2 Divisibilidad

Después del jueves…, otro jueves

En la Navidad de 1582, Gregorio XIII atendía distante a un jesuita que estaba visiblemente alterado.

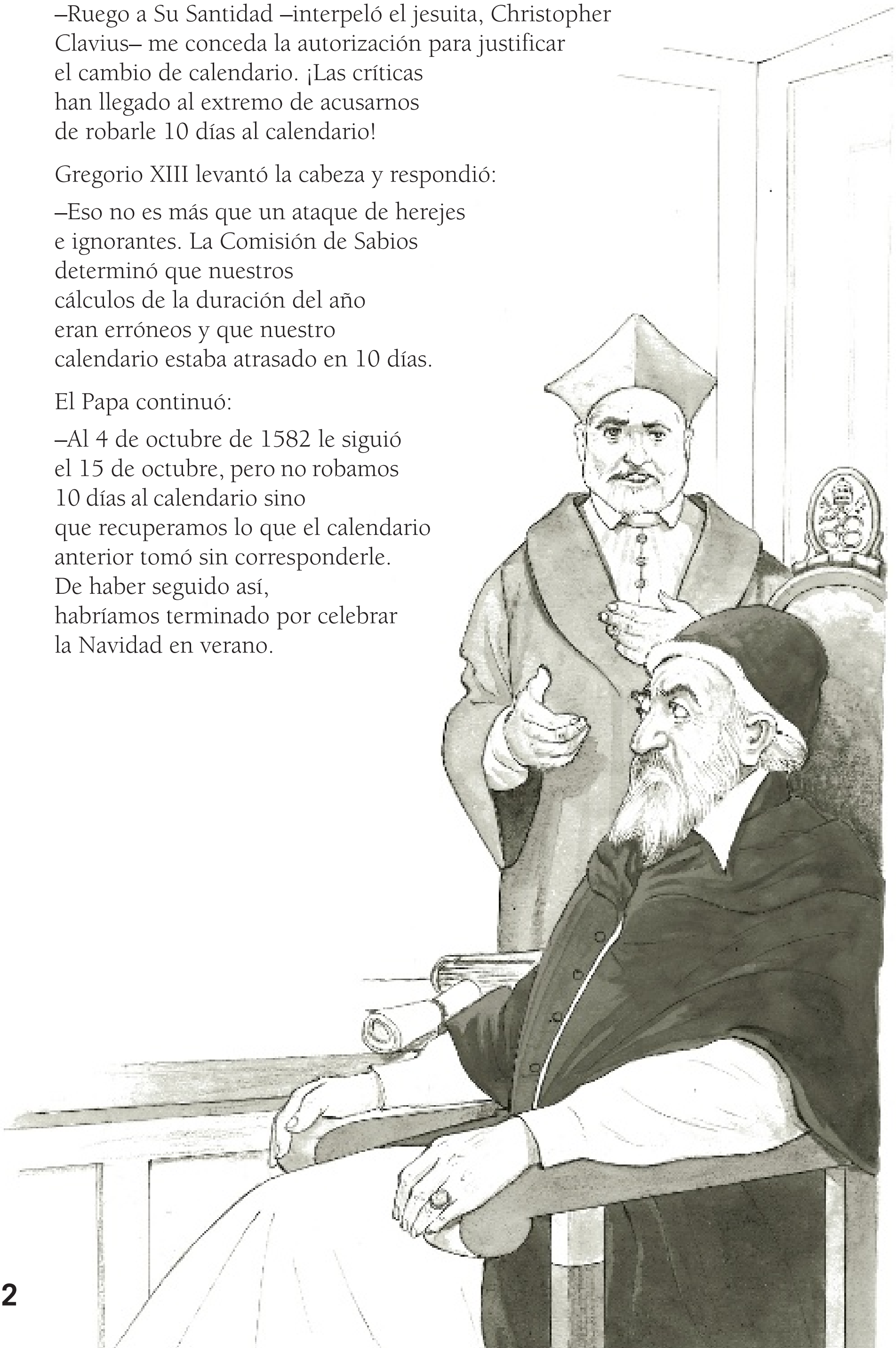
–Ruego a Su Santidad –interpeló el jesuita, Christopher Clavius– me conceda la autorización para justificar el cambio de calendario. ¡Las críticas han llegado al extremo de acusarnos de robarle 10 días al calendario!

Gregorio XIII levantó la cabeza y respondió:

–Eso no es más que un ataque de herejes e ignorantes. La Comisión de Sabios determinó que nuestros cálculos de la duración del año eran erróneos y que nuestro calendario estaba atrasado en 10 días.

El Papa continuó:

–Al 4 de octubre de 1582 le siguió el 15 de octubre, pero no robamos 10 días al calendario sino que recuperamos lo que el calendario anterior tomó sin corresponderle. De haber seguido así, habríamos terminado por celebrar la Navidad en verano.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Busca información sobre Christopher Clavius y su relación con el papa Gregorio XIII.**

Pinchando en el enlace Biografías, de la siguiente página web, podrás encontrar la biografía de Christopher Clavius: http://abalontico.matem.unam.mx/cprieto

En esta página en inglés también puedes completar la biografía de Christopher Clavius buscando por su apellido o por la fecha en que vivió:
http://www.gap-system.org/~history/BiogIndex.html

Para obtener información sobre Gregorio XIII puedes introducir su nombre en el buscador de esta página: http://www.artehistoria.jcyl.es/historia/index.html

2 **Investiga qué calendario se utilizaba hasta que se estableció el calendario actual y por qué se produjo la diferencia de 10 días al cambiarlo.**

Para ampliar la información sobre el cambio del calendario juliano al gregoriano puedes visitar esta página web:
http://www.sabercurioso.com/2007/11/14/calendario-gregoriano/

3 **Explica el criterio de divisibilidad que establece el calendario gregoriano para los años bisiestos.**

Para obtener más información sobre la regla de los años bisiestos puedes visitar esta página: http://enroquedeciencia.blogspot.com/2009/09/nueva-regla-para-los-anos-bisiestos.html

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Decide si las siguientes divisiones son exactas o no.**

a) 146 : 5 **c) 120 : 2** **e) 842 : 6** **g) 1526 : 7**
b 630 : 3 **d) 300 : 4** **f) 475 : 12** **h) 2310 : 5**

a) No exacta. c) Exacta. e) No exacta. g) Exacta.
b) Exacta. d) Exacta. f) No exacta. h) Exacta.

2 **Halla el cociente y el resto de estas divisiones. Realiza la prueba de la división de cada una de ellas.**

a) 128 : 2 **c) 720 : 5** **e) 642 : 5** **g) 1511 : 7**
b) 910 : 4 **d) 800 : 9** **f) 470 : 3** **h) 6450 : 11**

a) Cociente: 64 Resto: 0
$128 = 2 \cdot 64 + 0$

b) Cociente: 227 Resto: 2
$910 = 4 \cdot 227 + 2$

c) Cociente: 144 Resto: 0
$720 = 5 \cdot 144 + 0$

d) Cociente: 88 Resto: 8
$800 = 9 \cdot 88 + 8$

e) Cociente: 128 Resto: 2
$642 = 5 \cdot 64 + 2$

f) Cociente: 156 Resto: 2
$470 = 3 \cdot 156 + 2$

g) Cociente: 215 Resto: 6
$1511 = 7 \cdot 215 + 6$

h) Cociente: 586 Resto: 4
$6450 = 11 \cdot 586 + 4$

3 **Expresa, si se puede, en forma de potencia:**

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ **b)** $10 \cdot 10 \cdot 10$ **c)** $2 \cdot 7 \cdot 11$ **d)** $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$

a) 5^5 b) 10^3 c) No es posible. d) $3^2 \cdot 2^2$

Divisibilidad

EJERCICIOS

001 **Comprueba si entre estas parejas de números existe relación de divisibilidad.**

a) 500 y 20 **c) 252 y 18** **e) 770 y 14**
b) 350 y 23 **d) 79 y 3** **f) 117 y 12**

a) 500 es divisible por 20.
b) 350 no es divisible por 23.
c) 252 es divisible por 18.
d) 79 no es divisible por 3.
e) 770 es divisible por 14.
f) 117 no es divisible por 12.

002 **Si un número es divisible por otro, ¿cuál es el resto de la división?**

El resto de la división es cero.

003 **¿Es divisible 144 por alguno de los siguientes números?**

a) 2 **c) 6** **e) 10**
b) 3 **d) 8** **f) 144**

144 es divisible por 2, por 3, por 6, por 8 y por 144.

004 **El dividendo de una división es 196, el divisor es 16 y el cociente es 12. ¿Es divisible 196 por 16? Contesta sin realizar la operación.**

$16 \cdot 12 = 192 \neq 196$, luego no es divisible.

005 **Aplica los criterios de divisibilidad que conoces a estos números.**

a) 33 **c) 616** **e) 1 100** **g) 3 322**
b) 5 025 **d) 900** **f) 812** **h) 785**

a) 33 es divisible por 3 y 11.
b) 5 025 es divisible por 3 y 5.
c) 616 es divisible por 2.
d) 900 es divisible por 2, 3, 5 y 10.
e) 1 100 es divisible por 2, 5 y 10.
f) 812 es divisible por 2.
g) 3 322 es divisible por 2 y 11.
h) 785 es divisible por 5.

006 **Completa los siguientes números para que sean divisibles por 3.**

a) 45□ **c) 6□2** **e) 1□14**
b) □78 **d) 19□4** **f) 20□1**

a) Puede ser: 450, 453, 456, 459.
b) Puede ser: 378, 678, 978.
c) Puede ser: 612, 642, 672.
d) Puede ser: 1914, 1944, 1974.
e) Puede ser: 1314, 1614, 1914, 1014.
f) Puede ser: 2031, 2061, 2091, 2001.

007 **De los números 230, 455, 496, 520, 2 080, 2 100 y 2 745:**

a) ¿Cuáles son divisibles por 2? ¿Y por 3?

b) ¿Cuáles son divisibles por 5? ¿Y por 11?

a) Múltiplos de 2: 230, 496, 520, 2 080 y 2 100.
Múltiplos de 3: 2 100 y 2 745.

b) Múltiplos de 5: 230, 455, 520, 2 080, 2 100 y 2 745.
Ninguno es múltiplo de 11.

008 **Cualquier número divisible por 9 es divisible también por 3.**
Un número divisible por 3, ¿es divisible por 9? Pon un ejemplo.

Un número divisible por 3 no tiene necesariamente que ser divisible por 9.
Por ejemplo, 12 es divisible por 3 y no es divisible por 9.

009 **Sabiendo que un número es divisible por 4 si el número formado por las dos últimas cifras es divisible por 4, ¿son divisibles por 4 estos números?**

a) 824 **b) 1 206** **c) 180**

a) 824 es divisible por 4, porque 24 es divisible por 4.

b) 1 206 no es divisible por 4, porque 6 no es divisible por 4.

c) 180 es divisible por 4, porque 80 es divisible por 4.

010 **¿Es 35 múltiplo de 5? Razona la respuesta.**

Sí es múltiplo, porque la división 35 : 5 es una división exacta.

011 **¿Es 48 múltiplo de 6? Razona la respuesta.**

Sí es múltiplo, porque la división 48 : 6 es una división exacta.

012 **Completa los diez primeros múltiplos de 8.**

8, 16, □, 32, □, □, □, □, □, 80

8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80

013 **Si 18 es múltiplo de 9, ¿18 · 4 es múltiplo de 9? ¿Es 18 múltiplo de 9 · 4? Compruébalo.**

Como $18 = 9 \cdot 2$, $18 \cdot 4 = 9 \cdot 2 \cdot 4 = 9 \cdot 8$, luego $18 \cdot 4$ es múltiplo de 9.
18 no es múltiplo de $9 \cdot 4$, porque 18 : 36 no es una división exacta.

014 **Halla un número entre 273 y 339 que sea múltiplo de 34.**

$34 \cdot 10 = 340$, que es mayor que 339, luego $34 \cdot (10 - 1) = 34 \cdot 9 = 306$ es un múltiplo de 34 y está entre 273 y 339.

Divisibilidad

015 **¿Cuáles son divisores de 36?**

2 7 12 36 15 20 1 4 40 9

Son divisores de 36: 2, 12, 36, 1, 4 y 9.

016 **Calcula todos los divisores de:**

a) 30 **d) 55** **g) 90**
b) 27 **e) 100** **h) 79**
c) 45 **f) 89** **i) 110**

a) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30
b) 1, 3, 9 y 27
c) 1, 3, 5, 9, 15 y 45
d) 1, 5, 11 y 55
e) 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100
f) 1 y 89
g) 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 y 90
h) 1 y 79
i) 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55 y 110

017 **Di si es cierto o no.**

a) 12 es divisor de 3. **b) 12 es múltiplo de 3.**

a) Falso, porque 3 : 12 no es una división exacta.
b) Cierto, $12 = 3 \cdot 4$ es múltiplo de 3.

018 **Si 45 es múltiplo de 9, ¿es cierto lo siguiente?**

a) 45 es divisor de 9. **c) 9 es divisor de 45.**
b) 45 es divisible por 9. **d) 9 es múltiplo de 45.**

a) Falsa. b) Cierta. c) Cierta. d) Falsa.

019 **¿Es 101 un número primo? ¿Por qué?**

Es primo, porque sus únicos divisores son él mismo y la unidad.

020 **Calcula todos los números primos comprendidos entre 100 y 150.**

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139 y 149

021 **Descompón los números 8, 20, 45, 70 y 100 en producto de:**

a) Dos factores. **b) Tres factores.** **c) Cuatro factores.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $8 = 2 \cdot 4$; $20 = 4 \cdot 5$; $45 = 5 \cdot 9$; $70 = 7 \cdot 10$; $100 = 10 \cdot 10$
b) $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$; $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$; $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$; $70 = 7 \cdot 2 \cdot 5$; $100 = 4 \cdot 5 \cdot 5$
c) $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$; $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1$; $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1$; $70 = 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1$; $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

022 **Descompón en producto de factores primos los siguientes números.**

a) 36 **c) 24** **e) 180**
b) 100 **d) 98** **f) 120**

a) $36 = 2^2 \cdot 3^2$
b) $100 = 2^2 \cdot 5^2$
c) $24 = 2^3 \cdot 3$
d) $98 = 2 \cdot 7^2$
e) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
f) $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

023 **Descompón en producto de factores primos y escribe cómo son estos números.**

a) 13 **c) 29**
b) 61 **d) 97**

a) $13 = 1 \cdot 13$
b) $61 = 1 \cdot 61$
c) $29 = 1 \cdot 29$
d) $97 = 1 \cdot 97$

Todos estos números son primos.

024 **Completa para que se cumplan las igualdades.**

a) $2^3 \cdot 3^2 \cdot \square = 360$ **b)** $\square^2 \cdot 7^2 \cdot 11 = 4\,851$

a) 5
b) 3

025 **La descomposición en factores primos de un número es $2 \cdot 3 \cdot 5$. ¿Cuál sería la factorización si lo multiplicamos por 6? ¿Y si lo multiplicamos por 10? ¿Y por 15?**

Multiplicamos por 6: $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
Multiplicamos por 10: $2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$
Multiplicamos por 15: $3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

026 **Calcula el máximo común divisor de cada pareja de números.**

a) 42 y 21 **c) 13 y 90** **e) 60 y 24**
b) 24 y 102 **d) 12 y 35** **f) 72 y 11**

a) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ $21 = 3 \cdot 7$ m.c.d. $(42, 21) = 3 \cdot 7 = 21$
b) $24 = 2^3 \cdot 3$ $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ m.c.d. $(24, 102) = 2 \cdot 3 = 6$
c) $13 = 13$ $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ m.c.d. $(13, 90) = 1$
d) $12 = 2^2 \cdot 3$ $35 = 5 \cdot 7$ m.c.d. $(12, 35) = 1$
e) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $24 = 2^3 \cdot 3$ m.c.d. $(60, 24) = 2^2 \cdot 3 = 12$
f) $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $11 = 11$ m.c.d. $(72, 11) = 1$

027 **Halla el máximo común divisor de 18, 30 y 54.**

$18 = 2 \cdot 3^2$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $54 = 2 \cdot 3^3$; m.c.d. $(18, 30, 54) = 2 \cdot 3 = 6$

028 **Calcula *x*, sabiendo que m.c.d. (*x*, 28) = 14. ¿Es única la solución?**

m.c.d. (x, 28) = 14 → Como $14 = 7 \cdot 2$ y $28 = 7 \cdot 2^2$, $x = 7 \cdot 2 \cdot n$, siendo n cualquier número natural que no sea par, porque si no el máximo común divisor sería 28. Por tanto, hay infinitas soluciones.

029 **Halla el m.c.m. (12, 18), calculando sus múltiplos.**

Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, …

Múltiplos de 18: 18, 36, 54, 72, …

m.c.m. (12, 18) = 36

030 **Determina el mínimo común múltiplo de estas parejas de números.**

a) 5 y 12 **b) 6 y 14**

a) $5 = 5$ $\quad 12 = 2^2 \cdot 3$ $\quad$ m.c.m. (5, 12) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

b) $6 = 2 \cdot 3$ $\quad 14 = 2 \cdot 7$ $\quad$ m.c.m. (6, 14) $= 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

031 **Halla el mínimo común múltiplo de 15, 25 y 9.**

$15 = 3 \cdot 5$ $\quad 25 = 5^2$ $\quad 9 = 3^2$ $\quad$ m.c.m. (15, 25, 9) $= 3^2 \cdot 5^2 = 225$

032 **¿Qué valores tendrá *x* si m.c.m. (*x*, 8) = 40? ¿Es única la solución?**

$40 = 2^3 \cdot 5$, $8 = 2^3$. Los valores que puede tomar x son $2^n \cdot 5$, siendo n un número entero comprendido entre 0 y 3.

Por tanto, x puede ser 5, 10, 20 o 40.

ACTIVIDADES

033 **¿Es divisible por 7 el número 1 547?**

Sí, porque la división 1 547 : 7 = 221 es exacta.

034 **¿Es divisible por 9 el número 3 726?**

Sí, porque la división 3 726 : 9 = 414 es exacta.

035 **¿Es divisible por 10 el número 4 580?**

Sí, porque la división 4 580 : 10 = 458 es exacta.

036 **Comprueba si entre las siguientes parejas de números existe relación de divisibilidad.**

a) 476 y 16 **c) 147 y 17** **e) 322 y 18**

b) 182 y 19 **d) 288 y 24** **f) 133 y 19**

a) $476 : 16 \rightarrow c = 29$ $r = 12 \rightarrow$ No existe relación de divisibilidad.
b) $182 : 19 \rightarrow c = 9$ $r = 11 \rightarrow$ No existe relación de divisibilidad.
c) $147 : 17 \rightarrow c = 8$ $r = 11 \rightarrow$ No existe relación de divisibilidad.
d) $288 : 24 \rightarrow c = 12$ $r = 0 \rightarrow$ Sí existe relación de divisibilidad.
e) $322 : 18 \rightarrow c = 17$ $r = 16 \rightarrow$ No existe relación de divisibilidad.
f) $133 : 19 \rightarrow c = 7$ $r = 0 \rightarrow$ Sí existe relación de divisibilidad.

037 **El dividendo de una división es 214, el divisor es 21 y el cociente es 10. ¿Es divisible 214 por 21?**

$21 \cdot 10 = 210 \neq 214$, luego 214 no es divisible por 21.

038 **El número 186 es divisible por 31. Comprueba si 2 · 186 y 3 · 186 son también divisibles por 31.**

$2 \cdot 186 = 372$ $372 : 31 = 12$ (división exacta)
$3 \cdot 186 = 558$ $558 : 31 = 18$ (división exacta)
Son también divisibles por 31.

039 **Averigua cuáles de los siguientes números son divisibles por 2, 3, 5, 10 y 11.**

a) 258 **b) 1 176** **c) 2 420** **d) 55 030**

a) Divisible por 2 y 3.
b) Divisible por 2 y 3.
c) Divisible por 2, 5, 10 y 11.
d) Divisible por 2, 5 y 10.

040 **Calcula el menor número que debemos sumar a 3 456 para obtener un múltiplo de 11.**

La suma de las cifras pares es $3 + 5 = 8$, y la suma de las impares, $4 + 6 = 10$, siendo la diferencia 2, por lo que hay que sumarle 9 para que dé 11. $3456 + 9 = 3465$, que es divisible por 11.

041 **El número 6 345 no es divisible por 11. Intercambia sus cifras para que lo sea.**

3 465, 3 564, 4 356, 4 653, 5 346, 5 643, 6 435 y 6 534

042

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UNA CIFRA PARA QUE UN NÚMERO SEA DIVISIBLE POR OTRO?

¿Cuánto debe valer *a* para que el número 3*a*2 sea múltiplo de 3?

PRIMERO. Se aplica el criterio de divisibilidad. En este caso, la suma de las cifras del número debe ser un múltiplo de 3.

$$3 + a + 2 = 5 + a$$

La suma $5 + a$ tiene que ser múltiplo de 3.

SEGUNDO. Se tantean los valores de *a* para que se cumpla el criterio de divisibilidad. Los valores que puede tomar *a* son:

- $a = 1$, ya que $5 + 1 = 6$.
- $a = 4$, ya que $5 + 4 = 9$.
- $a = 7$, ya que $5 + 7 = 12$.

043 ¿Cuánto debe valer *a* para que el número 3*a*2 sea múltiplo de 2?

Puede tener cualquier valor, porque el número acaba en 2 y ya es múltiplo de 2.

044 ¿Cuánto debe valer *a* para que el número 3*a*2 sea múltiplo de 5?

El número 3*a*2 no puede ser múltiplo de 5 porque termina en 2.

045 ¿Cuánto debe valer *a* para que el número 3*a*2 sea múltiplo de 7?

El valor de *a* es 2 o 9.

046 **Completa los siguientes números, para que:**

a) 35□ sea divisible por 2.
b) □31 sea divisible por 3.
c) 84□ sea divisible por 5.

a) La última cifra puede ser cualquier número par: 0, 2, 4, 6 u 8.
b) La primera cifra puede ser $2 + 3 \cdot n$, es decir, 2, 5 u 8.
c) La última cifra puede ser: 0 o 5.

047 **Calcula cuánto ha de valer *n* para que:**

a) *n*05 sea divisible por 3 y por 5.
b) 5*n*8 sea divisible por 2 y por 3.
c) *n*30 sea divisible por 2, por 3 y por 5.

a) El valor de *n* puede ser: 1, 4 o 7.
b) El valor de *n* puede ser: 2, 5 u 8.
c) El valor de *n* puede ser: 3, 6 o 9.

048 **HAZLO ASÍ**

¿CUÁLES SON LOS CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD DE ALGUNOS NÚMEROS COMPUESTOS?

¿Es divisible por 15 el número 8 085?

PRIMERO. Se expresa 15 como producto de factores primos.

$$15 = 3 \cdot 5$$

Para que un número sea divisible por 15, tiene que serlo por 3 y por 5.

SEGUNDO. Se estudia si el número es divisible por sus factores primos.

$$8 + 0 + 8 + 5 = 21 \quad \rightarrow \quad \text{Múltiplo de 3}$$

También es divisible por 5, porque termina en 5.

El número 8085 es divisible por 3 y por 5, y por tanto, también por 15.

049 **¿Es divisible por 15 el número 4 920?**

El número 4 920 es divisible por 3 y por 5, luego es divisible por 15.

050 **Sin efectuar la división, di cuál de los números es divisible por 6.**

824 413 1 206 3 714

$6 = 2 \cdot 3$, luego un número es divisible por 6 si lo es por 2 y por 3.
Son divisibles por 6: 1 206 y 3 714.

051 **Sin hacer las divisiones, averigua cuáles de los siguientes números son divisibles por 6 y por 9.**

a) 7 200 **b) 2 100** **c) 1 089**

a) Es divisible por 6 porque es divisible por 2 (termina en 0) y por 3 $(7 + 2 + 0 + 0 = 9)$, y es divisible por 9 porque la suma de sus cifras es 9, que es múltiplo de 9.

b) Es divisible por 6 porque es divisible por 2 (termina en 0) y por 3 $(2 + 1 + 0 + 0 = 3)$, y no es divisible por 9 porque la suma de sus cifras es 3, que no es múltiplo de 9.

c) No es divisible por 6 porque no es divisible por 2 (termina en 9), y es divisible por 9 porque la suma de sus cifras es 18, que es múltiplo de 9.

052 **Halla con la calculadora los diez primeros múltiplos de 11 y los ocho primeros múltiplos de 12.**

Múltiplos de 11: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 y 110.
Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 y 96.

053 **Contesta si es verdadero o falso, y razona las respuestas.**

a) 35 es múltiplo de 5.
b) 49 es múltiplo de 6.
c) 56 es múltiplo de 8.
d) 72 es múltiplo de 9.

a) Verdadero, porque $35 = 5 \cdot 7$.
b) Falso.
c) Verdadero, porque $56 = 7 \cdot 8$.
d) Verdadero, porque $72 = 8 \cdot 9$.

054 **¿Cuál de estas series está formada por múltiplos de 4? ¿Y por múltiplos de 5?**

a) 1, 4, 9, 16, 25 ...
b) 5, 10, 15, 20 ...
c) 8, 10, 12, 14, 16 ...
d) 4, 8, 16, 24, 32, 40 ...
e) 1, 5, 10, 20, 30 ...
f) 20, 40, 60, 80 ...

Múltiplos de 4: las series d) y f), y múltiplos de 5: las series b) y f).

055 **Halla los múltiplos de 4 menores que 50.**

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44 y 48

056 **¿Cuáles son los múltiplos comunes de 5 y 8 y menores que 50?**

Múltiplos de 5 menores que 50: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 y 45.
Múltiplos de 8 menores que 50: 8, 16, 24, 32, 40 y 48.
El único múltiplo común de 5 y 8 menor que 50 es 40.

057 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UN MÚLTIPLO DE UN NÚMERO COMPRENDIDO ENTRE OTROS DOS NÚMEROS?

Encuentra un múltiplo de 26 que esté comprendido entre 660 y 700.

PRIMERO. Se divide el menor de los dos números, 660, entre el número del que se quiere hallar el múltiplo, 26.

$$\begin{array}{r|l} 660 & 26 \\ \hline 10 & 25 \end{array}$$

SEGUNDO. Se aumenta en una unidad el cociente, y se multiplica por el número del que se quiere obtener el múltiplo.

$$\text{MÚLTIPLO} = (25 + 1) \cdot 26 = 676$$

Se comprueba que el número obtenido cumple la condición pedida: el número 676 es múltiplo de 26 y está comprendido entre 660 y 700.

058 **Determina un número entre 235 y 289 que sea múltiplo de 29.**

$235 : 29 \rightarrow$ Cociente $= 8$ $(8 + 1) \cdot 29 = 261$ es el múltiplo buscado.

059 **Halla los múltiplos de 11 comprendidos entre 40 y 100.**

Múltiplos de 11: 44, 55, 66, 77, 88 y 99.

060 **Calcula cuatro números que sean múltiplos de 7 y que estén comprendidos entre 60 y 110.**

Múltiplos de 7: 63, 70, 77, 84, 91, 98 y 105.

061 **Escribe el primer múltiplo de 32 que sea mayor que 2000.**

$2000 : 32 \rightarrow$ Cociente $= 62$
$(62 + 1) \cdot 32 = 2016$ es el primer múltiplo mayor que 2000.

062 **¿Qué número comprendido entre 100 y 200 es múltiplo de 5 y la suma de sus cifras es igual a 6?**

Los múltiplos de 5 comprendidos entre 100 y 200 y cuya suma de sus cifras es igual a 6 son 105 y 150.

063 Pon varios ejemplos de múltiplos de 9.

a) ¿Son todos múltiplos de 3?

b) ¿Y todos los múltiplos de 3 son múltiplos de 9?

Razona las respuestas.

a) Múltiplos de 9: 9, 18, 27, 36, 45… Todos son múltiplos de 3.

b) Todos los múltiplos de 3 no son necesariamente múltiplos de 9; por ejemplo, 3 y 6 son múltiplos de 3 y no son múltiplos de 9.

064 **¿Todos los múltiplos de 15 son múltiplos de 3? Razona la respuesta.**

Sí, todos los múltiplos de 15 son múltiplos de 3, porque $15 = 3 \cdot 5$.

065 **Encuentra el menor y el mayor número de tres cifras que sea múltiplo de:**

a) 2 y 3 **b) 2 y 5** **c) 3 y 5** **d) 3 y 7**

a) Menor múltiplo 102 y mayor 996.

b) Menor múltiplo 100 y mayor 990.

c) Menor múltiplo 105 y mayor 990.

d) Menor múltiplo 105 y mayor 987.

066 **Contesta si es verdadero o falso, y razona las respuestas.**

a) 12 es divisor de 48.

b) 15 es divisor de 3.

c) 9 es divisor de 720.

d) 7 es divisor de 777.

e) 44 es divisor de 44.

f) 100 es divisor de 10.

g) 123 es divisor de 123.

h) 1 es divisor de 17.

a) Verdadero, porque la división $48 : 12 = 4$ es exacta.

b) Falso, 15 es múltiplo de 3.

c) Verdadero, porque la división $720 : 9 = 80$ es exacta.

d) Verdadero, porque la división $777 : 7 = 111$ es exacta.

e) Verdadero, porque la división $44 : 44 = 1$ es exacta.

f) Falso, 100 es múltiplo de 10.

g) Verdadero, porque la división $123 : 123 = 1$ es exacta.

h) Verdadero, porque la división $17 : 1 = 17$ es exacta.

067 **Completa los divisores de 24, 16, 36 y 54.**

Div (24) = {1, 2, □, 4, □, 8, □, □}

Div (16) = {1, 2, □, □, 16}

Div (36) = {1, 2, □, 4, □, □, □, □, 36}

Div (54) = {1, 2, □, □, □, □, □, 54}

Div (24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

Div (16) = {1, 2, 4, 8, 16}

Div (36) = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

Div (54) = {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54}

068 Halla todos los divisores de 42. ¿Cuántos divisores tiene 42?

Div (42) = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}. Tiene 8 divisores.

069 Calcula todos los divisores de:

a) 28 **b) 64** **c) 54** **d) 96**

a) Div (28) = {1, 2, 4, 7, 14, 28}
b) Div (64) = {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64}
c) Div (54) = {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54}
d) Div (96) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96}

070 Si 63 es múltiplo de 9, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) 63 es divisor de 9.
b) 63 es divisible por 9.
c) 9 es divisor de 63.
d) 9 es múltiplo de 63.

a) Falsa b) Verdadera c) Verdadera d) Falsa

071 Si 28 es divisible por 7, ¿cuáles de las afirmaciones son ciertas?

a) 28 es múltiplo de 7.
b) 4 es divisor de 28.
c) 28 es múltiplo de 4.
d) 7 es divisor de 28.

a) Verdadera b) Verdadera c) Verdadera d) Verdadera

072 Al hacer la división 57 : 5, vemos que no es exacta. Decide si es verdadero o falso.

a) 57 es divisible por 5.
b) 5 no es divisor de 57.
c) 57 es múltiplo de 5.
d) 57 no es divisible por 5.

a) Falso b) Verdadero c) Falso d) Verdadero

073 Si 175 = 5 · 35, ¿cuáles de las afirmaciones son ciertas?

a) 175 es divisible por 5.
b) 175 es divisible por 35.
c) 175 es múltiplo de 35.
d) 5 es divisor de 175.

a) Verdadera b) Verdadera c) Verdadera d) Verdadera

074 Dada la relación 104 = 4 · 26, ¿qué afirmaciones son verdaderas?

a) 104 es divisible por 4.
b) 104 es múltiplo de 4.
c) 26 es divisor de 104.
d) 104 es divisible por 26.

a) Verdadera b) Verdadera c) Verdadera d) Verdadera

075 El número *a* es divisible por 4. Halla *a* si el cociente de la división es 29.

$a = 29 \cdot 4 = 116$

076 ●● **El número *a* no es divisible por 5. Halla *a* si el cociente de la división es 38 y el resto es 9.**

$a = 38 \cdot 5 + 9 = 199$

077 ● **Completa la siguiente tabla:**

Números	Divisores	Primo/Compuesto
33	**1, 3, 11, 33**	Compuesto
61	1, 61	Primo
79	1, 79	Primo
72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72	Compuesto
39	1, 3, 13, 39	Compuesto

078 ● **¿Cuáles de estos números son primos? ¿Y cuáles son compuestos?**

a) 46 b) 31 c) 17 d) 43

a) Compuesto b) Primo c) Primo d) Primo

079 ● **Escribe los números primos mayores que 30 y menores que 100.**

31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97

080 ● **Sabiendo que un número de dos cifras es divisible por 3, ¿se puede decir que es primo? Pon un ejemplo.**

No es primo, porque al menos tiene un divisor, 3. Por ejemplo, 21.

081 ●● **Escribe estos números como suma de dos números primos.**

a) 12 b) 20 c) 36 d) 52

a) 7 + 5 b) 13 + 7 c) 19 + 17 d) 47 + 5

082 ● **Descompón estos números en producto de factores primos.**

a) 56	f) 77	k) 138
b) 100	g) 98	l) 102
c) 187	h) 47	m) 325
d) 151	i) 99	n) 226
e) 155	j) 79	ñ) 402

a) $56 = 2^3 \cdot 7$
b) $100 = 2^2 \cdot 5^2$
c) $187 = 11 \cdot 17$
d) $151 = 151 \cdot 1$
e) $155 = 5 \cdot 31$
f) $77 = 7 \cdot 11$
g) $98 = 2 \cdot 7^2$
h) $47 = 47 \cdot 1$
i) $99 = 3^2 \cdot 11$
j) $79 = 79 \cdot 1$
k) $138 = 2 \cdot 3 \cdot 23$
l) $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$
m) $325 = 5^2 \cdot 13$
n) $226 = 2 \cdot 113$
ñ) $402 = 2 \cdot 3 \cdot 67$

083 **¿A qué números corresponden estas descomposiciones en factores primos?**

a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ **c)** $5 \cdot 7^2 \cdot 11$ **e)** $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ **g)** $3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$

b) $2 \cdot 3^2 \cdot 7$ **d)** $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ **f)** $3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$ **h)** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$

a) 120 c) 2 695 e) 1 400 g) 18 375

b) 126 d) 1 470 f) 2 205 h) 123 480

084 **¿Cuál es la descomposición en factores primos de un número primo? Pon un ejemplo.**

El producto de él mismo y la unidad. Por ejemplo: $13 = 13 \cdot 1$.

085 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA FACTORIZACIÓN DE UN PRODUCTO?

Calcula la factorización del siguiente producto:

$$120 \cdot 10$$

PRIMERO. Se descomponen en factores los dos números.

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 10 = 2 \cdot 5$$

SEGUNDO. Se multiplican ambas factorizaciones.

$$(2^3 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$$

La factorización del producto es $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$.

086 **La factorización de un número es $2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Si multiplicamos este número por 6, ¿cuál es su factorización? ¿Y si lo multiplicamos por 8?**

Multiplicamos por 6: $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Multiplicamos por 8: $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$

087 **La factorización de 8 es 2^3. Calcula las factorizaciones de los siguientes números sin hacer la división.**

a) 16 **c)** 24 **e)** 40

b) 32 **d)** 4 **f)** 56

a) $2 \cdot 8 = 2^4$

b) $2 \cdot 16 = 2 \cdot 2^4 = 2^5$

c) $3 \cdot 8 = 3 \cdot 2^3$

d) $8 : 2 = 2^3 : 2 = 2^2$

e) $2^3 \cdot 5$

f) $2^3 \cdot 7$

088 **La descomposición en factores primos de 10 es $2 \cdot 5$, la de 100 es $2^2 \cdot 5^2$… ¿Cuál será la descomposición de 100 000?**

$100\,000 = 100 \cdot 100 \cdot 10 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^5 \cdot 5^5$

089 **Halla el máximo común divisor de los siguientes pares de números.**

a) 16 y 24
b) 45 y 72
c) 12 y 36
d) 18 y 27
e) 28 y 49
f) 18 y 28

a) $16 = 2^4$ $\quad 24 = 2^3 \cdot 3$ $\quad$ m.c.d. $(16, 24) = 2^3 = 8$
b) $45 = 3^2 \cdot 5$ $\quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$ $\quad$ m.c.d. $(45, 72) = 3^2 = 9$
c) $12 = 2^2 \cdot 3$ $\quad 36 = 2^2 \cdot 3^2$ $\quad$ m.c.d. $(12, 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$
d) $18 = 2 \cdot 3^2$ $\quad 27 = 3^3$ $\quad$ m.c.d. $(18, 27) = 3^2 = 9$
e) $28 = 2^2 \cdot 7$ $\quad 49 = 7^2$ $\quad$ m.c.d. $(28, 49) = 7$
f) $18 = 2 \cdot 3^2$ $\quad 28 = 2^2 \cdot 7$ $\quad$ m.c.d. $(18, 28) = 2$

090 **Calcula el máximo común divisor de estos pares de números.**

a) 4 y 15
b) 9 y 13
c) 3 y 17
d) 12 y 7
e) 21 y 2
f) 18 y 47

a) m.c.d. $(4, 15) = 1$
b) m.c.d. $(9, 13) = 1$
c) m.c.d. $(3, 17) = 1$
d) m.c.d. $(12, 7) = 1$
e) m.c.d. $(21, 2) = 1$
f) m.c.d. $(18, 47) = 1$

091 **Obtén el máximo común divisor de los siguientes números.**

a) 8, 12 y 18
b) 16, 20 y 28
c) 8, 20 y 28
d) 45, 54 y 81
e) 75, 90 y 105
f) 40, 45 y 55

a) m.c.d. $(8, 12, 18) = 2$
b) m.c.d. $(16, 20, 28) = 2^2 = 4$
c) m.c.d. $(8, 20, 28) = 2^2 = 4$
d) m.c.d. $(45, 54, 81) = 3^2 = 9$
e) m.c.d. $(75, 90, 105) = 3 \cdot 5 = 15$
f) m.c.d. $(40, 45, 55) = 5$

092 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE PUEDE SABER SI DOS NÚMEROS SON PRIMOS ENTRE SÍ?

Comprueba si los números 8 y 15 son primos entre sí.

PRIMERO. Se factorizan los números.

$$8 = 2^3 \qquad 15 = 3 \cdot 5$$

SEGUNDO. Se comprueba si el m.c.d. de los números es 1.
Como no tienen divisores comunes, el m.c.d. es 1, y los números son primos entre sí.

093 Halla cuáles de estos números son primos entre sí.

a) 24 y 26 **c) 13 y 39** **e) 18 y 63**
b) 25 y 27 **d) 35 y 91** **f) 77 y 105**

a) $24 = 2^3 \cdot 3$ $26 = 2 \cdot 13$
m.c.d. $(24, 26) = 2$
No son primos entre sí.

b) $25 = 5^2$ $27 = 3^3$
m.c.d. $(25, 27) = 1$
Son primos entre sí.

c) $13 = 13 \cdot 1$ $39 = 3 \cdot 13$
m.c.d. $(13, 39) = 13$
No son primos entre sí.

d) $35 = 5 \cdot 7$ $91 = 7 \cdot 13$
m.c.d. $(35, 91) = 7$
No son primos entre sí.

e) $18 = 2 \cdot 3^2$ $63 = 7 \cdot 3^2$
m.c.d. $(18, 63) = 9$
No son primos entre sí.

f) $77 = 7 \cdot 11$ $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
m.c.d. $(77, 105) = 7$
No son primos entre sí.

094 Calcula el mínimo común múltiplo de:

a) 12 y 24 **b) 16 y 18** **c) 27 y 54** **d) 21 y 49**

a) m.c.m. $(12, 24) = 2^3 \cdot 3 = 24$
b) m.c.m. $(16, 18) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$
c) m.c.m. $(27, 54) = 2 \cdot 3^3 = 54$
d) m.c.m. $(21, 49) = 3 \cdot 7^2 = 147$

095 Halla el mínimo común múltiplo de:

a) 5 y 12 **b) 7 y 14** **c) 12 y 25** **d) 8 y 15**

a) m.c.m. $(5, 12) = 5 \cdot 2^2 \cdot 3 = 60$
b) m.c.m. $(7, 14) = 2 \cdot 7 = 14$
c) m.c.m. $(12, 25) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$
d) m.c.m. $(8, 15) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

096 Determina el mínimo común múltiplo de:

a) 12, 15 y 18 **c) 6, 30 y 42**
b) 10, 20 y 30 **d) 9, 14 y 21**

a) m.c.m. $(12, 15, 18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$
b) m.c.m. $(10, 20, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
c) m.c.m. $(6, 30, 42) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$
d) m.c.m. $(9, 14, 21) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$

097 José está haciendo una colección de cromos. Los cromos se venden en sobres con 5 cromos cada uno. ¿Puede comprar 15 cromos? ¿Y 17?

Sí puede comprar 15 cromos, porque 15 es múltiplo de 5.
No puede comprar 17 cromos, porque 17 no es múltiplo de 5.

098 **Ana tiene un álbum de 180 cromos. Los cromos se venden en sobres de 5 cromos cada uno. Suponiendo que no se repita ningún cromo, ¿cuántos sobres tiene que comprar como mínimo?**

180 : 5 = 36. Como mínimo tiene que comprar 36 sobres.

099 **Luis quiere pegar las 49 fotos de sus vacaciones en filas de 3 fotos cada una. ¿Cuántas filas enteras obtendrá? ¿Le sobra alguna foto? Razona la respuesta.**

49 : 3 → Cociente = 16; resto = 1. Obtendrá 16 filas y le sobra una foto.

100 **Cristina tiene 24 coches de juguete y quiere colocarlos en fila, de modo que en cada fila haya la misma cantidad de coches. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?**

De tantas maneras como divisores tenga 24.
Buscamos los divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.
Puede colocarlos en 1 fila con 24 coches, en 2 filas con 12 coches cada una, en 3 filas con 8 coches cada una, etc.

101 **Carmen cuenta sus 24 coches de juguete de 3 en 3 y Alberto lo hace de 4 en 4. ¿Coinciden en algún número? ¿Qué tienen en común dichos números?**

Carmen: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24.

Alberto: 4, 8, 12, 16, 20, 24.

Coinciden en los números 12 y 24, que son los múltiplos comunes de 3 y 4.

Otra forma de hacerlo es con el m.c.m. (3, 4) = 12.
Coinciden cada 12 números.

102 **Eduardo trabaja en una tienda de animales. Hay 8 canarios y quiere ponerlos en jaulas, con el mismo número de canarios en cada una, sin que sobre ninguno. ¿De cuántas formas puede colocar los canarios en las jaulas?**

De tantas maneras como divisores tenga 8. Buscamos los divisores de 8: 1, 2, 4 y 8. Esas son las agrupaciones posibles.

103 **Marta tiene 15 piñas y desea repartirlas en cestos, con el mismo número de piñas en cada uno, sin que le sobre ninguna. ¿De cuántas maneras distintas puede repartirlas?**

De tantas maneras como divisores tenga 15. Buscamos los divisores de 15: 1, 3, 5 y 15. Esas son las agrupaciones posibles.

104 **María ha hecho 45 pasteles y los quiere guardar en cajas. ¿De cuántas maneras los puede guardar para que no sobre ninguno?**

De tantas maneras como divisores tenga 45. Buscamos los divisores de 45: 1, 3, 5, 9, 15 y 45. Esas son las agrupaciones posibles.

105 ●●

Paco tiene 20 láminas de madera y tiene que ponerlas en montones, con el mismo número de láminas en cada uno, sin que le sobre ninguna. ¿Cuántas láminas puede poner en cada montón?

De tantas maneras como divisores tenga 20. Buscamos los divisores de 20: 1, 2, 4, 5, 10 y 20. Esas son las agrupaciones posibles.

106 ●●

Ana tiene 7 macetas de geranios y las quiere colocar en grupos, de manera que cada grupo tenga el mismo número de macetas y no sobre ninguna. ¿Cuántas macetas puede poner en cada grupo?

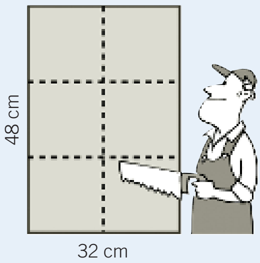
Los únicos divisores de 7 son 1 y 7. Luego las puede colocar en 1 fila con 7 macetas o en 7 filas con 1 maceta cada una.

107

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVE UN PROBLEMA UTILIZANDO EL m.c.d.?

Un carpintero corta una tabla de 48 cm de largo y 32 cm de ancho, sin que le sobre madera, en cuadrados iguales lo más grandes posible. ¿Cómo lo ha hecho?



Si no puede sobrar madera, el lado de los cuadrados tiene que ser un divisor de 48 y 32.

Como tienen que ser lo más grandes posible, la longitud del lado debe ser el mayor de los divisores comunes de 48 y 32, es decir, su máximo común divisor.

PRIMERO. Se factorizan los números.

$$48 = 2^4 \cdot 3 \qquad 32 = 2^5$$

SEGUNDO. Se calcula su m.c.d.

$$\text{m.c.d.}\ (48, 32) = 2^4 = 16$$

Ha cortado la tabla en cuadrados de 16 cm de lado.

108 ●●

Queremos dividir una nave rectangular de 140 m de ancho y 200 m de largo en compartimentos cuadrados con la máxima superficie posible. ¿Cuánto debe medir el lado de cada compartimento?

m.c.d. (140, 200) $= 2^2 \cdot 5 = 20$
El lado de cada compartimento debe medir 20 m.

109 ●●

Se van a poner plaquetas cuadradas del mayor tamaño posible en un aula rectangular de 12 m de largo y 10 m de ancho.

a) ¿Cuál será el tamaño de cada plaqueta?

b) ¿Cuántas plaquetas se pondrán?

a) m.c.d. (12, 10) = 2. El lado de la plaqueta debe medir 2 m.

b) Superficie del aula: $12 \cdot 10 = 120$ m^2. Superficie de la plaqueta: 4 m^2.
120 : 4 = 30 plaquetas se pondrán.

110 **Mercedes tiene 8 bolitas amarillas, 16 blancas, 16 rojas y 10 azules. Con todas las bolitas desea fabricar el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna bolita.**

a) ¿Cuántos collares iguales puede hacer?

b) ¿Qué número de bolitas de cada color tendrán los collares?

a) m.c.d. (8, 16, 10) $= 2$. Puede hacer 2 collares iguales.

b) Cada collar tendrá $8 : 2 = 4$ bolas amarillas, $16 : 2 = 8$ blancas, $16 : 2 = 8$ rojas y $10 : 2 = 5$ azules.

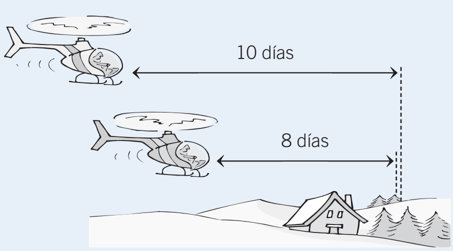
111 **Luis tiene 40 sellos de Europa y 56 de Asia. Quiere hacer el mínimo número posible de lotes iguales, sin mezclar sellos de Europa y Asia y sin que le sobre ninguno. ¿Cuántos lotes hará? ¿Cuántos sellos tendrá cada lote?**

m.c.d. (40, 56) $= 8$. Puede hacer $40 : 8 = 5$ lotes de sellos de Europa y $56 : 8 = 7$ lotes de sellos de Asia.
En total hará $7 + 5 = 12$ lotes de 8 sellos cada uno.

112 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVE UN PROBLEMA UTILIZANDO EL m.c.m.?

Un helicóptero transporta víveres a un refugio de la montaña cada 10 días y otro, cada 8 días. Si los dos helicópteros han coincidido hoy, ¿cuántos días tardarán en volver a coincidir?



El número de días que han de transcurrir tiene que ser un múltiplo de 10 y de 8. Además, será el menor de los múltiplos comunes de ambos: el mínimo común múltiplo de 10 y 8.

PRIMERO. Se factorizan los números.

$$10 = 2 \cdot 5 \qquad 8 = 2^3$$

SEGUNDO. Se calcula su m.c.m.

$$\text{m.c.m. } (10, 8) = 2^3 \cdot 5 = 40$$

Coincidirán cuando hayan transcurrido 40 días.

113 **María y Juan se turnan para ir a ver a sus padres. María va cada 5 días y Juan, cada 6. Si coincidieron el día de Nochebuena:**

a) ¿Cuándo volverán a coincidir?

b) ¿Cuántas visitas habrá hecho cada uno antes de que coincidan?

a) m.c.m. (5, 6) $= 30$. Volverán a coincidir cada 30 días, el 23 de enero.

b) Cuando coincidan la primera vez María habrá hecho $30 : 5 = 6$ visitas y Juan $30 : 6 = 5$.

114 ●●

En un árbol de Navidad hay bombillas rojas, verdes y amarillas. Las primeras se encienden cada 15 segundos, las segundas cada 18 y las terceras cada 10.

a) ¿Cada cuántos segundos coinciden las tres clases de bombillas encendidas?

b) En una hora, ¿cuántas veces se encienden a la vez?

a) m.c.m. (15, 18, 10) $=$ 90. Coinciden encendidas cada 90 segundos.

b) 1 hora $=$ 3600 segundos
3600 : 90 $=$ 40 veces coincidirán encendidas en una hora.

115 ●●●

Andrés tiene una colección de monedas que puede agrupar de 6 en 6, de 8 en 8 y de 10 en 10, sin que falte ninguna. ¿Cuál es el menor número de monedas que puede tener?

m.c.m. (6, 8, 10) $=$ 120 monedas es el menor número de monedas que puede tener.

116 ●●●

Eva tiene una caja de caramelos y le dice a su amiga que se la regala si acierta cuántos caramelos tiene. Le da estas pistas:

«La caja tiene menos de 60 caramelos. Si los reparto entre 9 amigos, no sobra ninguno; pero si los reparto entre 11, me falta 1».

¿Cuántos caramelos hay en la caja?

Múltiplos de 9 menores que 60: 9, 18, 27, 36, 45, 54. Si le falta uno al repartir entre 11 es porque la cifra de las unidades es una unidad menor que la cifra de las decenas.

De estos múltiplos, el que cumple esta condición es 54. Por tanto, hay 54 caramelos.

117 ●●●

Dado el número $2^7 \cdot 5$, ¿es divisible por 2? ¿Y por 5? ¿Y por 25? ¿Y por 80? ¿Y por 6?

El número es divisible por 2, por ser factor 2^7; por 5, por ser factor 5, y por 80, porque es $2^4 \cdot 5$ y el m.c.d. $(2^7 \cdot 5, 80) = 2^4 \cdot 5 = 80$.
No es divisible por $25 = 5^2$, porque el m.c.d. $(2^7 \cdot 5, 25) = 5$ y no 25.
No es divisible por $6 = 2 \cdot 3$, porque el m.c.d. $(2^7 \cdot 5, 6) = 2$ y no 6.

118 ●●●

Si un número es divisible por 3 y por 4, lo es también por $3 \cdot 4 = 12$. Pero si es divisible por 6 y por 4, ¿es divisible por $6 \cdot 4 = 24$?

Si es divisible por dos números, lo es por su m.c.m.; en este caso m.c.m. (6, 4) $=$ 12, pero no podemos asegurar que lo sea por otro de sus múltiplos. Por ejemplo, 60 es múltiplo de 6 y 4, pero no de 24.

119 ●●●

Si un número no es divisible por 3, ¿puede ser su doble divisible por 3?

Si no es divisible por 3 en su descomposición factorial no aparece el 3. Considerando su doble, la descomposición factorial estará multiplicada por 2, por lo que seguirá sin tener un 3. Por lo tanto, no será divisible por 3.

120 **Si un número es par, ¿es divisible por 6 el triple de ese número?**

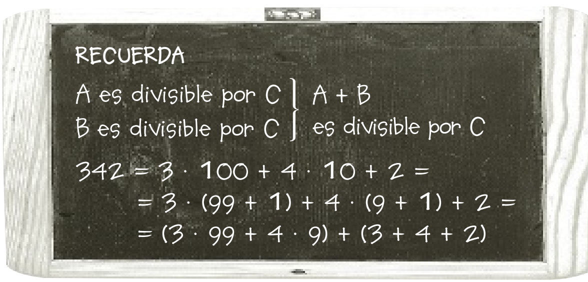
Sí, ya que si un número es par será de la forma $2 \cdot n$. El triple de dicho número será de la forma $3 \cdot 2 \cdot n = 6 \cdot n$, y $6 \cdot n$ es divisible por 6.

121 **Razona la regla de formación de los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5 y 11.**

a) ¿En qué tipo de cifra (par o impar) acaba el doble de cualquier número? ¿Cuál será el criterio de divisibilidad por 2?

b) ¿Cuál es el criterio de divisibilidad por 5? Razónalo.

c) Estudia los criterios de la divisibilidad por 3.



Como 99 y 9 son divisibles por 3, el número del primer paréntesis es divisible por 3.

Así, 342 será divisible por 3 solo si lo es el número del segundo paréntesis, pero ¿qué número es el del segundo paréntesis?

d) Investiga la divisibilidad por 11.

$$\mathbf{10 + 1 \text{ es múltiplo de } 11}$$
$$\mathbf{100 - 1 \text{ es múltiplo de } 11}$$
$$\mathbf{1\,000 + 1 \text{ es múltiplo de } 11\ldots}$$

Siguiendo este razonamiento, justifica el criterio de divisibilidad por 11.

a) Si el número termina en una cifra par o impar, el doble del número siempre terminará en una cifra par; y si termina en 0, será 0.
Luego el criterio de divisibilidad por 2 es que un número es divisible por 2 si termina en 0 o cifra par.

b) Si multiplicamos un número acabado en una cifra par o 0 por 5, el resultado acabará en 0. Si multiplicamos un número acabado en una cifra impar por 5, el resultado acabará en 5. Un número es múltiplo de 5 si acaba en 0 o 5.

c) El número del segundo paréntesis es la suma de las cifras del número inicial.

d) Por ejemplo, consideramos el número 4 235.

$$\begin{aligned} 4\,235 &= 4 \cdot 1\,000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = \\ &= 4 \cdot (1\,000 + 1 - 1) + 2 \cdot (100 - 1 + 1) + 3 \cdot (10 + 1 - 1) + 5 = \\ &= 4 \cdot (1\,000 + 1) + 2 \cdot (100 - 1) + 3 \cdot (10 + 1) + (5 - 4 + 2 - 3) \end{aligned}$$

Como en el primer paréntesis todos los sumandos son múltiplos de 11, el segundo también debe ser múltiplo de 11. El segundo paréntesis es la diferencia entre las cifras de posiciones impares menos las cifras de las posiciones pares, que será 0 o múltiplo de 11.

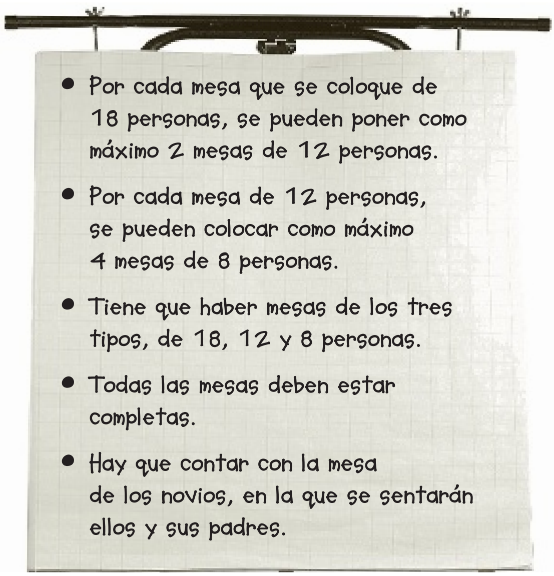
PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

122 ●●●

Marta y Daniel se van a casar y están organizando el banquete.

El banquete tiene un total de 212 invitados contando a los novios, y en el salón de bodas en el que se celebrará les han dicho que pueden elegir entre mesas de 18, 12 y 8 comensales.

Pero existen algunas restricciones:



Al examinar la lista de invitados han decidido que elegirán 3 mesas de 18 personas y para el resto de invitados utilizarán mesas de 12 y 8 personas.

ERES CAPAZ DE... COMPRENDER

a) Una vez que reservan la mesa de los novios, las de las familias y la de amigos comunes, ¿cuántas personas quedan por colocar?

ERES CAPAZ DE... RESOLVER

b) ¿Cuántas posibilidades de elección tienen para organizar a estos invitados?

ERES CAPAZ DE... DECIDIR

c) ¿Consideras que la elección de mesas es la adecuada? ¿Qué otros factores deben tener en cuenta en la organización?

a) De los 212 invitados, la mesa de los novios tiene 6 personas y quedan $212 - 6 = 206$ personas por colocar.

b) Hay dos posibilidades:

PRIMERA POSIBILIDAD

- 18
  - 12
    - 8
    - 8
    - 8
    - 8
  - 12
    - 8
    - 8
    - 8
    - 8

- 18
  - 12
    - 8
    - 8
  - 12

- 18
  - 12
  - 12

3 mesas de 18, 6 de 12 y 10 de 8 personas.

SEGUNDA POSIBILIDAD

- 18
  - 12
    - 8
    - 8
    - 8
    - 8
  - 12
    - 8
    - 8
    - 8
    - 8

- 18
  - 12
    - 8
    - 8
    - 8
    - 8
  - 12
    - 8

- 18

3 mesas de 18, 4 de 12 y 13 de 8 personas.

c) Al tener dos posibilidades puede haber problemas a la hora de colocarlos, teniendo en cuenta otros factores como relaciones familiares, amigos… Podría ser conveniente negociar alguna de las restricciones.

123 ●●●

Para las elecciones municipales de una localidad se han constituido siempre dos colegios electorales, pero esta vez se ha añadido uno más debido al aumento de población que se ha producido en los últimos años. En esta ocasión figuran 1 218 electores y hay que seleccionar unos 400 por colegio.

Al presidente de la junta electoral se le ha ocurrido una idea.

ERES CAPAZ DE... COMPRENDER

a) Si figuro en la lista de electores en el número 27, ¿en qué colegio votaré?

b) ¿Y si estoy en el lugar 648?

c) ¿Y si aparezco en el lugar 1 114?

ERES CAPAZ DE... RESOLVER

d) ¿Cuántas personas votarán en cada colegio?

ERES CAPAZ DE... DECIDIR

e) ¿De qué modo podría plantearse un reparto más adecuado?

Colegio 1: múltiplos de 6 y 8.

Colegio 2: los 400 primeros que no son múltiplos de 6 y 8.

Colegio 3: el resto.

a) En el colegio 2.

b) Múltiplo de 6 $\rightarrow$ En el colegio 1.

c) En el colegio 3.

d) Múltiplos de 6 → $1\,218 : 6 = 203$

Múltiplos de 8 → $1\,218 : 8 = 152{,}25$

Los múltiplos de 6 y de 8 son los multiplos del m.c.m. $(6, 8) = 24$, $1\,218 : 24 = 50$.

Votarán en el primer colegio: $203 + 152 - 50 = 305$ personas.

$400 : 6 = 66{,}\widehat{6}$

$400 : 8 = 50$

$400 : 24 = 16{,}\widehat{6}$

Votarán en el colegio 2: $66 + 50 - 16 = 100$

En el colegio 3 votarán: $1\,218 - 305 - 100 = 813$

e) Respuesta abierta. Por ejemplo:

En el colegio 1 los múltiplos de 3, en el 2 los 600 primeros que no sean múltiplos de 3 y el resto, en el colegio 3.