28$ cm^3

080 **Obtén el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 20 cm.**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = 4.186{,}7\ \text{cm}^3$$

081 **Un cubo y una esfera tienen un área de 216 cm². ¿Cuál tiene mayor volumen?**

$$A_{\text{Cubo}} = 6 \cdot A_{\text{Cara}} = 6l^2 \rightarrow 216 = 6l^2 \rightarrow l = \sqrt{36} = 6\ \text{cm}$$

$$A_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2 \rightarrow 216 = 4\pi r^2 \rightarrow r = \sqrt{17{,}2} = 4{,}15\ \text{cm}$$

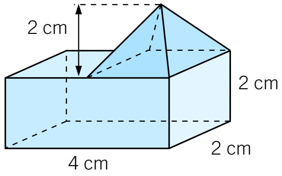
$$V_{\text{Cubo}} = l^3 \rightarrow V_{\text{Cubo}} = 6^3 = 216\ \text{cm}^3$$

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 4{,}15^3 = 299{,}2\ \text{cm}^3$$

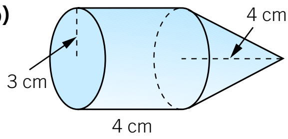
La esfera tiene mayor volumen.

082 **Obtén el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.**

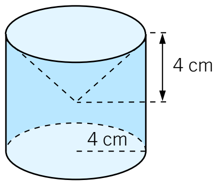
a)



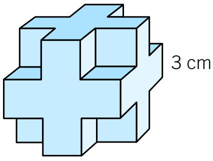
b)



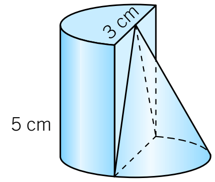
c)



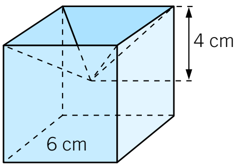
d)



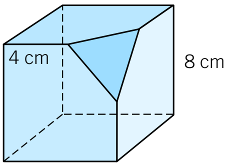
e)



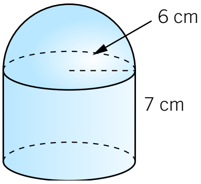
f)



g)



h)



a) $V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} A_B \cdot h \rightarrow V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{8}{3} = 2{,}7\ \text{cm}^3$

$V_{\text{Ortoedro}} = a \cdot b \cdot c \rightarrow V_{\text{Ortoedro}} = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16\ \text{cm}^3$

$V_T = V_{\text{Pirámide}} + V_{\text{Ortoedro}} = 2{,}7 + 16 = 18{,}7\ \text{cm}^3$

b) $V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\,\pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 37{,}68\ \text{cm}^3$

$V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 113{,}04\ \text{cm}^3$

$V_T = 37{,}68 + 113{,}04 = 150{,}72\ \text{cm}^3$

c) $V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 4 = 67\ \text{cm}^3$

$V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 401{,}92\ \text{cm}^3$

$V_T = V_{\text{Cilindro}} - V_{\text{Cono}} = 401{,}92 - 67 = 334{,}92\ \text{cm}^3$

d) $V_{\text{Cubo}} = l^3 \rightarrow V_{\text{Cubo}} = 9^3 = 729\ \text{cm}^3$

$V_{\text{Hueco}} = 3^3 = 27\ \text{cm}^3$

$V_T = V_{\text{Cubo}} - 8 \cdot V_{\text{Hueco}} = 729 - 8 \cdot 27 = 513\ \text{cm}^3$

e) $V_{\text{Semicilindro}} = \dfrac{1}{2}\,\pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Semicilindro}} = \dfrac{1}{2}\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 17{,}66\ \text{cm}^3$

$V_{\text{Semicono}} = \dfrac{1}{6}\,\pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Semicono}} = \dfrac{1}{6}\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 5{,}89\ \text{cm}^3$

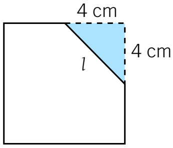
$V_T = 17{,}66 + 5{,}89 = 23{,}55\ \text{cm}^3$

f) $V_{\text{Pirámide}} = \dfrac{1}{3}\,A_B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 2 = 24\ \text{cm}^3$

$V_{\text{Cubo}} = l^3 = 6^3 = 216\ \text{cm}^3$

$V_T = V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Pirámide}} = 216 - 24 = 192\ \text{cm}^3$

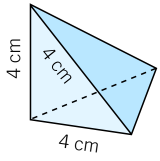
g) Hallamos el lado del triángulo equilátero:



$l^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \rightarrow l = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\ \text{cm}$

$V_{\text{Cubo}} = l^3 = 8^3 = 512\ \text{cm}^3$

Determinamos el volumen del pico que se ha biselado del cubo (es una pirámide triangular):



$A_{\text{Base}} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8\ \text{cm}^2$

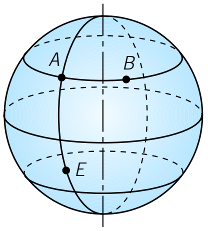
$V_{\text{Pico}} = \dfrac{1}{3}\,A_{\text{Base}} \cdot h \rightarrow V_{\text{Pico}} = \dfrac{1}{3} \cdot 8 \cdot 4 = 10{,}7\ \text{cm}^3$

h) $V_{\text{Semiesfera}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 452{,}16\ \text{cm}^3$

$V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 7 = 791{,}28\ \text{cm}^3$

$V_T = 452{,}16 + 791{,}28 = 1.243{,}44\ \text{cm}^3$

083 **Observa la situación de las ciudades *A* y *B* y contesta.**



a) La ciudad *B* está en el mismo paralelo que la ciudad *A*. ¿Cuál es la latitud de *B*? ¿Qué relación hay entre las latitudes de *A* y *B*?

b) Las ciudades *A* y *E* están en el mismo meridiano. ¿Qué relación hay entre sus longitudes?

a) Las latitudes son iguales.

b) Las longitudes son iguales.

084 **Un ascensor tiene las siguientes medidas: 100 × 100 × 250 cm. ¿Es posible introducir en él una vara metálica que mide 288 cm?**

La longitud de la mayor vara que se puede meter en el ascensor es la diagonal del mismo.

$$d = \sqrt{100^2 + 100^2 + 250^2} = \sqrt{82.500} = 287{,}22 \text{ cm} < 288 \text{ cm}$$

Por tanto, la vara no se podrá introducir en el ascensor.

085 **Queremos pintar una habitación rectangular (incluido el techo) de 4 × 6 m y 3 m de altura. Cada uno de los botes que vamos a utilizar contiene pintura suficiente para pintar 30 m².**

a) ¿Cuántos botes tendremos que comprar si nos atenemos a lo que indica el fabricante?

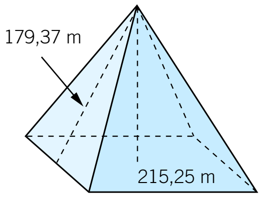
b) Si al final hemos utilizado 4 botes, ¿para cuántos metros cuadrados nos da cada bote?

El área lateral es: $(4 + 4 + 6 + 6) \cdot 3 = 60$ m^2 y el área del techo es: $6 \cdot 4 = 24$ m^2. El área total es: $60 + 24 = 84$ m^2.

a) El número de botes es: $84 : 30 = 2{,}8$, por lo que necesitamos 3 botes.

b) Si hemos gastado 4 botes completos, cada bote da para pintar $84 : 4 = 21$ m^2.

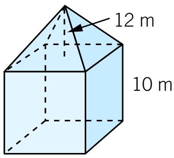
086 **La pirámide de Kefrén tiene las medidas que se reflejan en la figura. Halla la altura de la pirámide.**



Formando un triángulo rectángulo con la apotema, la altura y medio lado, la altura será:

$$h = \sqrt{179{,}37^2 - 107{,}625^2} = \sqrt{20.590{,}46} = 143{,}49 \text{ m}$$

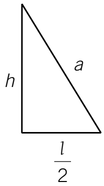
087 Calcula el área total de una torre cúbica de 10 m de arista, que tiene un tejado en forma piramidal cuya altura es 12 m.



El área lateral de la parte cúbica es:

$$A_{\text{Cubo}} = 4 \cdot 10^2 = 400 \text{ m}^2$$

Para hallar el área lateral de la pirámide, calculamos primero lo que mide la altura de una de sus caras.



$$a^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ m}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2}\, b \cdot a \rightarrow A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 65 \text{ m}^2$$

$A_{L\text{ Pirámide}} = 4 \cdot 65 = 260 \text{ m}^2$; $A_{T\text{ Pirámide}} = A_L + A_B = 400 + 260 = 660 \text{ m}^2$

$A_T = 400 + 660 = 1.060 \text{ m}^2$

088 Un cubo y una esfera tienen el mismo volumen, 125 cm³. ¿Cuál tiene menor área? Si tuvieras que construir un depósito cúbico o esférico, ¿en qué forma se necesita menos material?

$V_{\text{Cubo}} = l^3 \rightarrow 125 = l^3 \rightarrow l = 5 \text{ cm}$

$A_{\text{Cubo}} = 6 \cdot A_C = 6l^2 \rightarrow A_{\text{Cubo}} = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ cm}^2$

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow 125 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 125}{4\pi}} = 3{,}1 \text{ cm}$$

$A_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2 \rightarrow A_{\text{Esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot 3{,}1^2 = 120{,}7 \text{ cm}^2$

La esfera tiene menor área que el cubo. Por tanto, elegiría la forma esférica.

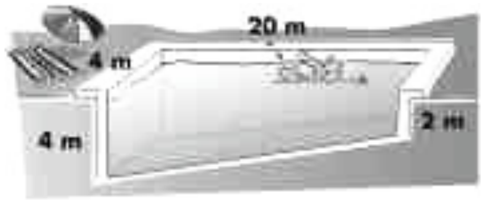
089 La Géode es un gigantesco cine con forma de esfera. Calcula su área sabiendo que su volumen es de 24.416.640 dm³.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow 24.416.640 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 24.416.640}{4\pi}} = 180 \text{ dm}$$

$A = 4\pi r^2 \rightarrow A = 4\pi \cdot 180^2 = 406.944 \text{ dm}^2$

090 ●●

Halla el volumen de esta piscina.

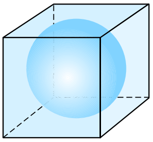


Considerando la piscina como un prisma de base trapezoidal, el área de la base es: $A_{\text{Base}} = \dfrac{4+2}{2} \cdot 20 = 60$ m^2 y el volumen es: $V = 60 \cdot 4 = 240$ m^3.

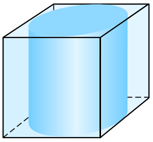
091 ●●●

En un depósito cúbico lleno de agua y de arista 3 m, introducimos los siguientes cuerpos.

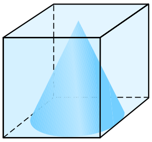
a) ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial de agua hay en el cubo después de introducir una esfera de radio 1,5 m?


3 m

b) ¿Qué porcentaje queda de la cantidad inicial de agua si introducimos un cilindro de diámetro y altura 3 m?


3 m

c) ¿Y si introducimos un cono de 3 m de diámetro e igual altura?


3 m

a) $V_{\text{Cubo}} = l^3 \rightarrow V_{\text{Cubo}} = 3^3 = 27$ m^3

$V_{\text{Esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V_{\text{Esfera}} = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1,5^3 = 14,13$ m^3

$V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Esfera}} = 27 - 14,13 = 12,87$ m^3

El tanto por ciento lo hallamos mediante una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si de } 27 \text{ m}^3 \longrightarrow 12,87 \text{ m}^3\\ \text{de } 100 \text{ m}^3 \longrightarrow x \text{ m}^3\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1.287}{27} = 47,7\,\%$$

Queda el 47,7 % del volumen inicial.

b) $V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \cdot 3 = 21,2$ m^3

$V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Cilindro}} = 27 - 21,2 = 5,8$ m^3

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si de } 27 \text{ m}^3 \longrightarrow 5,8 \text{ m}^3\\ \text{de } 100 \text{ m}^3 \longrightarrow x \text{ m}^3\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{580}{27} = 21,5\,\%$$

c) $V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \cdot 3 = 7,1$ m^3

$V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Cono}} = 27 - 7,1 = 19,9$ m^3

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si de } 27 \text{ m}^3 \longrightarrow 19,9 \text{ m}^3\\ \text{de } 100 \text{ m}^3 \longrightarrow x \text{ m}^3\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1.990}{27} = 73,7\,\%$$

092 ●●

Una empresa que vende zumo en envases con forma de ortoedro cuyas medidas son 11 × 6 × 15 cm, decide cambiar dichos envases por otros con estas características.

– Disminuye un 10 % el área de la base.

– Aumenta un 10 % la altura.

a) El volumen del nuevo envase, ¿es mayor o menor que el del antiguo?

b) Si se mantiene el mismo precio, ¿es más rentable para el cliente el nuevo envase?

c) El precio del tetrabrick es 1,40 €. ¿Cuánto gana la empresa si envasa 99.000 litros de zumo al mes? ¿Y cuánto ganaba antes?

a) $V = 11 \cdot 6 \cdot 15 = 990 \text{ cm}^3$

$A_B = 11 \cdot 6 = 66 \text{ cm}^2 \rightarrow A_B' = 0{,}9 \cdot 66 = 59{,}4 \text{ cm}^2$

$h' = 1{,}1 \cdot h \rightarrow h' = 110\,\% \cdot 15 = 16{,}5 \text{ cm}$

$V' = A_B' \cdot h' \rightarrow V' = 59{,}4 \cdot 16{,}5 = 980{,}1 \text{ cm}^3$

Luego el volumen del nuevo envase es menor que el del antiguo.

b) No, pues por el mismo precio tiene menos zumo.

c) $V' = 980{,}1 \text{ cm}^3 = 0{,}98 \text{ dm}^3 = 0{,}98\ \ell$

$99.000\ \ell : 0{,}98\ \ell = 101.020{,}4$ envases

Actualmente gana: 101.020 · 1,40 €/envase = 141.428 €.

$V = 990 \text{ cm}^3 = 0{,}99 \text{ dm}^3 = 0{,}99\ \ell$

$99.000\ \ell : 0{,}99\ \ell = 100.000$ envases

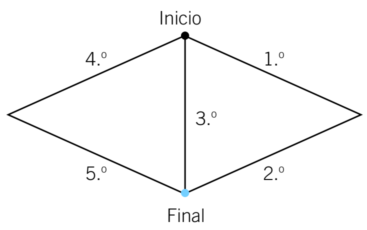
Antes ganaba: 100.000 · 1,40 €/envase = 140.000 €.

093 ●●●

Una hormiga se encuentra en un vértice de un octaedro y decide recorrer todas sus aristas sin pasar dos veces por la misma arista. Indica un camino posible.

Curiosamente, la hormiga no podría hacer lo mismo en un cubo. Compruébalo.

Si consideramos los cuatro laterales del octaedro, cada punto final es el punto inicial del siguiente lateral.

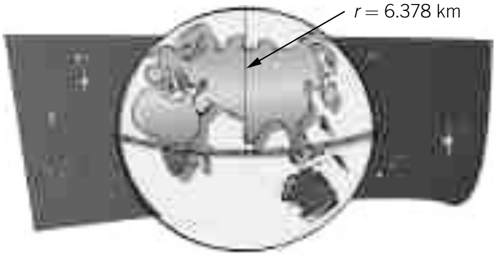


Con el cubo no se puede hacer porque cada vértice es la intersección de tres aristas (no cuatro) y, al intentar recorrerlo, la segunda vez que la hormiga llegue a un vértice no podrá salir de él.

094 **Imagina que con una cuerda rodeamos el ecuador de la Tierra.**

a) Sabiendo que el radio de la Tierra mide 6.378 km, ¿qué longitud tendrá la cuerda?

b) Con una cuerda un metro más larga hacemos una circunferencia. ¿Cuál es la diferencia entre los radios de ambas?



c) Hacemos lo mismo con una bola que tiene 18 mm de radio. ¿Cuál es ahora la diferencia entre los radios de las dos circunferencias?

a) Longitud $= 2\pi r = 2\pi \cdot 6.378 = 40.074{,}15588$ km $\rightarrow 40.074.155{,}88$ m

b) $40.074.156{,}88 = 2\pi r$

$r = 6.378.000{,}16$

$6.378.000{,}16 - 6.378.000 = 0{,}16$ m $= 16$ cm $\rightarrow$ La diferencia son 16 cm.

c) La distancia no varía, independientemente de la longitud del radio.

$$2\pi r + 1 = 2\pi(r + d) \rightarrow d = \frac{1}{2\pi} = 0{,}16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$$

095 **En el año 1638 el gran matemático Galileo propuso el siguiente problema. «Si se enrolla una hoja de papel en los dos sentidos posibles, se obtienen dos cilindros distintos».**
¿Tienen estos cilindros el mismo volumen?

Consideramos que los lados miden a y b.

El cilindro de altura a tiene de volumen:

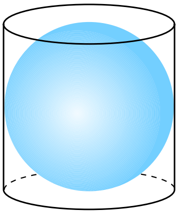
$$r = \frac{b}{2\pi} \rightarrow V = \pi r^2 a = \pi \frac{b^2}{4\pi^2} a = \frac{b^2 a}{4\pi}$$

El cilindro de altura b tiene de volumen:

$$r = \frac{a}{2\pi} \rightarrow V = \pi r^2 b = \pi \frac{a^2}{4\pi^2} b = \frac{a^2 b}{4\pi}$$

Por tanto, solo tienen el mismo volumen si la hoja es cuadrada.

096 Si tenemos una esfera inscrita en un cilindro, calcula cuál es la diferencia de volúmenes entre la esfera y el cilindro en función del radio de la esfera.



Volumen cilindro $= \pi r^2 \cdot (2r) = 2\pi r^3$

Volumen esfera $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Por tanto, el volumen de la esfera es $\dfrac{2}{3}$ del volumen del cilindro.

Su diferencia es: $\dfrac{2}{3}\pi r^3$.

097 En un libro de Matemáticas hemos encontrado este problema: «Si el lado de un octaedro es l, su volumen es: $V = l^3 \cdot 0{,}4714$». Investiga cómo se obtiene esta fórmula.

El volumen del octaedro es el de dos pirámides con base un cuadrado de lado y arista l.

La apotema lateral es: $a = \sqrt{l^2 - \left(\dfrac{l}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}l$.

La altura de la pirámide es: $h = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 - \left(\dfrac{l}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}l$.

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3}A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3}l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l = \frac{\sqrt{2}}{6}l^3$$

$$V_{\text{Octaedro}} = 2 \cdot V_{\text{Pirámide}} = \frac{\sqrt{2}}{3}l^3 = 0{,}4714l^3$$

EN LA VIDA COTIDIANA

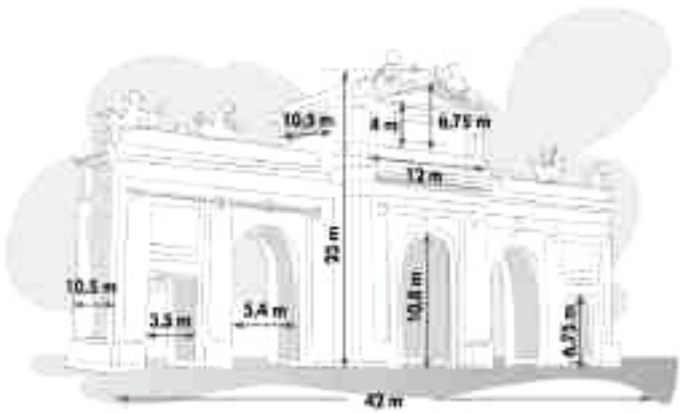
098 Christo Javacheff y su esposa Jeanne son dos de los artistas actuales más populares.

Sus obras más representativas consisten en envolver con tela objetos y monumentos.

Sus primeras obras se reducían a empaquetar botellas, latas y cajas con tela o plástico. Pero, poco a poco, fueron aumentando su producción. En 1982 rodearon 11 islas de la bahía de Florida, para lo que utilizaron 603.000 m^2 de tela rosa. En 1985 empaquetaron el Pont Neuf sobre el río Sena, en la ciudad de París. En 1995 envolvieron también en tela el inmenso edificio del Reichstag en Berlín.

Entre sus futuros proyectos están envolver la Puerta de Alcalá en Madrid y la estatua de Colón en Barcelona.

Este es un croquis de la Puerta de Alcalá de Madrid con sus medidas.



¿Cuántos metros cuadrados de tela necesitarán, aproximadamente, para envolver completamente este monumento sin tapar los arcos?

La figura está formada por un prisma rectangular principal de dimensiones $42 \times 10{,}5 \times (23 - 6{,}75)$ m, más un prisma rectangular superior de $12 \times 10{,}5 \times 4$ m, más un prisma rectangular en forma de tejado con un triángulo de base 12 m y altura: 6,75 m − 4 m y una altura del prisma de 10,5 m, menos dos prismas rectangulares de las puertas de $3{,}5 \times 10{,}5 \times 6{,}75$ m, menos el espacio de las tres puertas centrales que están formadas por un prisma rectangular de $5{,}4 \times 10{,}5 \times (10{,}8 - 2{,}7)$ m y medio cilindro de radio 2,7 m y altura 10,5 m.

$$V_{\text{Principal}} = 42 \cdot 10{,}5 \cdot 16{,}25 = 7.166{,}25 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Superior}} = 12 \cdot 10{,}5 \cdot 4 = 504 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Tejado}} = \frac{12 \cdot 2{,}75}{2} \cdot 10{,}5 = 173{,}25 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Puerta lateral}} = 3{,}5 \cdot 10{,}5 \cdot 6{,}75 = 248{,}06 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Puerta principal}} = 5{,}4 \cdot 10{,}5 \cdot 8{,}1 + \pi \cdot 2{,}7^2 = 459{,}27 + 22{,}89 = 482{,}16 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Total}} = 7.166{,}25 + 504 + 173{,}25 - 2 \cdot 248{,}06 - 3 \cdot 482{,}16 = 5.900{,}9 \text{ m}^3$$

099 ●●●

El producto más vendido de la fábrica de dulces LA GOLOSA son unas galletas circulares de 6 cm de diámetro y un grosor de 5 mm.

Las galletas se comercializan en paquetes de 40 unidades, envueltas en papel de celofán, y se venden en cajas con forma de ortoedro que contienen cuatro paquetes en cada caja.

Las cajas van recubiertas con el mismo papel de celofán que los paquetes.

La producción de galletas diaria se estima en unas 10.000 unidades, y el departamento financiero está evaluando la conveniencia de que la forma de la caja sea un ortoedro.

¿Crees que si la caja tuviera otra forma se podría aprovechar mejor el espacio? ¿Qué cantidad de cartón ahorrarían diariamente?

Un paquete tiene forma de cilindro, de 3 cm de radio y una altura de $0{,}5 \cdot 40 = 20$ cm.

El papel de celofán para un paquete es igual a su área.

$$A_{\text{Paquete}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 3(3 + 20) = 433{,}32\ \text{cm}^2$$

El área de la caja es: $A_{\text{Caja}} = 2 \cdot 12 \cdot 12 + 12 \cdot 4 \cdot 20 = 1.248\ \text{cm}^2$.

El material necesario para fabricar cada caja es:

$$A_{\text{Celofán}} = 4 \cdot 433{,}32 + 1.248 = 2.981{,}28\ \text{cm}^2$$

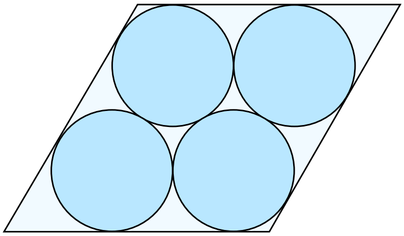
$$A_{\text{Cartón}} = 1.248\ \text{cm}^2$$

El número de cajas diarias es $10.000 : 40 = 250$, por lo que el total de material empleado es:

$$\text{Total}_{\text{Celofán}} = 250 \cdot 2.981{,}28\ \text{cm}^2 = 745.320\ \text{cm}^2 = 74{,}32\ \text{m}^2$$

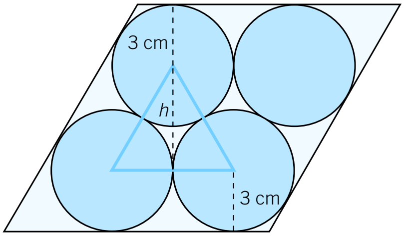
$$\text{Total}_{\text{Cartón}} = 250 \cdot 1.248\ \text{cm}^2 = 312.000\ \text{cm}^2 = 31{,}2\ \text{m}^2$$

Y colocándolas de la siguiente manera, tenemos que:



El área lateral es la misma, pero el área de la base es menor, luego se ahorra cartón.

La base del romboide es dos veces el diámetro de la galleta, 12 cm, y la altura es:



Altura $= 3 + 3 + h$, donde h es la altura de un triángulo equilátero de lado igual al diámetro de la galleta, 12 cm.

$$h = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10{,}39\ \text{cm}$$

$$h = 6 + 10{,}39 = 16{,}39\ \text{cm}$$

$$A_{\text{Base}} = 24 \cdot 16{,}39 = 393{,}36\ \text{cm}^2$$

$$\text{Ahorro}_{\text{Cartón}} = 2 \cdot (A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Romboide}}) = 2 \cdot (24^2 - 393{,}36) = 365{,}28\ \text{cm}^2$$

$$\text{Total ahorro} = 250 \cdot 365{,}28 = 91.320\ \text{cm}^2 = 9{,}132\ \text{m}^2$$

El ahorro de cartón diario sería de $9{,}132\ \text{m}^2$.