Probabilidad

Experimentos deterministas

Son los experimentos de los que podemos predecir el resultado antes de que se realicen.

Ejemplo

Si dejamos caer una piedra desde una ventana sabemos, sin lugar a dudas, que la pelota bajará. Si la arrojamos hacia arriba, sabemos que subirá durante un determinado intervalo de tiempo; pero después bajará.

Experimentos aleatorios

Son aquellos en los que no se puede predecir el resultado, ya que éste depende del **azar**.

Ejemplos

Si lanzamos una moneda no sabemos de antemano si saldrá cara o cruz.

Si lanzamos un dado tampoco podemos determinar el resultado que vamos a obtener.

Teoría de probabilidades

La **teoría de probabilidades** se ocupa de **asignar** un cierto **número** a cada **posible resultado** que pueda ocurrir en un **experimento aleatorio**, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro.

Suceso

Es cada uno de los resultados posibles de una experiencia aleatoria.

Al lanzar una moneda, que salga cara es un suceso

Al lanzar un dado, que se obtenga 4 es un suceso.

Espacio muestral

Es el conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria, lo representaremos por E

Espacio muestral de una moneda:

E = {C, X}.

Espacio muestral de un dado:

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Suceso aleatorio

Suceso aleatorio es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Por ejemplo al tirar un dado un suceso sería que saliera par, otro, obtener múltiplo de 3, y otro, sacar 5.

Ejemplo

Una bolsa contiene bolas blancas y negras. Se extraen sucesivamente tres bolas. Calcular:

1. El espacio muestral.

E = {(b,b,b); (b,b,n); (b,n,b); (n,b,b); (b,n,n); (n,b,n); (n,n ,b); (n, n,n)}

2. El suceso A = {extraer tres bolas del mismo color}.

B = {(b,b,b); (n, n,n)}

3. El suceso A = {extraer al menos una bola blanca}.

B= {(b,b,b); (b,b,n); (b,n,b); (n,b,b); (b,n,n); (n,b,n); (n,n ,b)}

4. El suceso A = {extraer una sola bola negra}.

A = {(b,b,n); (b,n,b); (n,b,b)}

Tipos de sucesos

Suceso elemental

Suceso elemental es cada uno de los elementos que forman parte del espacio muestral.

Por ejemplo al tirar un dado un suceso elemental es sacar 5.

Suceso compuesto

Suceso compuesto es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Por ejemplo al tirar un dado un suceso sería que saliera par, otro, obtener múltiplo de 3.

Suceso seguro

Suceso seguro, E, es aquel que se verifica siempre que realizamos el experimento, está formado por todos los posibles resultados (es decir, por el espacio muestral).

Por ejemplo al tirar un dado un dado obtener una puntuación que sea menor que 7.

Suceso imposible

Suceso imposible, $\varnothing$, es el que no se puede obtener como resultado de un experimento aleatorio, no tiene ningún elemento.

Por ejemplo al tirar un dado obtener una puntuación igual a 7.

Sucesos compatibles

Dos sucesos, A y B, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 3, A y B son compatibles porque el 6 es un suceso elemental común.

Sucesos incompatibles

Dos sucesos, A y B, son **incompatibles** cuando no tienen ningún elemento en común.

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 5, A y B son incompatibles.

Sucesos independientes

Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Al lazar dos dados los resultados son independientes.

Sucesos dependientes

Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Extraer dos cartas de una baraja, sin reposición, son sucesos dependientes.

Suceso contrario

El suceso contrario a A es otro suceso que se realiza cuando no se realiza A., Se denota por $\bar{A}$.

Son sucesos contrarios sacar par e impar al lanzar un dado.

Unión de sucesos

La **unión de sucesos, A U B**, es el suceso formado por todos los elementos de A y de B.

Es decir, el suceso A U B se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B, o ambos.

A UB se lee como "**A o B**".

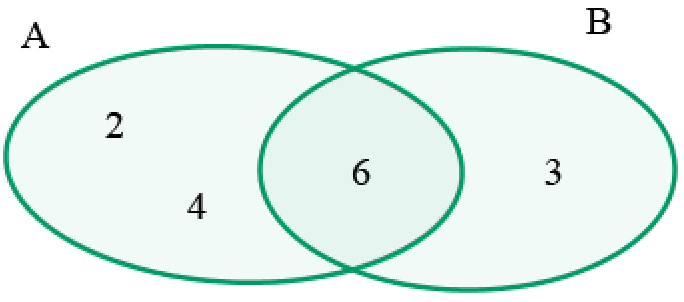
Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular A U B.

A = {2, 4, 6}

B = {3, 6}

A U B = {2, 3, 4, 6}



Intersección de sucesos

La **intersección de sucesos, A ∩ B**, es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y B.

Es decir, el suceso A ∩ B se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B.

A ∩ B se lee como "**A y B**".

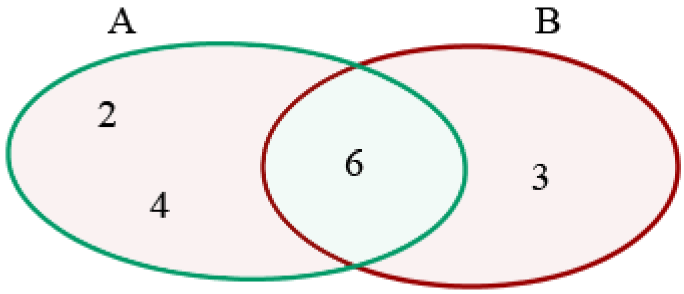
Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular A ∩ B.

A = {2, 4, 6}

B = {3, 6}

A ∩ B = {3}



Sucesos contrarios

El suceso $\bar{A}$ **= E - A** se llama **suceso contrario** o complementario de A.

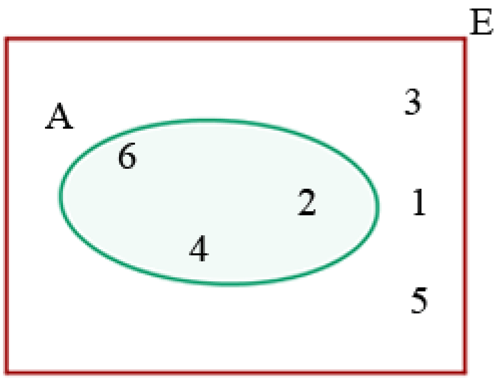
Es decir, se verifica siempre y cuando no se verifique A.

Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par". Calcular $\bar{A}$.

A = {2, 4, 6}

$\bar{A}$ = {1, 3, 5}



Frecuencia absouta y relativa de un sucesi

Supongamos que un experimento aleatorio se ha realizado n veces, de las que n_A veces ($n_A \leq n$) se ha verificado el suceso A.

- Se llama **frecuencia absoluta** de A al número n_A de veces que se ha verificado A. Simbólicamente: $f(A) = n_A$
- Se llama **frecuencia relativa** de A al cociente $\frac{n_A}{n}$. Simbólicamente: $f_r(A) = \frac{n_A}{n}$

Ley de los grandes números:

Experimentalmente se observa que, al aumentar indefinidamente el número de pruebas de un experimento aleatorio, la **frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse** en torno a un número. Dicho número se llama **probabilidad del suceso.**

Axiomas de la probabilidad

1. La probabilidad es positiva y menor o igual que 1.

$0 \leq p(A) \leq 1$

2. La probabilidad del suceso seguro es 1.

$p(E) = 1$

3. Si A y B son incompatibles, es decir $A \cap B = \varnothing$ entonces:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propiedades de la probabilidad

1 La suma de las probabilidades de un suceso y su contrario vale 1, por tanto la probabilidad del suceso contrario es:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

2 Probabilidad del suceso imposible es cero.

$$p(\varnothing) = 0$$

3 La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es la suma de sus probabilidades restándole la probabilidad de su intersección.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

4 Si un suceso está incluido en otro, su probabilidad es menor o igual a la de éste.

$$Si\ \ A \subset B,\text{entonces} \qquad p(A) \leq p(B)$$

5 Si A_1, A_2, ..., A_k son incompatibles dos a dos entonces:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_k)$$

Regla de Laplace

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, **equiprobables**, entonces si A es un suceso, la **probabilidad** de que ocurra el suceso A es:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplos

Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salgan dos caras.

Casos posibles: {cc, cx, xc, xx}.

Casos favorables: 1.

$$\mathrm{P}(2\ caras) = \frac{1}{4}$$

En una baraja de 40 cartas, hallar la P (as) y P (copas).

Casos posibles: 40.

Casos favorables de ases: 4.

$$P(\text{as}) = \frac{1}{40}$$

Casos favorables de copas: 10.

$$P(\text{copas}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

Calcular la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga:

1 Un número par.

Casos posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Casos favorables: {2, 4, 6}.

$$P(par) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2 Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}.

$$P(\dot{3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2 Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}.

$$P(\dot{3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3 Mayor que 4.

Casos favorables: {5, 6}.

$$P(> 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad de la unión de sucesos

Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles

$A \cap B = \varnothing$

p(A U B) = p(A) + p(B)

Calcular la probabilidad de obtener un 2 ó un 5 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad de la unión de sucesos compatibles

$A \cap B \neq \varnothing$

p(A U B) = p(A) + p(B) − p(A ∩B)

Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 ó un 6 al lanzar un dado.

$$P(\dot{2} \cup 6) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Probabilidad condicionada

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral E.

Se llama **probabilidad** del suceso A **condicionada** al B y se representa por **P(A/B)** a la **probabilidad del suceso A una vez ha ocurrido el B**.

$$P(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Ejemplo

Calcular la probabilidad de obtener un 6 al tirar un dado sabiendo que ha salido par.

$$P(6/par)=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$$

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son independientes si

p(B/A) = p(B)

Sucesos dependientes

Dos sucesos A y B son dependientes si

p(B/A) ≠ p(B)

Probabilidad de la intersección de sucesos independientes

p(A ∩ B) = p(A) · p(B)

Ejemplo

Se tiene una baraja de 40 cartas, se saca una y se vuelve a meter. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos ases?

$$p(A\cap B)=p(A_1)\cdot p(A_2)=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}=\frac{1}{100}$$

Probabilidad de la intersección de sucesos dependientes

p(A ∩ B) = p(A) · p(B/A)

Ejemplo

Se tiene una baraja de 40 cartas, se extraen dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos ases?

$$p(A \cap B) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

$$p(A - B) = p\left(A \cap \bar{B}\right) = p(A) - p(A \cap B)$$

Experimentos compuestos

Un **experimento compuesto** es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples.

Es decir, si tiramos un dado, o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un **experimento compuesto**.

En los **experimentos compuestos** es conveniente usar el llamado **diagrama en árbol** para hacerse una idea global de todos ellos.

Diagramas de árbol

Para la construcción de un **diagrama en árbol** se partirá poniendo una **rama** para cada una de las **posibilidades**, acompañada de su **probabilidad**.

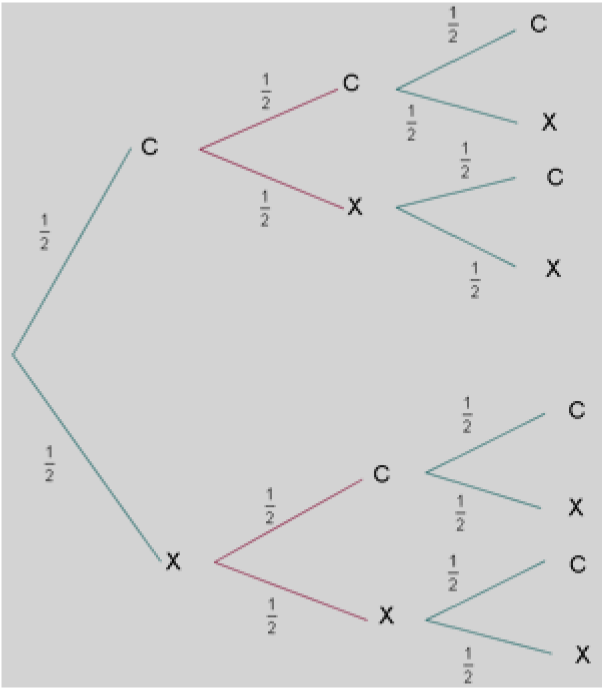
En el **final** de cada **rama parcial** se constituye a su vez, un **nudo** del cual parten nuevas **ramas**, según las **posibilidades** del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (**nudo final**).

Hay que tener en cuenta: que la **suma de probabilidades** de las **ramas** de cada **nudo** ha de dar **1**.

Ejemplos

1.- Calcular la **probabilidad** de que al arrojar al aire tres monedas, salgan:

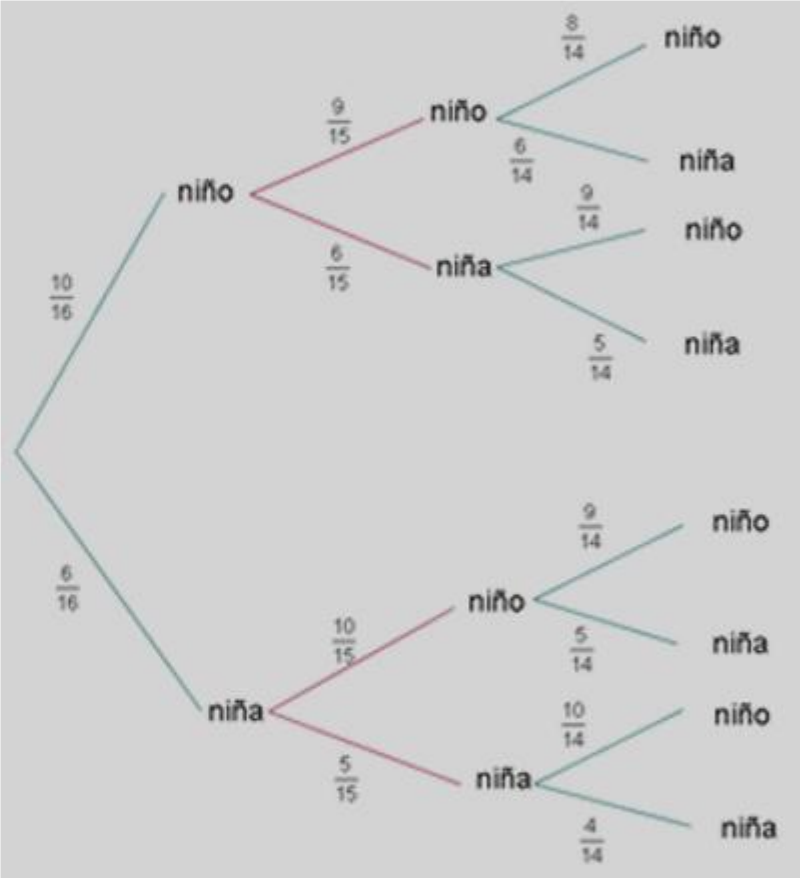
Tres caras.



$$p(3c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

2.- Una clase consta de seis niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de:

1 Seleccionar tres niños.



$$p(3\ \textit{niños}) = \frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14} = 0.214$$

2Seleccionar exactamente dos niños y una niña.

$$p(2\ \textit{niños y 1 niña}) = \frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14} + \frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{9}{14} + \frac{6}{16}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14} = 0.482$$

3Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.

$$p(2\ \textit{niñas y 1 niño}) = \frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14} + \frac{6}{16}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{5}{14} + \frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{10}{14} = 0.268$$

1 Seleccionar tres niñas.

$$p(3\ \textit{niñas}) = \frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14} = 0.0357$$