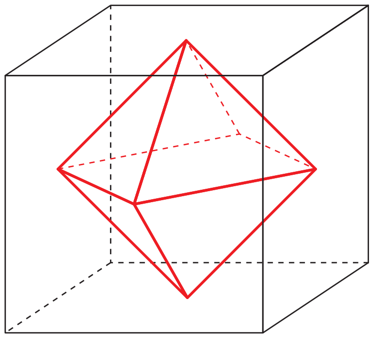
11 Soluciones a la autoevaluación

1 **Dibuja, a partir del cubo, un octaedro regular, de modo que se aprecie la dualidad entre ellos. Relaciona el número de caras, aristas y vértices de uno con el de otro.**

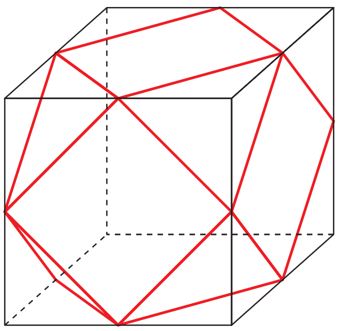


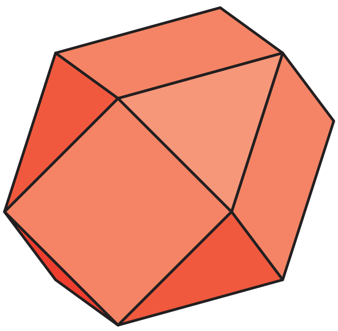
Los vértices del octaedro son los centros de las cras del cubo: así se construye la figura dual de otra. (Por lo mismo, con los centros de las cras de un octaedro construiríamos un cubo).

	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS
OCTAEDRO	8	6	12
CUBO	6	8	12

El número de caras de cada uno coincide con el número de vértices del otro. Además, los dos cuerpos geométricos tienen el mismo número de aristas.

2 **Dibuja y describe qué cuerpo geométrico se obtiene truncando un cubo mediante planos que pasen por la mitad de sus aristas. Explica por qué es un poliedro semirregular.**





En cada vértice del cubo concurren tres aristas. Por tanto, cada truncamiento produce un triángulo equilátero. Hay tantos como vértices tiene el cubo, 8.

De cada cara del cubo queda un cuadrado. Hay tantos como caras tiene el cubo, 6.

La figura geométrica que se obtiene tiene 14 caras: 8 triángulos equiláteros y 6 cuadrados. Se llama cuboctaedro.

Es un poliedro semirregular, porque sus caras son polígonos regulares de dos tipos, y en cada vértice concurren las mismas caras.

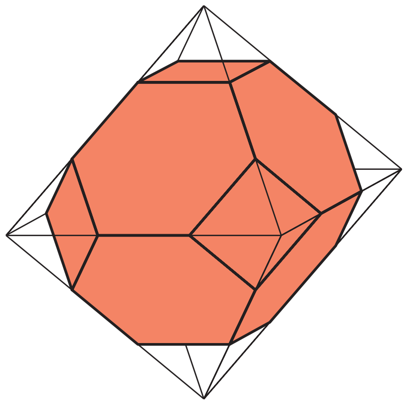
3 **Describe qué cuerpo se obtiene truncando un octaedro mediante planos que cortan las aristas a un tercio del vértice. ¿Se trata de un poliedro semirregular? Explica por qué.**

En cada vértice del octaedro concurren cuatro aristas. Por tanto, cada truncamiento produce un cuadrado. Hay tantos como vértices tiene el octaedro, 6.

De cada cara del octaedro queda un hexágono regular. Hay 8.

La figura geométrica que se obtiene tiene 14 caras: 6 cuadrados y 8 hexágonos.

Es un poliedro semirregular porque sus caras son polígonos regulares de dos tipos y en cada vértice concurren las mismas caras.

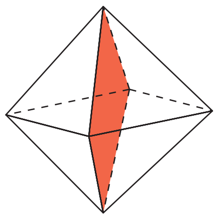


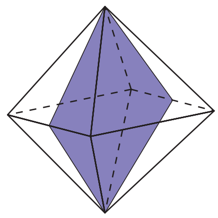
4 **Describe todos los planos de simetría del octaedro. Di también cuáles son sus ejes de giro y de qué orden es cada uno de ellos.**

PLANOS DE SIMETRÍA:

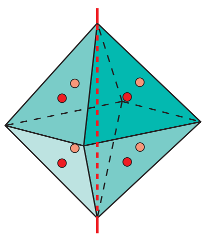
Planos que contienen cuatro vértices, hay tres.

Planos que contienen dos vértices y los puntos medios de dos aristas, hay seis.

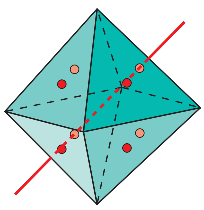




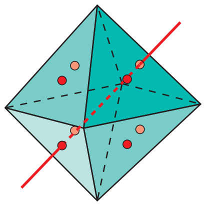
EJES DE GIRO:



Ejes de giro de orden cuatro que pasan por dos vértices opuestos. Hay 3.



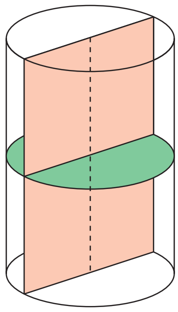
Ejes de giro de orden dos que pasan por los puntos medios de cada dos aristas opuestas. Hay 6.



Ejes de giro de orden 3 que pasan por los centros de dos caras opuestas. Hay 4.

Observa que los planos de simetría y los ejes de giro del octaedro se corresponden con los del cubo.

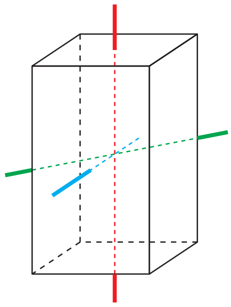
5 **Describe los planos de simetría de un cilindro.**



Cualquier plano que contenga al eje de giro del cilindro es plano de simetría. Hay infinitos.

También es plano de simetría del cilindro el que es perpendicular a su eje en su punto medio.

6 **Un prisma cuadrangular regular tiene varios ejes de giro. Di cuáles son y de qué orden es cada uno.**

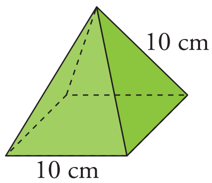


En rojo, un eje de giro de orden cuatro. Pasa por los centros de las dos bases (cuadradas) del prisma.

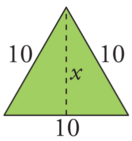
En azul, un eje de giro de orden dos. Pasa por los centro de dos caras laterales opuestas. Hay dos.

En verde, un eje de giro de orden dos. Pasa por los puntos medios de dos aristas laterales opuestas. Hay dos.

7 **Calcula el área de una pirámide de base cuadrada en la que la arista lateral y la arista de la base son iguales y miden 10 cm.**



• Área de una cara lateral:



Altura: $x^2 = 10^2 - 5^2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{75} \approx 8,66$

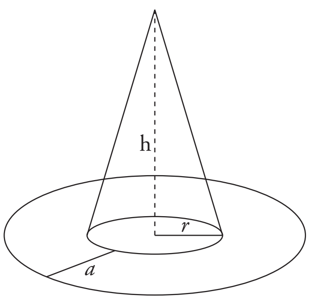
$$\text{Área} = \frac{10 \cdot 8,66}{2} = 43,3 \text{ cm}^2$$

• Área lateral = $4 \cdot 43,3 = 173,2$ cm^2

• Área base = $10^2 = 100$ cm^2

• Área total = $173,2 + 100 = 273,2$ cm^2

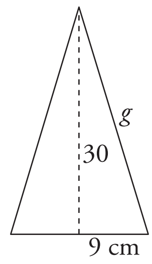
8 **Halla la cantidad de cartulina que se necesita para hacer un sombrero como el de la figura en el que $r = 9$ cm, h = 30 cm y $a = 11$ cm.**



- Generatriz del cono:

  $g^2 = 30^2 + 9^2 \;\rightarrow\; g = \sqrt{981} \approx 31{,}32$ cm

  Área lateral del cono = $\pi \cdot 9 \cdot 31{,}32 = 885{,}55$ cm^2



- Área de la corona circular de radios 9 cm y 20 cm:

  $A = \pi \cdot 20^2 - \pi \cdot 9^2 = \pi(20^2 - 9^2) = 1\,002{,}17$ cm^2

- Área total = $885{,}55 + 1\,002{,}17 = 1\,887{,}72$ cm^2

Se necesitan $1\,887{,}72$ cm^2 = $0{,}1887$ m^2 de cartulina para hacer el sombrero.

9 **En una esfera de radio 8 cm se dan dos cortes paralelos a distinto lado del centro, alejados de él 2 cm y 3 cm, respectivamente. Halla:**

a) La superficie de la zona esférica comprendida entre ambos cortes.

b) La superficie del mayor casquete esférico producido por esos cortes.

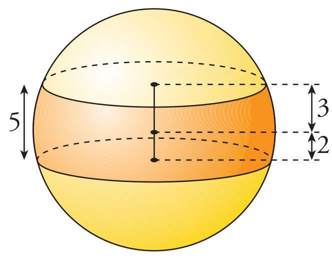
a) Área de la zona esférica:

$A = 2\pi R\text{h} = 2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 5 = 251{,}33$ cm^2

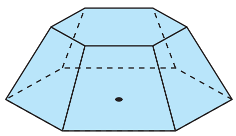
b) El mayor casquete es el que produce el corte a 2 cm del centro. Su altura es:

$$\text{h} = 8 - 2 = 6 \text{ cm}$$

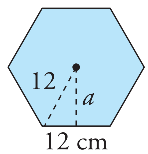
Área = $2\pi R\text{h} = 2\pi \cdot 8 \cdot 6 = 301{,}59$ cm^2



10 **Halla el área total de un tronco de pirámide hexagonal regular cuyas bases tienen 20 cm y 12 cm de lado y la arista lateral mide 15 cm.**



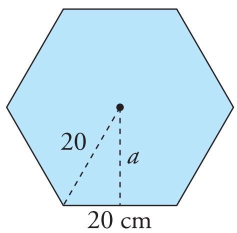
ÁREA DE LAS BASES



$a^2 = 12^2 - 6^2 \;\rightarrow\; a = \sqrt{108} \approx 10{,}39$ cm

$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} =$$

$$= \frac{6 \cdot 12 \cdot 10{,}39}{2} = 374{,}04 \text{ cm}^2$$



$a^2 = 20^2 - 10^2 \;\rightarrow\; a = \sqrt{300} \approx 17{,}32$ cm

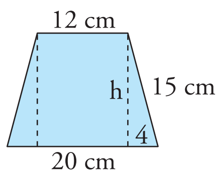
$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 20 \cdot 17{,}32}{2} = 1\,039{,}2 \text{ cm}^2$$

ÁREA LATERAL

- Altura del trapecio: $\text{h}^2 = 15^2 - 4^2 \;\rightarrow$

  $\rightarrow\; \text{h} = \sqrt{209} \approx 14{,}46$ cm

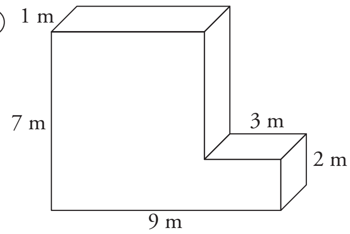
- $\text{Área} = \dfrac{(B + b) \cdot \text{h}}{2} = \dfrac{(20 + 12) \cdot 14{,}46}{2} = 231{,}36$ cm^2

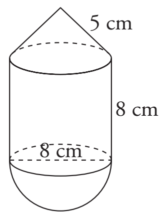


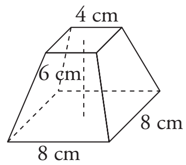
Área lateral = $6 \cdot 231{,}36 = 1\,388{,}16$ cm^2

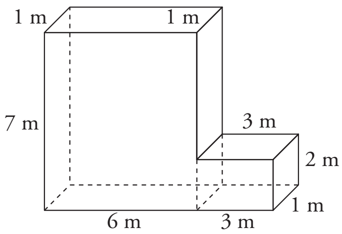
ÁREA TOTAL = $374{,}04 + 1\,039{,}2 + 1\,388{,}16 = 2\,801{,}4$ cm^2

11 **Halla el volumen de estos cuerpos:**

Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


a)


Son dos ortoedros.

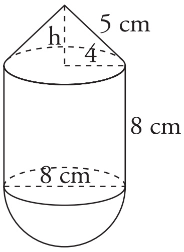
Las dimensiones del más alto son 6 m, 7 m, 1 m, y su volumen es:

$V = 6 \cdot 7 \cdot 1 = 42 \text{ m}^3$

Las dimensiones del menor son 3 m, 2 m, 1 m, y su volumen es:

$V = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ m}^3$

Volumen total $= 42 + 6 = 48 \text{ m}^3$

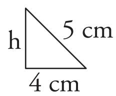
b)


- $V_{\text{CILINDRO}} = \pi R^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 \approx 402{,}13 \text{ cm}^3$
- $V_{\text{SEMIESFERA}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot 4^3 = 134{,}04 \text{ cm}^3$
- Volumen del cono:

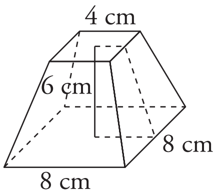
  Hallamos su altura:

  $h^2 = 5^2 - 4^2 \;\rightarrow\; h = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$

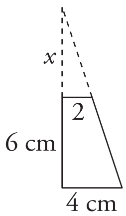
  $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 50{,}27 \text{ cm}^3$



- Volumen total $= 402{,}13 + 134{,}04 + 50{,}27 = 586{,}44 \text{ cm}^3$

c)


- Hallamos las alturas de las pirámides que forman el tronco:



$\dfrac{x}{2} = \dfrac{x + 6}{4} \;\rightarrow\; 4x = 2x + 12$

$2x = 12 \;\rightarrow\; x = 6 \text{ cm}$

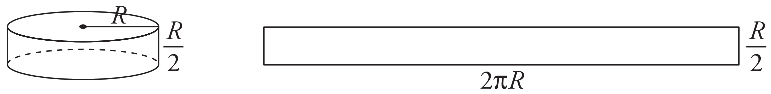
Altura pirámide menor = 6 cm

Altura pirámide mayor = 12 cm

$V_{\text{TRONCO}} = V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 12 - \dfrac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6 = \dfrac{1}{3}(8^2 \cdot 12 - 4^2 \cdot 6) = 224 \text{ cm}^3$

12 **La superficie lateral de un cilindro es de 314 cm^2 y su altura es la mitad del radio de la base. Calcula el volumen del cilindro (toma π = 3,14).**

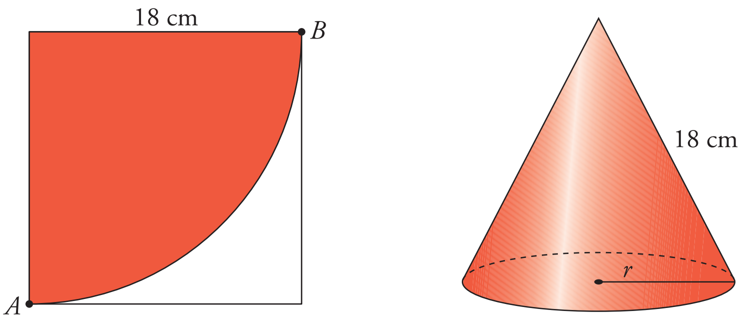


Superficie lateral = $2\pi R\text{h} = 2\pi R \cdot \dfrac{R}{2} = \pi R^2$

$\pi R^2 = 314 \quad \rightarrow \quad 3{,}14R^2 = 314 \quad \rightarrow \quad R^2 = 100 \quad \rightarrow \quad R = 10$ cm

Volumen = $\pi R^2\text{h} = \pi R^2 \cdot \dfrac{R}{2} = 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 5 = 1\,570$ cm^3

13 **De una lámina cuadrada se corta un sector circular haciendo centro en uno de sus vértices, *A*, y tomando como radio el lado del cuadrado, que es de 18 cm. Con ese sector se construye un cono. Halla el radio de su base, su altura y su volumen.**



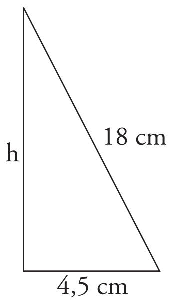
- Radio de la base:

  Hallamos la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$:

  $\dfrac{360}{90} = \dfrac{2\pi \cdot 18}{l} \quad \rightarrow \quad l = \dfrac{2\pi \cdot 18 \cdot 90}{360} = 9\pi$ es la longitud de la circunferencia básica del cono.

  $2\pi r = 9\pi \quad \rightarrow \quad r = \dfrac{9\pi}{2\pi} = 4{,}5$ cm es el radio de la base del cono.

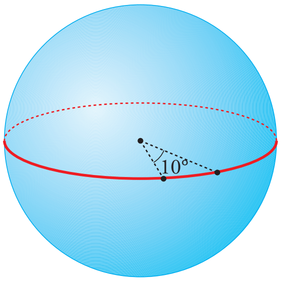
- Altura del cono:



$\text{h}^2 = 18^2 - 4{,}5^2 \quad \rightarrow \quad \text{h} = \sqrt{303{,}75} \approx 17{,}43$ cm

- Volumen del cono: $\dfrac{1}{3}\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 17{,}43 = 369{,}62$ cm^3

14 **Dos ciudades A y B están en el ecuador y sus longitudes se diferencian en 10°. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**



Radio de la tierra: 6 370 km

$$\frac{360°}{10°} = \frac{2\pi \cdot 6\,370}{l} \rightarrow l = \frac{2\pi \cdot 6\,370 \cdot 10}{360} =$$
$$= 1\,111{,}77 \text{ km}$$

La distancia entre ellas es 1 111,77 km.

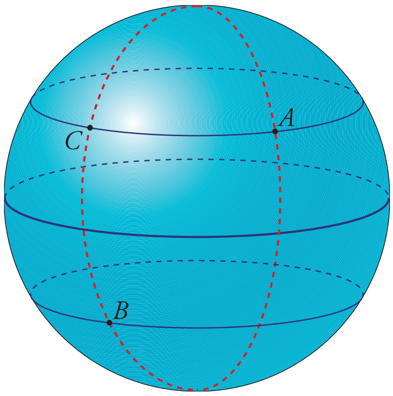
15 **Las coordenadas geográficas de tres puntos de la Tierra son:**

A: 45° N 5° E　　B: 45° S 65° O　　C: 45° N 65° O

a) ¿Cuáles están en el mismo paralelo?

b) ¿Cuáles están en el mismo meridiano?

c) ¿De qué punto está más cerca C, de A o de B?



a) A y C están en el mismo paralelo, 45° N, como indica su latitud.

b) B y C están en el mismo meridiano, 65° O, como indica su longitud.

c) La distancia entre C y A es un arco de 60° del paralelo 45°.

La distancia entre B y C es un arco de 90° del meridiano que pasa por ambos puntos.

Como la circunferencia del meridiano es mayor que la del paralelo 45°, y la amplitud de $\overset{\frown}{BC}$ es mayor que $\overset{\frown}{AC}$, la distancia de C a B es mayor que la de C a A.

16 **Las coordenadas geográficas de Melilla son 35° 17' N 2° 56' O y las de Tokio, 35° 42' N 139° 46' E.**

a) ¿Cuál es el huso horario de cada una?

b) ¿Qué hora es en Tokio cuando en Melilla son las 8 de la mañana?

a) Melilla está en el huso 0.

Como 139° = 15° · 9 + 4°, Tokio está nueve husos horarios al este, es decir, en el huso 9 E.

b) En Tokio serán 9 horas más que en Melilla, las 17 p.m., las 5 de la tarde.