Matrices

Concepto de matriz

Se denomina **matriz** a todo conjunto de números o expresiones ordenados en filas y columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada uno de los números de que consta la **matriz** se denomina **elemento**. Un elemento se distingue de otro por la posición que ocupa, es decir, la **fila** y la **columna** a la que pertenece.

El número de filas y columnas de una matriz se denomina **dimensión** de una matriz. Así, una matriz será de dimensión: 2x4, 3x2, 2x5,... El primer número es el indicativo del número filas y el segundo el de columnas. Sí la matriz tiene el mismo número de filas que de columna, (es cuadrada) se dice que es de orden: 2, 3, ...

El conjunto de **matrices** de **m filas** y **n columnas** se denota por $\mathbf{A_{mxn}}$. Un **elemento** cualquiera de la misma que se encuentra en la fila i y en la columna j se denota por por $\mathbf{a_{ij}}$.

Dos **matrices** son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas, son iguales.

Tipos de matrices

Matriz fila

Una **matriz fila** está constituida por una sola fila.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz columna

La **matriz columna** tiene una sola columna

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Matriz rectangular

La **matriz rectangular** tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su **dimensión mxn**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada

La **matriz cuadrada** tiene el mismo número de filas que de columnas.

Los elementos de la forma $\mathbf{a_{ii}}$ constituyen la **diagonal principal**.

La **diagonal secundaria** la forman los elementos con $\mathbf{i+j = n+1}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz nula

En una **matriz nula** todos los elementos son ceros.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior

En una **matriz triangular superior** los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

En una **matriz triangular inferior** los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

En una **matriz diagonal** todos los elementos situados por encima y por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar

Una **matriz escalar** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad o unidad

Una **matriz identidad** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta

Dada una matriz A, se llama **matriz traspuesta** de A y se designa por A^t a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz traspuesta

$(A^t)^t = A$

$(A + B)^t = A^t + B^t$

$(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$

$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Matriz regular

Una **matriz regular** es una matriz cuadrada que tiene inversa.

Matriz singular

Una **matriz singular** es aquella que no tiene inversa.

Matriz idempotente

Una matriz, A, es idempotente si:

$\mathbf{A^2 = A}$.

Matriz involutiva

Una matriz, A, es involutiva si:

$\mathbf{A^2 = I}$.

Matriz simétrica

Una **matriz simétrica** es una matriz cuadrada que verifica:

$\mathbf{A = A^t}$.

Matriz antisimétrica o hemisimétrica

Una **matriz antisimétrica o hemisimétrica** es una matriz cuadrada que verifica:

$\mathbf{A = -A^t}$.

Matriz ortogonal

Una matriz es ortogonal si verifica que:

$\mathbf{A \cdot A^t = I}$.

Suma de matrices

Dadas dos matrices de la misma dimensión, $\mathbf{A=(a_{ij})}$ y $\mathbf{B=(b_{ij})}$, se define la matriz suma como: $\mathbf{A+B=(a_{ij}+b_{ij})}$. Es decir, aquella matriz cuyos elementos se obtienen sumando los elementos de las dos matrices que ocupan la misma posición.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

Interna:

La suma de dos matrices de orden m x n es otra matriz dimensión m x n.

Asociativa:

A + (B + C) = (A + B) + C

Elemento neutro:

A + 0 = A

Donde **O** es la matriz nula de la misma dimensión que la matriz A.

Elemento opuesto:

A + (-A) = O

La matriz opuesta es aquella en que todos los elementos están cambiados de signo.

Conmutativa:

A + B = B + A

Producto de un escalar por una matriz

Dada una matriz $\mathbf{A=(a_{ij})}$ y un número real $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$, se define el producto de un número real por una matriz: a la matriz del mismo orden que A, en la que cada elemento está multiplicado por k.

$$\mathbf{kA=(k\, a_{ij})}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades

$a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A \qquad A \in M_{mxn},\ a, b \in \mathbb{R}$

$a \cdot (A+B) = a \cdot A + a \cdot B \quad A,B \in M_{mxn},\ a \in \mathbb{R}$

$(a+b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A \qquad A \in M_{mxn}$, a, b$\in \mathbb{R}$

$1 \cdot A = A \qquad\qquad A \in M_{mxn}$

Producto de matrices

Dos matrices A y B se dicen multiplicables si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B. El resultado es una matriz que tiene el número de filas de la primera y el de columnas de la segunda.

$$\mathbf{M_{m\,x\,n}\ x\ M_{n\,x\,p} = M_{m\,x\,p}}$$

El elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y sumándolos.

Ej.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \\ 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 5\cdot0+1\cdot2+0\cdot1 & 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices

Asociativa:

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Elemento neutro:

$A \cdot I = A$

Donde **I es la matriz identidad** del mismo orden que la matriz A.

No es Conmutativa:

$A \cdot B \neq B \cdot A$

Distributiva del producto respecto de la suma:

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Matriz inversa

Se denota por $\mathbf{A^{-1}}$, y es aquella que cumple que: $\mathbf{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$

Propiedades

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$

$(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$

Cálculo por el método de Gauss

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Para calcular la matriz inversa de A, que denotaremos como A^{-1}, seguiremos los siguientes pasos:

1º Construir una matriz del tipo **M = (A | I)**, es decir, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad **I** en la derecha.

Consideremos una matriz 3x3 arbitraria

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La ampliamos con la matriz identidad de orden 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2º Utilizando el método Gauss vamos a transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, que ahora está a la derecha, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa: A^{-1}.

$F_2 - F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_3 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2 - F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$F_1 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(-1) F_2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

Rango de una matriz: es el máximo número de filas (o columnas) que son linealmente independientes. El rango por filas o por columnas es el mismo.

Una fila (o columna) es **linealmente dependiente** de otra u otras cuando se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

Una fila (o columna) es **linealmente independiente** de otra u otras cuando no se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

El rango de una matriz A se simboliza: **rang(A)** o **r(A)**.

Cálculo por el método de Gauss

Podemos descartar una fila (o columna) si:

- Todos sus coeficientes son ceros.
- Hay dos filas (o columnas) iguales.
- Una fila (o columna) es proporcional a otra.
- Una fila (o columna) es combinación lineal de otras.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_3 = 2F_1$
F_4 es nula
$F_5 = 2F_2 + F_1$

r(A) = 2.

En general consiste en realizar transformaciones para hacer nulas el máximo número de líneas posible, y el rango será el número de filas no nulas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F_2 = F_2 - 3F_1}$$
$$\mathbf{F_3 = F_3 - 2F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto **r(A) = 3.**