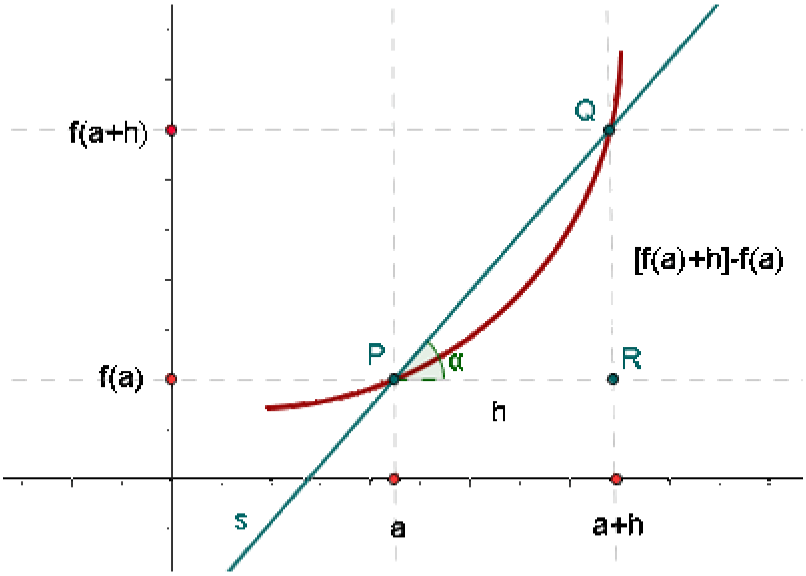
Tasa de variación

Consideremos una función y = f(x) y consideremos dos puntos próximos sobre el eje de abscisas "a" y "a+h", siendo "h" un número real que corresponde a la variación de x o (Δx), se lee “incremento de x”



Se llama **tasa de variación (T.V.)** de la función **en el intervalo [a, a+h]**, que se representa por **Δy (incremento de y)**, a la **diferencia entre las ordenadas** correspondientes a los puntos de abscisas **a** y **a+h**.

$\Delta y = [f(a+h) - f(a)]$

Tasa de variación media

Se llama tasa de variación media (T.V.M.) en intervalo [a, a+h], y se representa por , al cociente entre la tasa de variación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y la amplitud del intervalo considerado sobre el eje de abscisas, h ó Δx, esto es:

$$TVM[a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interpretación geométrica

La expresión anterior coincide con la pendiente de la recta secante a la función f(x), que pasa por los puntos de abscisas a y a+h.

$$m = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ya que en el triángulo PQR resulta que:

$$tg\alpha = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ejemplos:

Calcular la T.V.M. de la función f(x) = $x^2 - x$ en el intervalo [1,4].

$$TVM[1,4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{12-0}{3} = 4$$

El índice de la bolsa de Madrid pasó cierto año de 1350 a 1510. Hallar la tasa de variación media mensual.

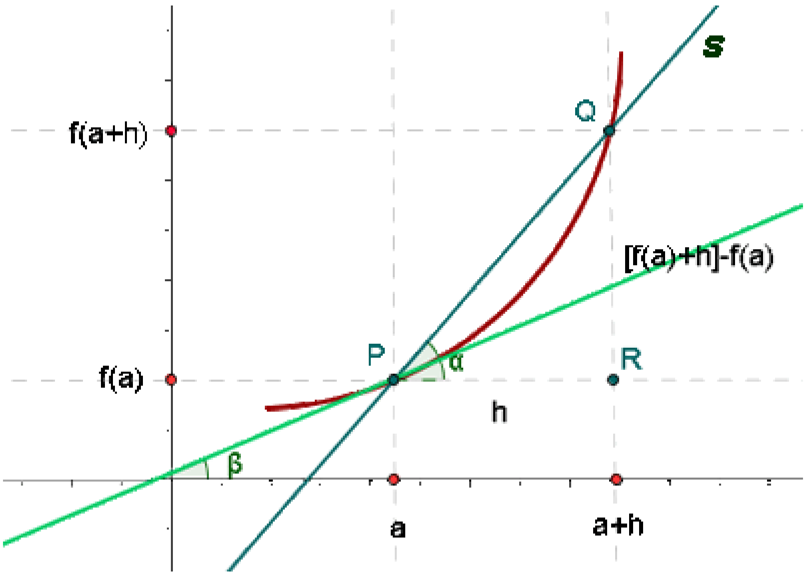
$$TVM = \frac{1510-1350}{12} = \frac{160}{12} = 13.33$$

Concepto de derivada

Derivada de una función en un punto

La derivada de la función f(x) en el punto x = a es el valor del límite, si existe, de la tasa de variación media, cuando el incremento de la variable tiende a cero. Se designa por f'(a).

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Ejemplos:

Hallar la derivada de la función f(x) = $3x^2$ en el punto x = 2.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h)^2 - 3 \cdot 2^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(4+4h+h^2) - 12}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 12h}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} (3h + 12) = 12$$

Calcular la derivada de la función f(x) = x^2 + 4x − 5 en x = 1.

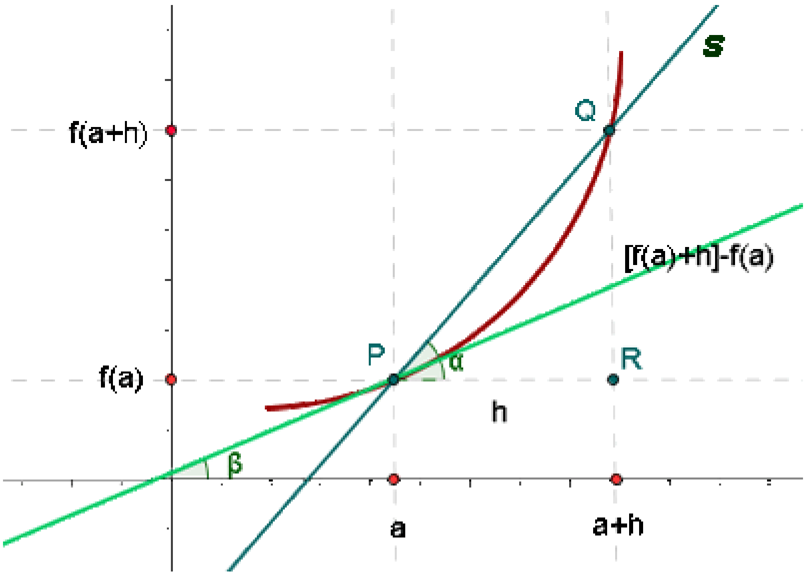
$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + 4(1+h) - 5 - \left(1^2 + 4 \cdot 1 - 5\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 4 + 4h - 5}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 6h}{h} =$$

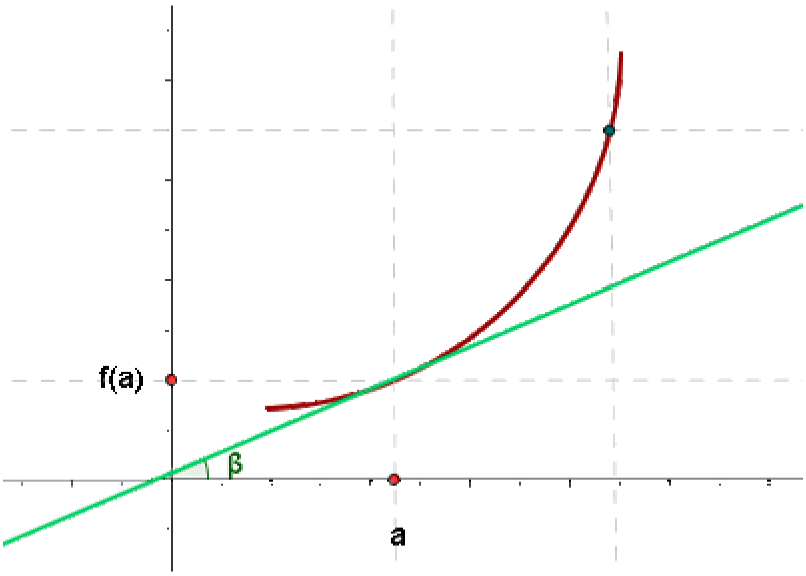
$$\lim_{h \to 0} \; (h + 6) = 6$$

Interpretación geométrica de la derivada



Cuando h tiende a 0, el punto Q tiende a confundirse con el P. Entonces la recta secante tiende a ser la recta tangente a la función f(x) en P, y por tanto el ángulo α tiende a ser β.

$$tg\, \beta = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$



La pendiente de la tangente a la curva en un punto es igual a la derivada de la función en ese punto.

$m_t = f'(a)$

Función derivada

La función derivada de una función f(x) es una función que asocia a cada número real su derivada, si existe. Se denota por f'(x).

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

EJEMPLOS:

Calcular la función derivada de $f(x) = x^2 - x + 1$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) + 1 - \left(x^2 - x + 1\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x - h + 1 - x^2 + x - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2 - h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\left(2x + h - 1\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(2x + h - 1\right) = 2x - 1$$

Hallar f'(−1), f'(0) y f'(1)

f'(−1) = 2(−1) − 1 = −3

f'(0) = 2(0) − 1 = −1

f'(1) = 2(1) − 1 = 1

Derivadas laterales

Derivada por la izquierda

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada por la derecha

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Una función es derivable en un punto si, y sólo si, es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto y las derivadas laterales coinciden.

Derivada de las funciones “a trozos”

En las funciones definidas a trozos es necesario estudiar las derivadas laterales en los puntos de separación de los distintos trozos.

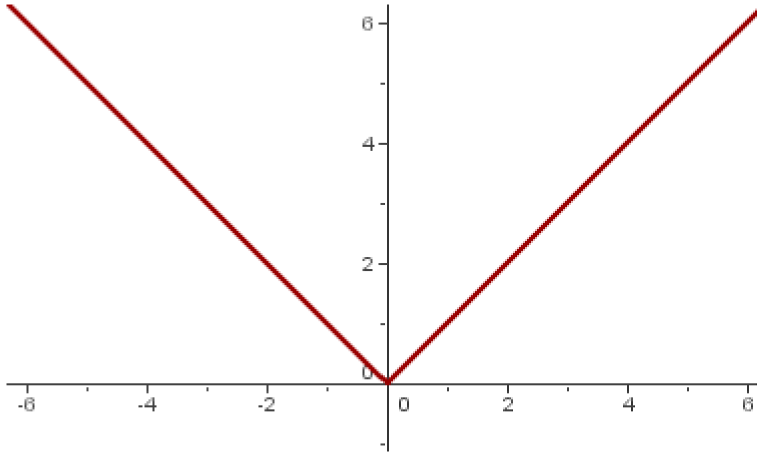
Estudiar la derivabilidad de la función f(x) = |x|.

$$f(x) = \begin{cases} -x & Si \quad x < 0 \\ x & Si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-(0+h) - 0}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{0+h-0}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Puesto que las derivadas laterales en x = 0 son distintas, la función no es derivable en dicho punto.



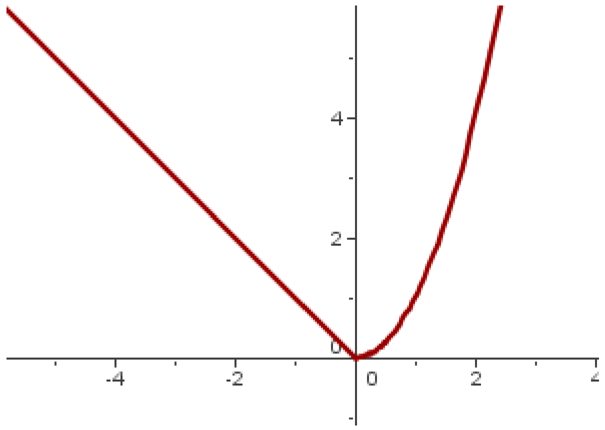
Las derivada laterales no coinciden en los picos ni en los puntos angulosos de las funciones. Por tanto en esos puntos no existe la derivada.

$$f(x)=\begin{cases} -x & Si \quad x<0 \\ x^2 & Si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-(0+h)-0}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(0+h)^2-0}{h}=\lim_{x\to 0^+}\frac{h^2}{h}=\lim_{x\to 0^+}h=0$$

No es derivable en x = 0.



Derivabilidad y continuidad

Si una función es derivable en un punto x = a, entonces es continua para x = a.

El reciproco es falso, es decir, hay funciones que son continuas en un punto y que, sin embargo, no son derivables.

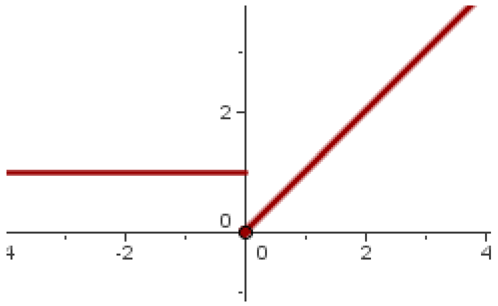
Estudiar la continuidad y derivabilidad de las funciones:

$$f(x)=\begin{cases}1 & Si \quad x<0 \\ x & Si \quad x\geq 0\end{cases}$$

En primer lugar estudiamos la continuidad en x = 0.

$$f(0)=0 \qquad \lim_{x\to 0^-} 1=1 \qquad \lim_{x\to 0^+} x=0$$

La función no es continua, por tanto tampoco es derivable.



$$f(x)=\begin{cases}0 & Si \quad x<0 \\ x & Si \quad x\geq 0\end{cases}$$

En primer lugar estudiamos la continuidad en x = 0.

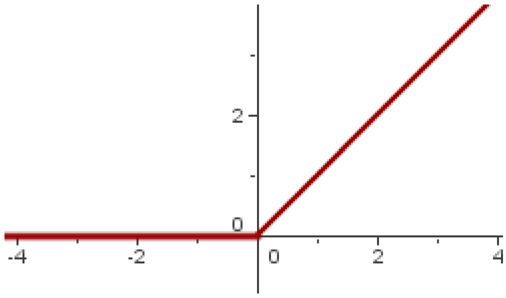
$$f(0)=0 \qquad \lim_{x\to 0^-} 0=0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x=0$$

La función es continua, por tanto podemos estudiar la derivabilidad.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{0-0}{h}=\lim_{x\to 0^-} 0=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{0+h-0}{h}=\frac{h}{h}=1$$

Como no coinciden las derivadas laterales no es derivable en x = 1.



f(x) = x^2 en x = 0.

La función es continua en x= 0, por tanto podemos estudiar la derivabilidad.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^2-0^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0}h=0$$

En x = 0 la función es continua y derivable.