Logaritmos

Definición de logaritmo

El **logaritmo** de un número, en una **base** dada, es el **exponente** al cual se debe elevar la **base** para obtener el número.

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x \qquad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Siendo **a** la **base**, **x** el **número** e **y** el **logaritmo**.

$\log_2 4 = 2$	$2^2 = 4$
$\log_2 1 = 0$	$2^0 = 1$

Calcular por la definición de logaritmo el valor de y

$\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y$	$\left(\frac{1}{2}\right)^y = 0.25$	$\left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$y = 2$
$\log_{\sqrt{5}} 125 = y$	$\sqrt{5}^y = 125$	$5^{\frac{1}{2}y} = 5^3$	$y = 6$
$\log 0.001 = y$	$10^y = 0.001$	$10^y = 10^{-3}$	$y = -3$
$\ln \frac{1}{e^5} = y$	$e^y = \frac{1}{e^5}$	$e^y = e^{-5}$	$y = -5$
$\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$	$\sqrt{3}^y = \sqrt[5]{\frac{1}{81}}$	$3^{\frac{1}{2}y} = 3^{-\frac{4}{5}}$	$y = -\frac{8}{5}$

Logaritmos decimales

Los **logaritmos decimales** son los que tienen **base 10**. Se representan por **log (x).**

Logaritmos neperianos o logaritmos naturales

Los **logaritmos naturales** o **logaritmos neperianos** son los que tienen **base e**. Se representan por **ln (x) o L(x).**

Propiedades de los logaritmos

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x \qquad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

De la **definición de logaritmo** podemos deducir:

No existe el **logaritmo** de un número con **base negativa**.

$$\nexists \log_{-a} x$$

No existe el **logaritmo** de un **número negativo**.

$$\nexists \log_a (-x)$$

No existe el logaritmo de cero.

$$\nexists \log_a 0$$

El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base).

$$\log_a 1 = 0$$

El logaritmo en base a de a es uno.

$$\log_a a = 1$$

El logaritmo en base a de una potencia en base a es igual al exponente.

$$\log_a a^n = n$$

1 El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

2 El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_2\left(\frac{8}{4}\right) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$$

3 El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_a(x^n) = n \log_a x$$

$$\log_2(8^4) = 4\log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$$

4 El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz.

$$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\log_a x$$

$$\log_2\left(\sqrt[4]{8}\right) = \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

5 Cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ej: Vamos a calcular $log_2 4$

$$\log_2 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Ecuaciones logarítmicas

Las **ecuaciones logarítmicas** son aquellas **ecuaciones** en la que la **incógnita** aparece afectada por un **logaritmo**.

Para **resolver ecuaciones logarítmicas** vamos a tener en cuenta las propiedades de los logaritmos. En general si:

$$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$$

Ejemplos de ecuaciones logarítmicas

Ejemplo 1

$$\log 2 + \log\left(11 - x^2\right) = 2\log(5 - x)$$

$$\log\left[2\left(11 - x^2\right)\right] = \log(5 - x)^2$$

$$2\left(11 - x^2\right) = (5 - x)^2$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x = 3 \qquad 11 - 3^2 > 0 \qquad 5 - 3 > 0$$

$$x = \frac{1}{3} \qquad 11 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 0 \qquad 5 - \frac{1}{3} > 0$$

Ejemplo 2

$$2\log x = 3 + \log\frac{x}{10}$$

$$2\log x = 3 + \log x - \log 10$$

$$\log x = 3 - 1 \qquad \log x = 2 \qquad x = 100$$

Ejemplo 3

$$\log(2x-7) - \log(x-1) = \log 5$$

$$\log\frac{2x-7}{x-1} = \log 5 \qquad \frac{2x-7}{x-1} = 5 \qquad x = 4$$

Ejemplo 4

$$\log x + \log(x+3) = 2\log(x+1)$$

$$\log\left[x(x+3)\right] = \log(x+1)^2$$

$$x(x+3) = (x+1)^2$$

$$x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \qquad x = 1$$

Ejemplo 5

$$\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2$$

$$\log(16-x^2) = 2\log(3x-4)$$

$$\log(16-x^2) = \log(3x-4)^2 \qquad (16-x^2) = (3x-4)^2$$

$$10x^2 - 24x = 0 \qquad x = 0 \qquad x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$