Ecuaciones

Igualdad

Una **IGUALDAD** se compone de dos expresiones unidas por el signo igual.

$2x + 3 = 5x - 2$

Una **igualdad** puede ser:

Falsa:

$2x + 1 = 2 \cdot (x + 1)$ $2x + 1 = 2x + 2$ $1 \neq 2$.

Cierta

$2x + 2 = 2 \cdot (x + 1)$ $2x + 2 = 2x + 2$ $2 = 2$

Identidad

Una identidad es una igualdad que es cierta para cualquier valor de las letras.

$2x + 2 = 2 \cdot (x + 1)$ $2x + 2 = 2x + 2$ $2 = 2$

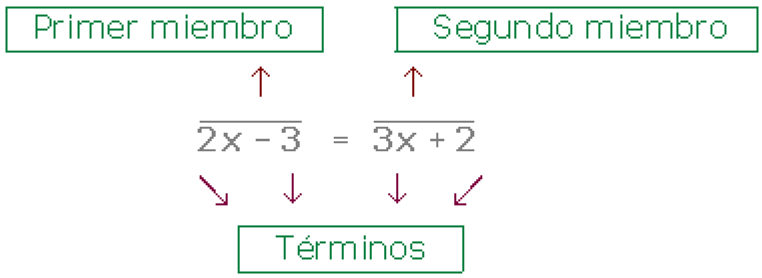
Ecuación

Una ecuación es una igualdad que se cumple para algunos valores de las letras.

$x + 1 = 2$ $x = 1$

Los **MIEMBROS** de una ecuación son **cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual.**

Los **TÉRMINOS** **son los sumandos que forman los miembros.**



Las **INCÓGNITAS son las letras que aparecen en la ecuación.**

Las **SOLUCIONES** son los **valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.**

$2x - 3 = 3x + 2 \qquad x = -5$

$2 \cdot (-5) - 3 = 3 \cdot (-5) + 2$

$-10 - 3 = -15 + 2 \qquad -13 = -13$

El **grado** de una ecuación es el **mayor de los grados de los monomios que forman sus miembros.**

Tipos de ecuaciones según su grado

$5x + 3 = 2x + 1$ **Ecuación de primer grado.**

$5x + 3 = 2x^2 + x$ **Ecuación de segundo grado.**

$5x^3 + 3 = 2x + x^2$ **Ecuación de tercer grado.**

$5x^3 + 3 = 2x^4 + 1$ **Ecuación de cuarto grado.**

Clasificación de ecuaciones

1. Ecuaciones polinómicas enteras

Las ecuaciones polinómicas son de la forma **$P(x) = 0$** , donde P(x) es un polinomio.

Grado de una ecuación

El **grado** de una ecuación es el **mayor de los grados de los monomios que forman sus miembros.**

Tipos de ecuaciones polinómicas

1.1 Ecuaciones de primer grado o lineales

Son del tipo $\mathbf{ax + b = 0}$, con $a \neq 0$, ó cualquier otra ecuación en la que al operar, trasponer términos y simplificar adoptan esa expresión.

$(x + 1)^2 = x^2 - 2$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2$

$2x + 1 = -2$

$\mathbf{2x + 3 = 0}$

1.2 Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas

Son ecuaciones del tipo $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, con $a \neq 0$.

Ecuaciones de segundo grado incompletas

$\mathbf{ax^2 = 0}$

$\mathbf{ax^2 + b = 0}$

$\mathbf{ax^2 + bx = 0}$

1.3 Ecuaciones de tercer grado

Son ecuaciones del tipo $\mathbf{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$, con $a \neq 0$.

1.4 Ecuaciones de cuarto grado

Son ecuaciones del tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, con $a \neq 0$.

Ecuaciones bicuadradas

Son ecuaciones de cuarto grado que no tiene términos de grado impar.

$ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a \neq 0$.

1.5 Ecuaciones de grado n

En general, las ecuaciones de grado n son de la forma:

$a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$

2. Ecuaciones polinómicas racionales

Las ecuaciones polinómicas son de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, donde P(x) y Q(x) son polinomios.

$$\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x - 1} = 0$$

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

$2x - 3 = 3x + 2 \qquad x = -5$

$x + 3 = -2 \qquad x = -5$

Criterios de equivalencia de ecuaciones

1. Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o se les resta una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada.

$x + 3 = -2$

$x + 3 - 3 = -2 - 3$

$x = -5$

2. Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o se les divide una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada.

$5x + 10 = 15$

$(5x + 10) : 5 = 15 : 5$

$x + 2 = 3$

$x + 2 - 2 = 3 - 2$

$x = 1$

Resolución de ecuaciones de primer grado

En general para **resolver una ecuación de primer grado** debemos seguir los siguientes **pasos**:

1º Quitar paréntesis.

2º Quitar denominadores.

3º Agrupar los términos en *x* en un miembro y los términos independientes en el otro.

4º Reducir los términos semejantes.

5º Despejar la incógnita.

$2x = 6$

Despejamos la incógnita:

$$x = \frac{6}{2} \qquad x = 3$$

$$2x - 3 = 6 + x$$

Agrupamos los términos semejantes y los independientes, y sumamos:

$$2x - x = 6 + 3 \qquad x = 9$$

$$2(2x - 3) = 6 + x$$

Quitamos paréntesis:

$$4x - 6 = 6 + x$$

Agrupamos términos y sumamos:

$$4x - x = 6 + 6 \qquad 3x = 12$$

Despejamos la incógnita:

$$x = \frac{12}{3} \qquad x = 4$$

$$\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$$

Quitamos denominadores, para ello en primer lugar hallamos el mínimo común múltiplo.

$$\text{m.c.m.}(6,\ 2) = 6$$

$$x - 1 - 3(x - 3) = -6$$

Quitamos paréntesis, agrupamos y sumamos los términos semejantes:

$$x - 1 - 3x + 9 = -6; \qquad x - 3x = -6 - 9 + 1; \qquad -2x = -14$$

Despejamos la incógnita:

$$2x = 14 \qquad x = \frac{14}{2} \qquad x = 7$$

$$\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 19$$

Quitamos paréntesis y simplificamos:

$$\frac{6}{4}x + \frac{12}{4} = x + 19 \qquad \frac{3}{2}x + 3 = x + 19$$

Quitamos denominadores, agrupamos y sumamos los términos semejantes:

$$3x + 6 = 2x + 38 \qquad 3x - 2x = 38 - 6 \qquad x = 32$$

$$2 - \left[-2 \cdot (x + 1) - \frac{x - 3}{2}\right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3x$$

Quitamos corchete:

$$2 - \left(-2x - 2 - \frac{x - 3}{2}\right) = \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3x$$

Quitamos paréntesis:

$$2 + 2x + 2 + \frac{x - 3}{2} = \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3x$$

Quitamos denominadores:

$$24 + 24x + 24 + 6 \cdot (x - 3) = 8x - (5x - 3) + 36x$$

Quitamos paréntesis:

$$24 + 24x + 24 + 6x - 18 = 8x - 5x + 3 + 36x$$

Agrupamos términos:

$$24x + 6x - 8x + 5x - 36x = 3 - 24 - 24 + 18$$

Sumamos:

$$-9x = -27$$

Dividimos los dos miembros por: −9

$$x = 3$$

Problemas de ecuaciones de primer grado

Expresiones algebraicas comunes

El **doble o duplo** de un número: **2x**

El **triple** de un número: **3x**

El **cuádruplo** de un número: **4x**

La **mitad** de un número: **x/2.**

Un **tercio** de un número: **x/3.**

Un **cuarto** de un número: **x/4.**

Un número es **proporcional** a 2, 3, 4, ...: **2x, 3x, 4x,..**

Un número al **cuadrado**: x^2

Un número al **cubo**: x^3

Dos números **consecutivos**: **x** y **x + 1.**

Dos números **consecutivos pares**: **2x** y **2x + 2.**

Dos números **consecutivos impares**: **2x + 1** y **2x + 3**.

Descomponer 24 **en dos partes**: **x** y **24 − x.**

La **suma** de dos números es 24: **x** y **24 − x.**

La **diferencia** de dos números es 24: **x** y **24 + x.**

El **producto** de dos números es 24: **x** y **24/x.**

El **cociente** de dos números es 24; **x** y **24 · x.**

Problemas geométricos con ecuaciones de primer grado

Halla el valor de los tres ángulos de un triángulo sabiendo que B mide 40° más que C y que A mide 40° más que B.

$C \rightarrow x$

$B \rightarrow x + 40$

$A \rightarrow x + 40 + 40 = x + 80$

$x + x + 40 + x + 80 = 180;$ $x + x + x = 180 - 40 - 80;$

$3X = 60;$ $X = 20$

$C = \mathbf{20^o}$ $B = 20^o + 40^o = \mathbf{60^o}$ $A = 60^o + 40^o = \mathbf{100^o}$

Problemas de mezclas

$\mathbf{C_1} \longrightarrow$ 1ª cantidad. $\mathbf{C_1 = x}$

$\mathbf{C_2} \longrightarrow$ 2ª cantidad. $\mathbf{C_2 = C_m - x}$

$\mathbf{C_m} \longrightarrow$ Cantidad de la mezcla $\mathbf{C_m = C_1 + C_2}$

$\mathbf{P_1} \longrightarrow$ Precio de la 1ª cantidad

$\mathbf{P_2} \longrightarrow$ Precio de la 2ª cantidad

$P_m \longrightarrow$ Precio de la mezcla

$C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2 = C_m \cdot P_m$

También podemos poner los datos en una tabla

	Cantidad	Precio	Coste
1ª sustancia	C_1	P_1	$C_1 \cdot P_1$
2ª sustancia	C_2	P_2	$C_2 \cdot P_2$
Mezcla	$C_1 + C_2$	P	$C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2$

$C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2 = (C_1 + C_2) \cdot P_m$

Un comerciante tiene dos clases de café, la primera a 40 € el kg y la segunda a 60 € el kg.

¿Cuantos kilogramos hay que poner de cada clase de café para obtener 60 kilos de mezcla a 50 € el kg?

	1ª clase	2ª clase	Total
Nº de kg	x	60 − x	60
Valor	$40 \cdot x$	$60 \cdot (60 - x)$	$60 \cdot 50$

$40x + 60 \cdot (60 - x) = 60 \cdot 50$

$40x + 3600 - 60x = 3000; \quad -60x + 40x = 3000 - 3600; \quad 20x = 600$

$x = 30; \quad 60 - 30 = 30$

Tenemos que mezclar 30 kg de la 1ª clase y otros 30 de la 2ª clase .

Problemas de aleaciones

La **ley de la aleación es la relación entre el peso del metal fino**, es decir, más valioso, **y el peso total**.

Se resuelven del mismo modo que los problemas de mezclas, teniendo en cuenta que la **ley de la aleación equivale al precio de la mezcla**.

$$C_1 \cdot L_1 + C_2 \cdot L_2 = (C_1 + C_2) \cdot L_a$$

Se tienen dos lingotes de plata, uno de ley 0.750 y otro de ley 0.950. ¿Qué peso hay que tomar de cada lingote para obtener 1800 g de plata de ley 0.900?

	1ª ley	2ª ley	Total
Nº de g	x	1800 − x	1800
Plata	0.750 · x	0.950 · (1800−x)	0.900 · 1800

$0.750 \cdot x + 0.950 \cdot (1\,800 - x) = 0.9 \cdot 1800$

$0.750\,x + 1\,710 - 0.950x = 1\,620$

$0.750x - 0.950x = 1\,620 - 1\,710$

$-0.2x = -90 \qquad x = 450$

1ª ley $\rightarrow$ **450 g**

2ª ley $\rightarrow$ **1350 g**

Problemas de grifos

En una hora el primer grifo llena $\mathbf{1/t_1}$ del depósito.

En una hora el segundo grifo llena $\mathbf{1/t_2}$ del depósito.

Si existe un desagüe

En una hora el desagüe vacía $\mathbf{1/t_3}$ del depósito.

En una hora los dos grifos juntos habrán llenado:

Sin desagüe

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{x}$$

Con desagüe

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3} = \frac{1}{x}$$

Un grifo tarda en llenar un depósito tres horas y otro grifo tarda en llenarlo cuatro horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenar los dos grifos juntos el depósito?

En una hora el primer grifo llena 1/3 del depósito.

En una hora el segundo grifo llena 1/4 del depósito.

En una hora los dos grifos juntos habrán llenado:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{4+3}{12} = \frac{1}{x} \qquad \frac{7}{12} = \frac{1}{x}$$

$7x = 12$ **$x = 12/7$ horas**

Problemas de móviles

Para plantear problemas sobre móviles que llevan velocidad constante se utilizan las fórmulas del movimiento rectilíneo uniforme:

espacio = velocidad × tiempo

$e = v \cdot t$

1er caso

Los móviles van en sentido contrario.

$\mathbf{e_{AB} + e_{BC} = e_{AB}}$

Dos ciudades A y B distan 300 km entre sí. A las 9 de la mañana parte de la ciudad A un coche hacia la ciudad B con una velocidad de 90 km/h, y de la ciudad B parte otro hacia la ciudad A con una velocidad de 60 km/h. Se pide:

1 El tiempo que tardarán en encontrarse.

$90t + 60t = 300 \qquad 150t = 300 \qquad$ **t = 2 horas**

2 La hora del encuentro.

Se encontraran a las **11 de la mañana** .

3 La distancia recorrida por cada uno.

$e_{AB} = 90 \cdot 2 =$ **180 km**

$e_{BC} = 60 \cdot 2 =$ **120 km**

2^{o} caso

Los móviles van en el mismo sentido.

$\mathbf{e_{AC} - e_{BC} = e_{AB}}$

Dos ciudades A y B distan 180 km entre sí. A las 9 de la mañana sale de un coche de cada ciudad y los dos coches van en el mismo sentido. El que sale de A circula a 90 km/h, y el que sale de B va a 60 km/h. Se pide:

1 El tiempo que tardarán en encontrarse.

$90t - 60t = 180 \qquad 30t = 180 \qquad$ **t = 6 horas**

2 La hora del encuentro.

Se encontraran a las **7 de la tarde** .

3 La distancia recorrida por cada uno.

$e_{AB} = 90 \cdot 6 =$ **540 km**

$e_{BC} = 60 \cdot 6 =$ **360 km**

3^{er} caso

Los móviles parten del mismo punto y con el mismo sentido.

$\mathbf{e_1 = e_2}$

Un coche sale de la ciudad A a la velocidad de 90 km/h. Tres horas más tarde sale de la misma ciudad otro coche en persecución del primero con una velocidad de 120 km/h. Se pide:

1 El tiempo que tardará en alcanzarlo.

$90t = 120 \cdot (t - 3)$

$90t = 120t - 360$ $\quad -30t = -360$ $\quad$ **t = 12 horas**

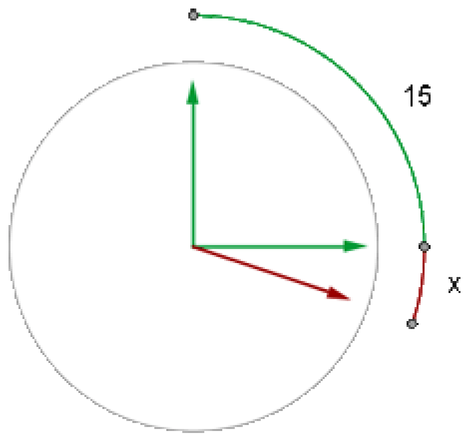
2 La distancia a la que se produce el encuentro.

$e_1 = 90 \cdot 12 =$ **1080 km**

Problemas de relojes

El ángulo o arco descrito que recorre el minutero es siempre 12 veces mayor que el arco que describe la aguja horaria.

Un reloj marca las 3 en punto. ¿A qué hora entre las 3 y las 4 se superpondrán las agujas?



x es el arco que describe la aguja horaria.

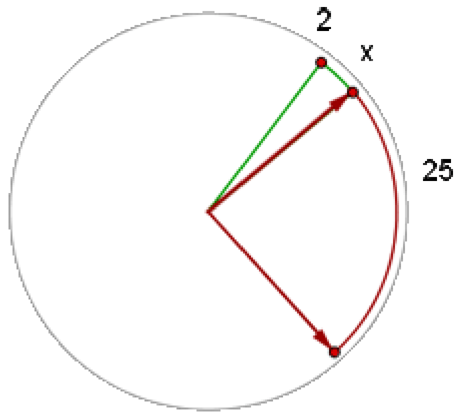
(15 + x) es el arco que describe el minutero.

$15 + x = 12x$

$x = 15/11$ min

Las agujas se superpondrán a la **3 h 16 min 21 s**

Un reloj marca las 2 en punto. ¿A qué hora formarán sus agujas por primera vez un ángulo recto?



Las agujas del reloj forman un ángulo recto a las 2 h 25 min y un poco más, que llamaremos x.

x es el arco que describe la aguja horaria.

25 + x, es el arco que describe el minutero.

$25 + x = 12x$

$x = 25/11$ min

Las agujas del reloj conformarán un ángulo de 90° a las **2h 27 min 16 s.**