

Concepto de función

Función real de variable real es toda correspondencia f que asocia a cada elemento de un determinado subconjunto de números reales, llamado dominio, otro número real (uno y sólo uno).

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = y$$

El subconjunto en el que se define la función se llama **dominio** o **campo existencia de la función**. Se designa por D .

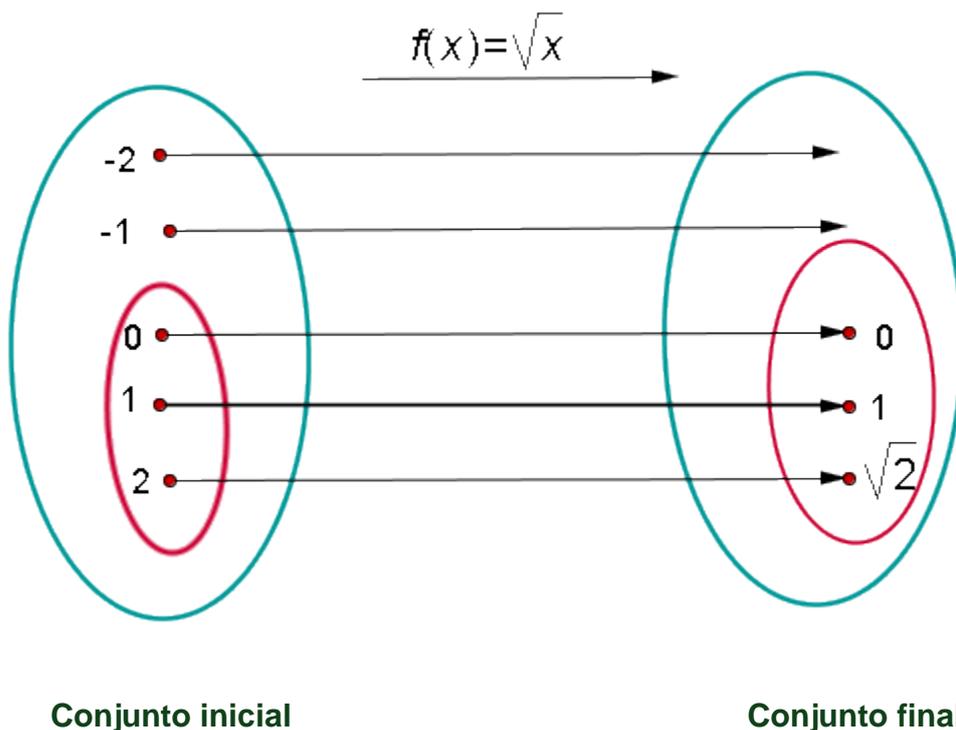
El número x perteneciente al **dominio** de la función recibe el nombre de **variable independiente**.

Al número, y , asociado por f al valor x , se le llama **variable dependiente**. La imagen de x se designa por $f(x)$. Luego

$$y = f(x)$$

Se denomina **recorrido** de una función al **conjunto de los valores reales que toma la variable y o $f(x)$** .

$$x \longrightarrow \sqrt{x}$$



Dominio de una función

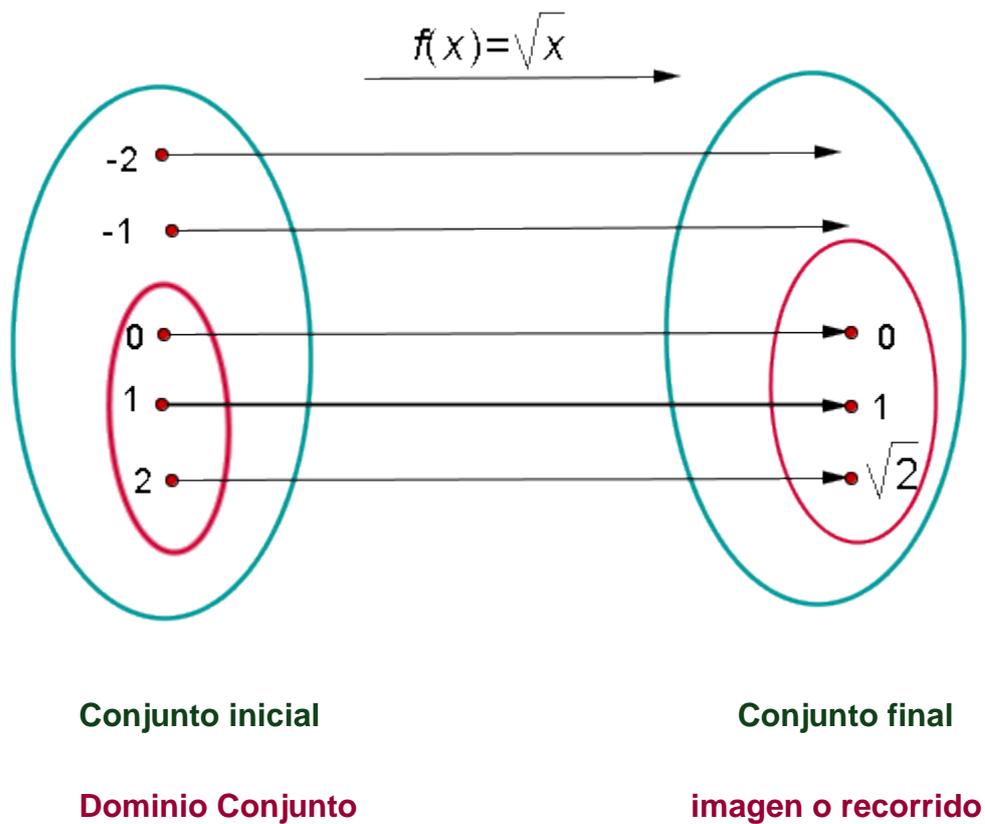
El dominio es el conjunto de elementos que tienen imagen.

$$D = \{x \in \mathbb{R} / \exists f(x)\}$$

Recorrido de una función

El recorrido es el conjunto de elementos que son imágenes.

$$R = \{f(x) / x \in D\}$$



Estudio del dominio de una función

Dominio de la función polinómica entera

El dominio es \mathbb{R} , cualquier número real tiene imagen.

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \mathbf{D = \mathbb{R}}$$

Dominio de la función racional

El dominio es \mathbb{R} menos los valores que anulan al denominador (no puede existir un número cuyo denominador sea cero).

$$f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad D = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

Dominio de la función irracional de índice impar

El dominio es \mathbb{R} .

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6} \quad D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 5x + 6}} \quad D = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

Dominio de la función irracional de índice par

El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \quad D = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$$



$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x + 4}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 & (-\infty, 2] \cup [3, \infty) \\ x + 4 = 0 & x \neq -4 \end{cases}$$

$$D = (-\infty, -4) \cup (-4, 2] \cup [3, \infty)$$

$$f(x) = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \quad D = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x^2 - 5x + 6}}$$

$$\frac{x+4}{x^2 - 5x + 6} \geq 0 \quad D = [-4, 2) \cup (3, \infty)$$



Dominio de la función logarítmica

El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor que cero.

$$f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \quad D = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$

Dominio de la función exponencial

El dominio es \mathbb{R} .

Dominio de la función seno

El dominio es \mathbb{R} .

Dominio de la función coseno

El dominio es \mathbb{R} .

Sistema de coordenadas cartesianas

Un sistema de coordenadas cartesianas es un par de rectas graduadas, perpendiculares, que se cortan en un punto $O(0,0)$, llamado **origen de coordenadas**. A la recta horizontal se llama **eje de abscisas**, y a su perpendicular por O , **eje de ordenadas**.

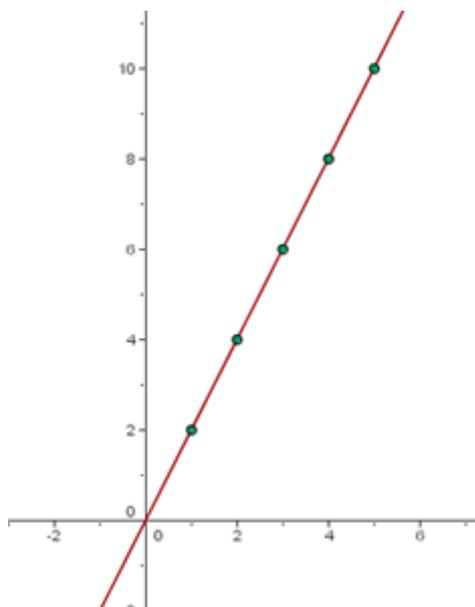
Se puede representar una función en el plano haciendo corresponder a cada par del grafo un punto determinado, marcando en el eje de abscisas el valor de su variable y en el de ordenadas, su correspondiente imagen

Gráfica de funciones

Si f es una función real, **a cada par $(x, y) = (x, f(x))$ determinado por la función f le corresponde en el plano cartesiano un único punto $P(x, y) = P(x, f(x))$** . El valor de x debe pertenecer al dominio de definición de la función.

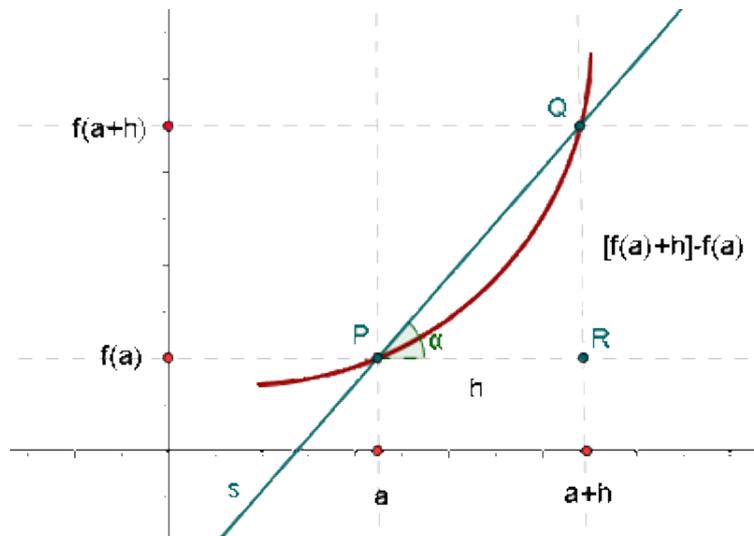
Como el conjunto de puntos pertenecientes a la función es ilimitado, se disponen en una tabla de valores algunos de los pares correspondientes a puntos de la función. Estos valores, llevados sobre el plano cartesiano, determinan puntos de la gráfica. Uniendo estos puntos con línea continua se obtiene la **representación gráfica de la función**.

x	1	2	3	4	5
f(x)	2	4	6	8	10

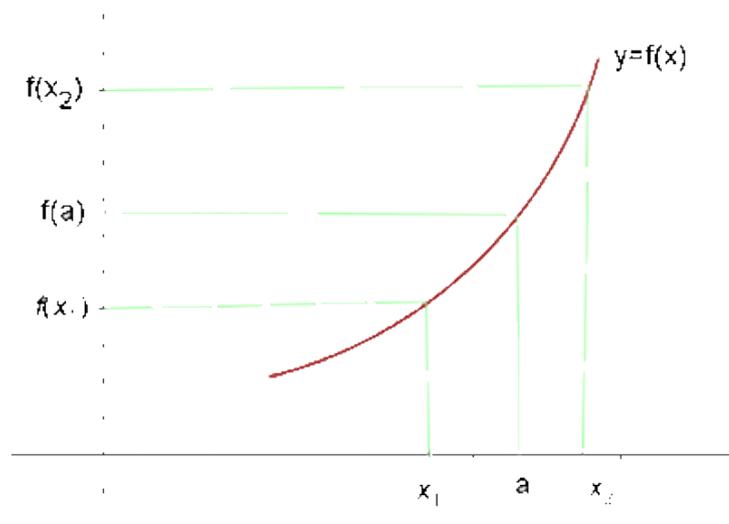


Crecimiento y decrecimiento

El incremento de una función se llama tasa de variación, y mide el cambio de la función al pasar de un punto a otro. $t.v. = f(x+h) - f(x)$



Función estrictamente creciente



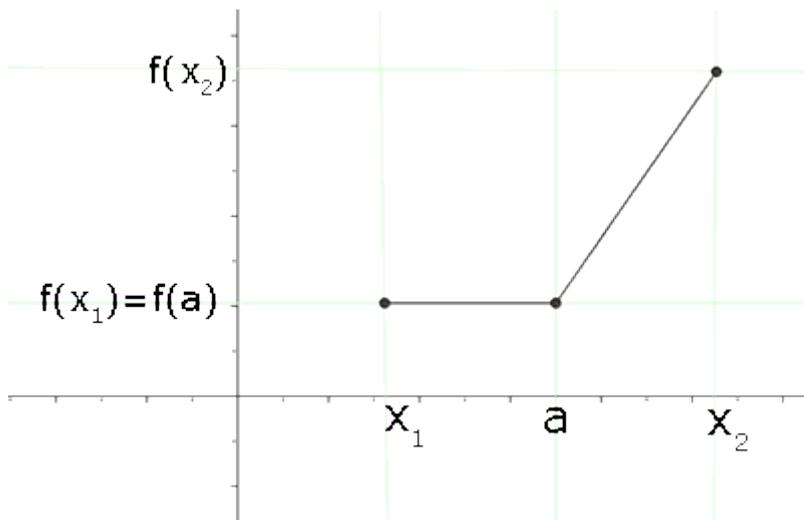
f es estrictamente creciente en a si sólo si existe un entorno de a , tal que para toda x que pertenezca la entorno de a se cumple:

$$x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$$

$$x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

La tasa de variación es positiva.

Función creciente



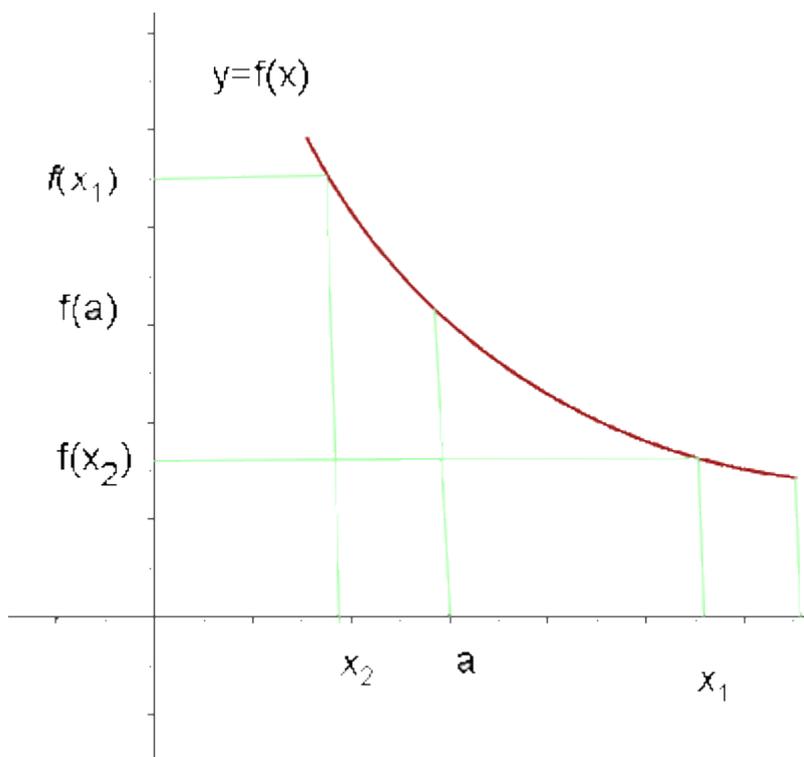
f es creciente en a si sólo si existe un entorno de a , tal que para toda x que pertenezca la entorno de a se cumple:

$$x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$$

$$x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$$

La tasa de variación es positiva o igual a cero.

Función estrictamente decreciente



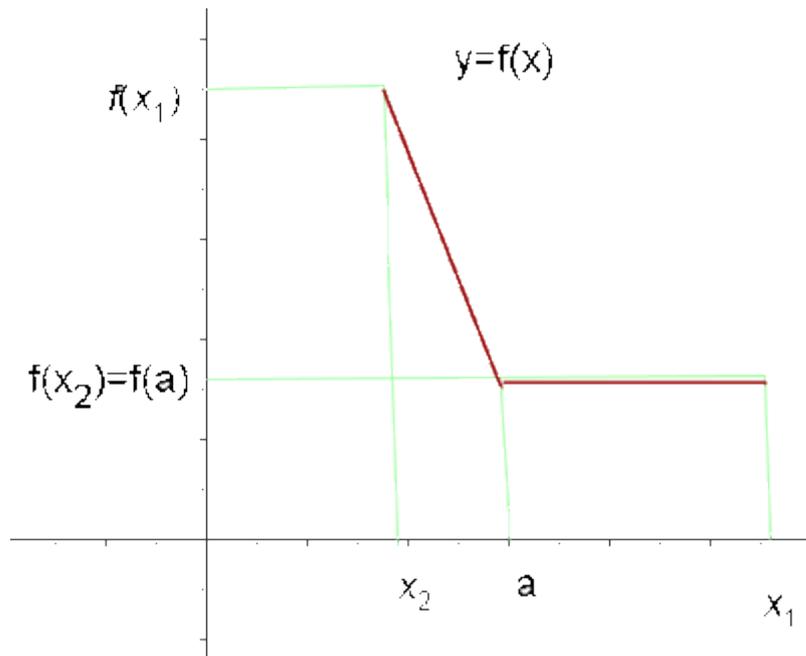
f es estrictamente decreciente en a si sólo si existe un entorno de a, tal que para toda x que pertenezca la entorno de a se cumple:

$$x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

$$x < a \Rightarrow f(x) > f(a)$$

La tasa de variación es negativa.

Función decreciente



f es decreciente en a si sólo si existe un entorno de a, tal que para toda x que pertenezca la entorno de a se cumple:

$$x > a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$$

$$x < a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$$

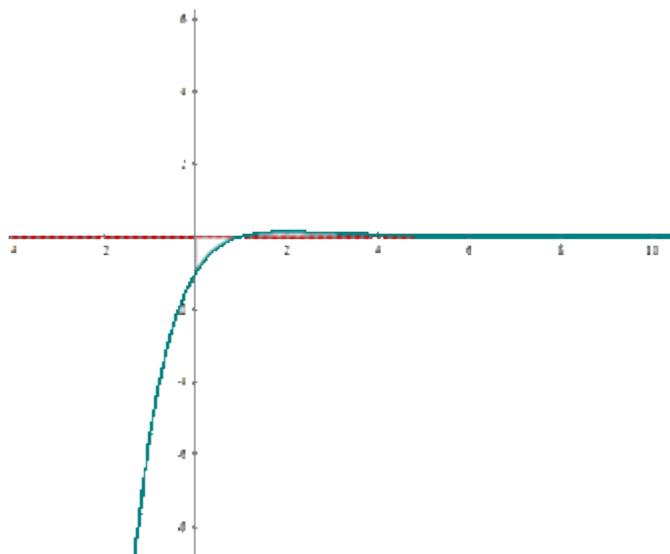
La tasa de variación es negativa o igual a cero.

Funciones acotadas

Función acotada superiormente

Una función f está acotada superiormente si existe un número real k tal que para toda x es $f(x) \leq k$.

El número k se llama cota superior.

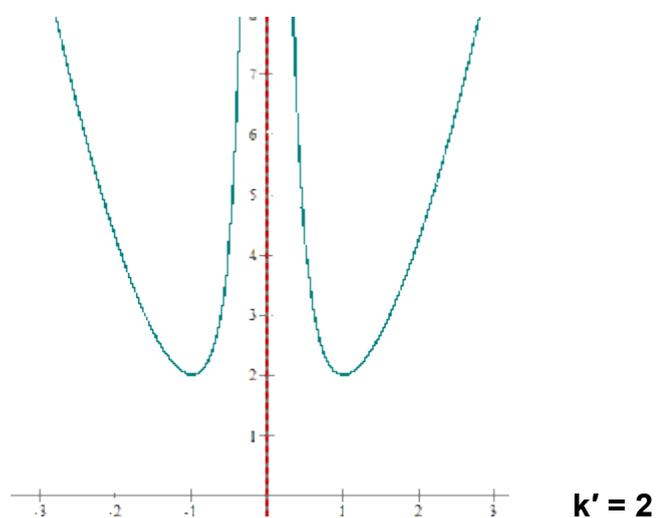


$$k=0.135$$

Función acotada inferiormente

Una función f está acotada inferiormente si existe un número real k' tal que para toda x es $f(x) \geq k'$.

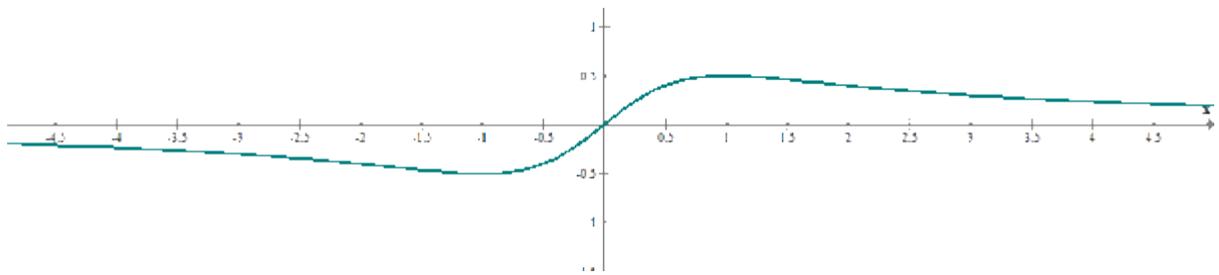
El número k' se llama cota inferior.



Función acotada

Una función está acotada si lo está superior e inferiormente.

$$k' \leq f(x) \leq k$$

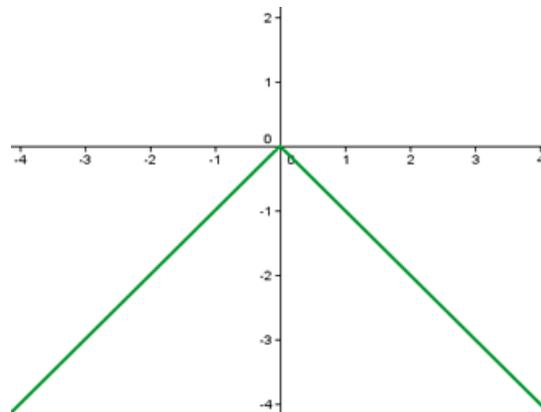


$$k = \frac{1}{2} \quad k' = -\frac{1}{2}$$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Máximo absoluto

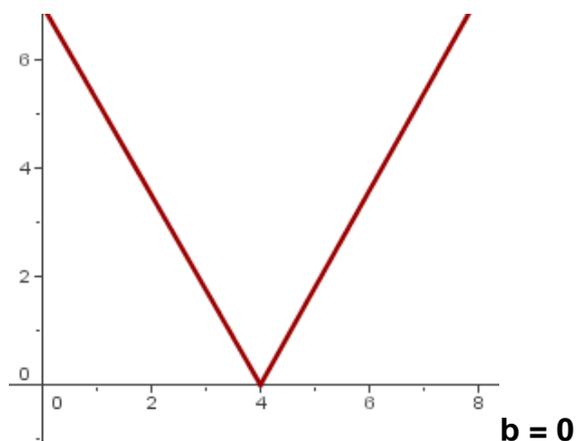
Una función tiene su máximo absoluto en el $x = a$ si la ordenada es mayor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.



$$a = 0$$

Mínimo absoluto

Una función tiene su mínimo absoluto en el $x=b$ si la ordenada es menor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.

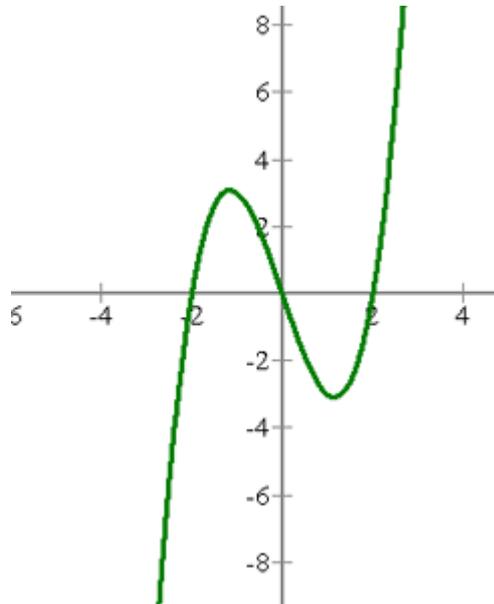


$$b = 0$$

Máximo y mínimo relativo

Una función f tiene un máximo relativo en el punto a si $f(a)$ es mayor o igual que los puntos próximos al punto a .

Una función f tiene un mínimo relativo en el punto b si $f(b)$ es menor o igual que los puntos próximos al punto b .



$$a = 3.08 \quad b = -3.08$$

Funciones simétricas

Simetría respecto del eje de ordenadas. Función par

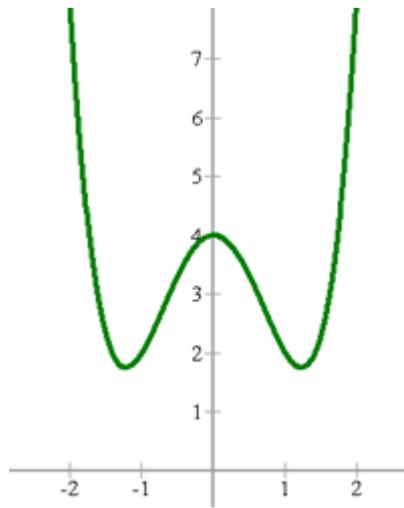
Una función f es simétrica respecto del eje de ordenadas cuando para todo x del dominio se verifica:

$$f(-x) = f(x)$$

Las funciones simétricas respecto del eje de ordenadas reciben el nombre de **funciones pares**.

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 4 = x^4 - 3x^2 + 4 = f(x)$$

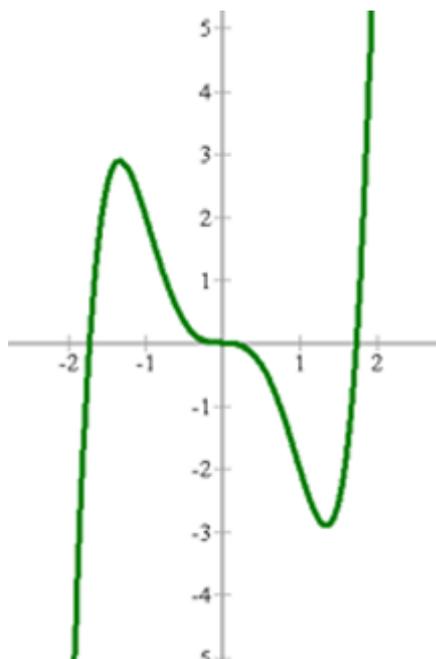


Simetría respecto al origen. Función impar

Una función f es simétrica respecto al origen cuando para todo x del dominio se verifica:

$$f(-x) = -f(x)$$

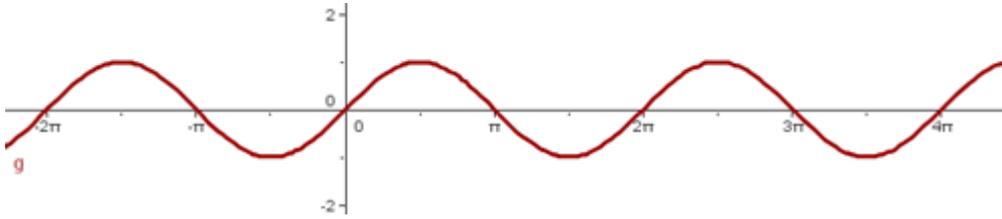
Las funciones simétricas respecto al origen reciben el nombre de funciones impares.



Funciones periódicas

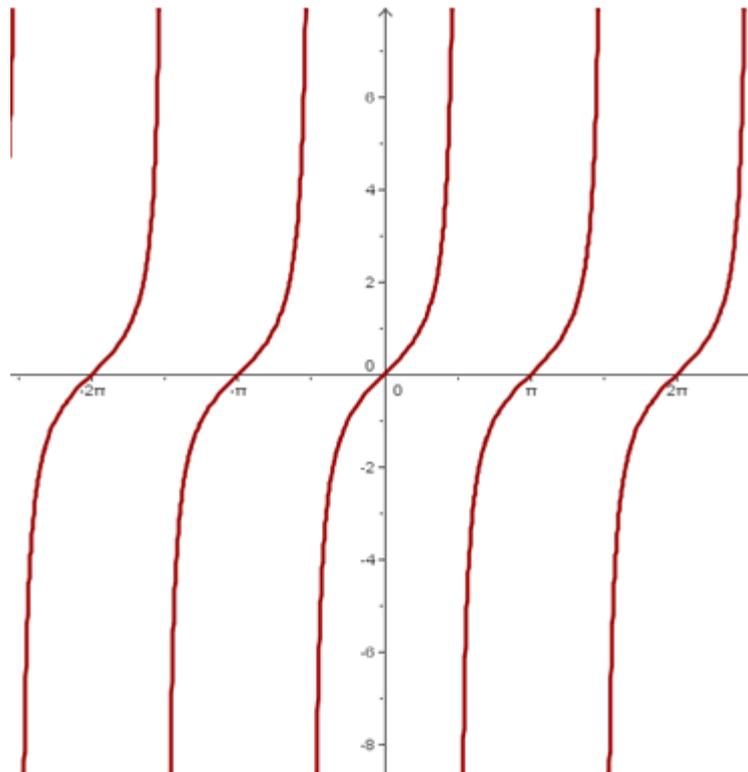
Una función $f(x)$ es periódica, de período T , si para todo número entero z , se verifica:

$$f(x) = f(x + z T)$$



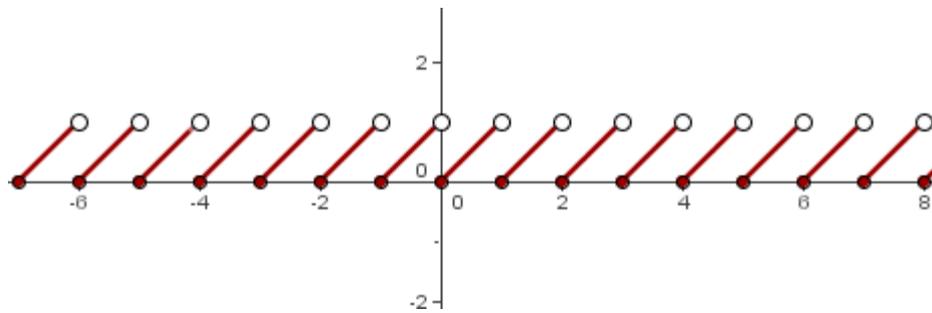
La función $f(x) = \text{sen } x$ es periódica de periodo 2π , ya que cumple que:

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x$$



La función $f(x) = \text{tg } x$ es periódica de periodo π , ya que cumple que:

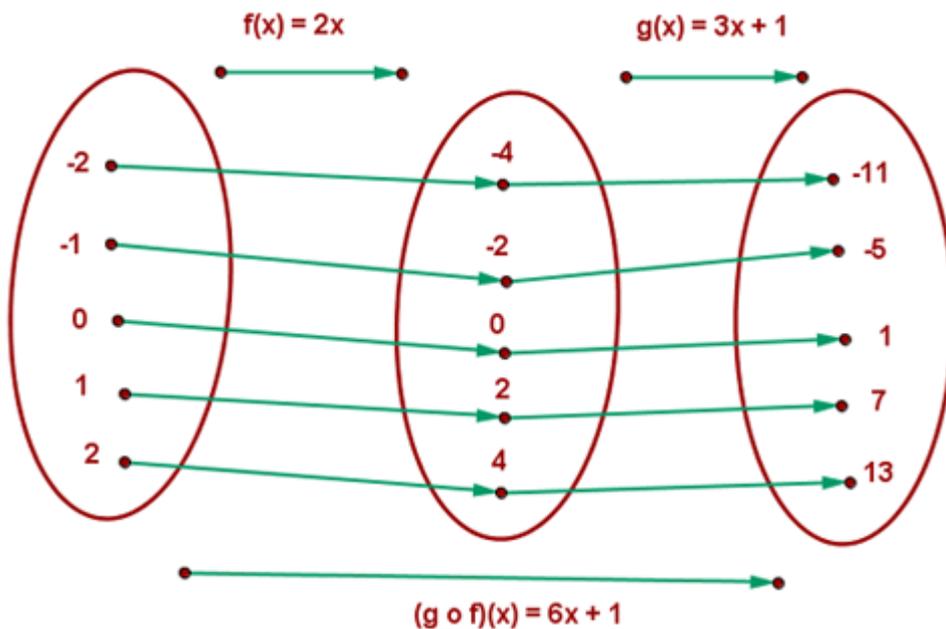
$$\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$$



La función mantisa, $f(x) = x - E(x)$, es periódica de periodo 1.

Composición de funciones

Si tenemos dos funciones: $f(x)$ y $g(x)$, de modo que el dominio de la 2ª esté incluido en el recorrido de la 1ª, se puede definir una nueva función que asocie a cada elemento del dominio de $f(x)$ el valor de $g[f(x)]$.



$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x) = 3(2x) + 1 = 6x + 1$$

$$(g \circ f)(1) = 6 \cdot 1 + 1 = 7$$

Dominio

$$D_{(g \circ f)} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$$

Propiedades

Asociativa:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

No es conmutativa.

$$f \circ g \neq g \circ f$$

El elemento neutro es la **función identidad**, $i(x) = x$.

$$f \circ i = i \circ f = f$$

Ejemplos:

Sean las funciones:

$$f(x) = 3x + 2 \quad g(x) = \frac{x + 3}{2x + 1}$$

$$g \circ f = g[f(x)] = g(3x + 2) =$$

$$= \frac{3x + 2 + 3}{2(3x + 2) + 1} = \frac{3x + 5}{6x + 5}$$

$$f \circ g = f[g(x)] = f\left(\frac{x + 3}{2x + 1}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{x + 3}{2x + 1}\right) + 2 = \frac{7x + 11}{2x + 1}$$

$$f(x) = \frac{x - 2}{2x + 1} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$g \circ f = g[f(x)] = g\left(\frac{x - 2}{2x + 1}\right) = \sqrt{\frac{x - 2}{2x + 1}}$$

$$f \circ g = f[g(x)] = f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x} + 1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x - 1} \quad g(x) = \frac{2x - 1}{2x + 1} \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

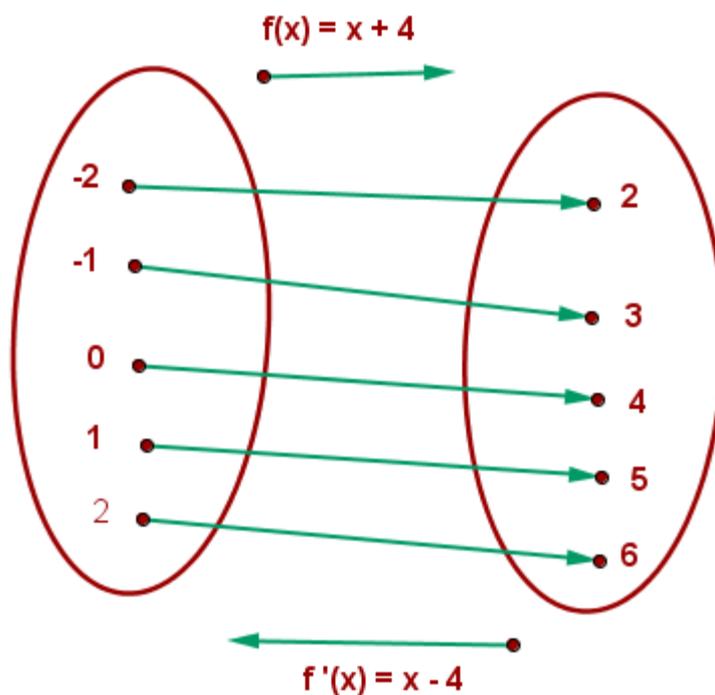
$$g \circ f = g[f(x)] = g\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{2x-1}\right) - 1}{2\left(\frac{1}{2x-1}\right) + 1} = \frac{-2x+3}{2x+1}$$

$$h \circ g \circ f = h[g \circ f(x)] = h\left(\frac{-2x+3}{2x+1}\right) = \frac{1}{\frac{-2x+3}{2x+1}} = \frac{2x+1}{-2x+3}$$

Función inversa o recíproca

Se llama **función inversa o recíproca de f** a otra función f^{-1} que cumple que:

Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$.



Podemos observar que:

El dominio de f^{-1} es el recorrido de f .

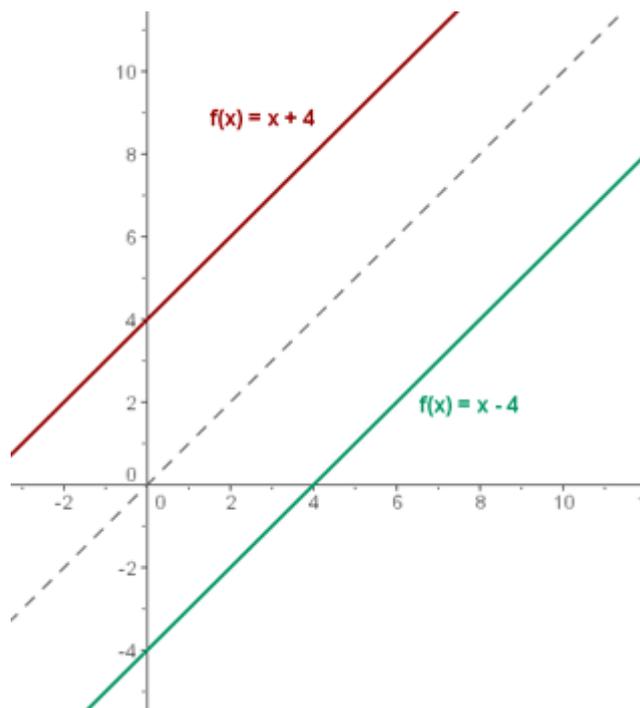
El recorrido de f^{-1} es el dominio de f .

Si queremos hallar el recorrido de una función tenemos que hallar el dominio de su función inversa.

Si dos **funciones** son **inversas** su **composición** es la **función identidad**.

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$$

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



Hay que distinguir entre la **función inversa**, $f^{-1}(x)$, y la **inversa de una función**, $\frac{1}{f(x)}$.

Cálculo de la función inversa

- 1 Se escribe la ecuación de la función en x e y .
- 2 Se despeja la variable x en función de la variable y .
- 3 Se intercambian las variables.

Ejemplos:

Calcular la **función inversa** de:

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

$$y(x - 1) = 2x + 3$$

$$2xy - y = 2x + 3$$

$$2xy - 2x = y + 3$$

$$x(y-2)y+3 \qquad x = \frac{y+3}{y-2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

Vamos a comprobar el resultado para $x = 2$

$$f(2) = \frac{7}{1} = 7$$

$$f^{-1}(7) = \frac{10}{5} = 2$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$y = \sqrt[3]{x-1}$$

$$y^3 = x - 1$$

$$x = y^3 + 1$$

$$f^{-1}(x) = x^3 + 1$$

$$f(x) = x^2$$

$$y = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{y}$$

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$$

No es una función