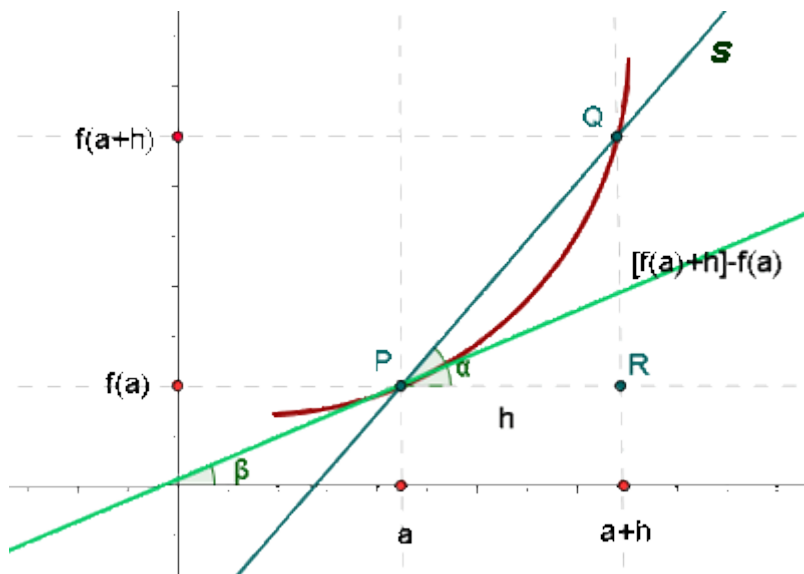


Ecuación de la recta tangente

Pendiente de la recta tangente



La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es la derivada de la función en dicho punto.

$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$

Recta tangente a una curva en un punto

La recta tangente a una curva en un punto es aquella que pasa por el punto $(a, f(a))$ y cuya pendiente es igual a $f'(a)$.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ paralela a la recta $3x + y - 2 = 0$.

Sea el punto de tangencia $(a, f(a))$

$$m = -3$$

$$f'(a) = 2a - 5$$

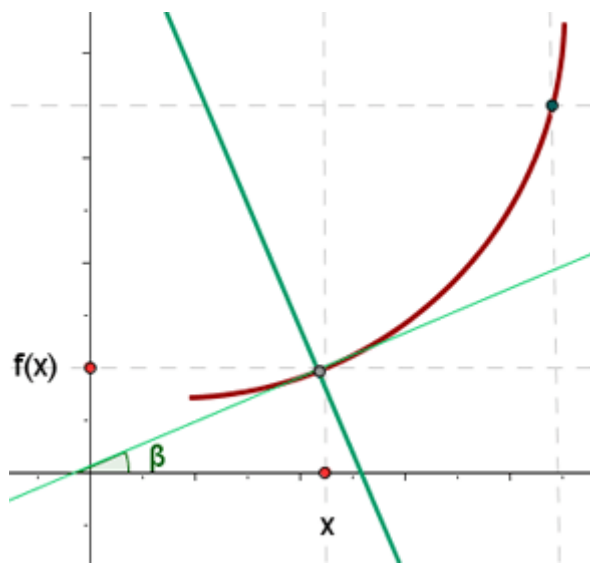
$$2a - 5 = -3a = 1$$

$$P(1, 2)$$

$$y - 2 = -3(x - 1) \quad y = -3x + 5$$

Ecuación de la recta normal

Pendiente de la recta normal



La pendiente de la recta normal a una curva en un punto es la opuesta de la inversa de la pendiente de la recta tangente, por ser rectas perpendiculares entre sí.

$$m_n = -\frac{1}{m_t}$$

Es decir, es la opuesta de la inversa de la derivada de la función en dicho punto.

$$m_n = -\frac{1}{f'(a)}$$

Recta normal a una curva en un punto

La recta normal a una curva en un punto a es aquella que pasa por el punto $(a, f(a))$ y cuya pendiente es igual a la inversa de la opuesta de $f'(a)$.

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la parábola $y = x^2 + x + 1$ paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Sea el punto de tangencia (a, b)

$$m = 1$$

$$f'(a) = 2a + 1 = 1 \quad a = 0$$

Punto de tangencia: (0, 1)

Recta tangente:

$$y - 1 = x \quad \mathbf{y = x + 1}$$

Recta normal:

$$m = -1 \quad P(0, 1)$$

$$y - 1 = -x \quad \mathbf{y = -x + 1}$$

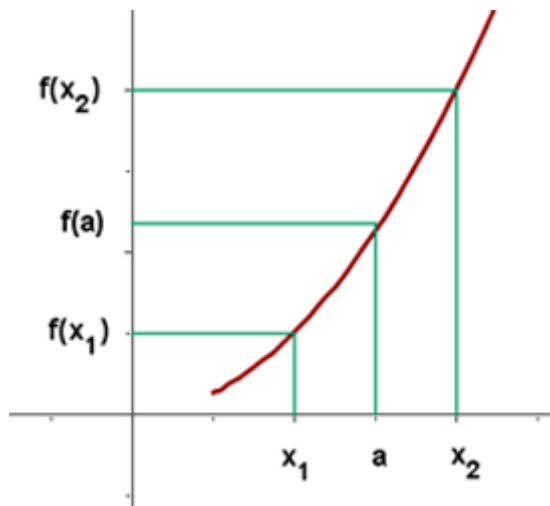
Crecimiento y decrecimiento

Función estrictamente creciente

f es estrictamente creciente en $a \Leftrightarrow \exists E(a) / \forall x \in E(a)$:

$$x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$$

$$x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

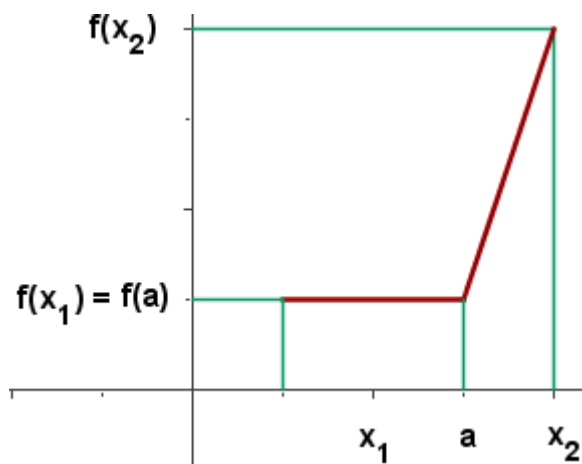


Función creciente

f es creciente en $a \Leftrightarrow \exists E(a) / \forall x \in E(a)$:

$$x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$$

$$x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$$

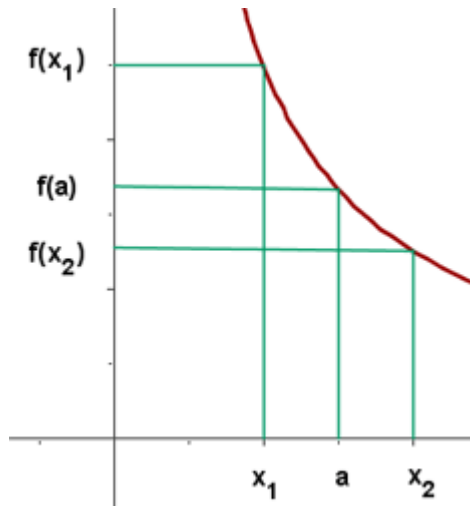


Función estrictamente decreciente

f es estrictamente decreciente en $a \Leftrightarrow \exists E(a) / \forall x \in E(a)$:

$$x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

$$x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

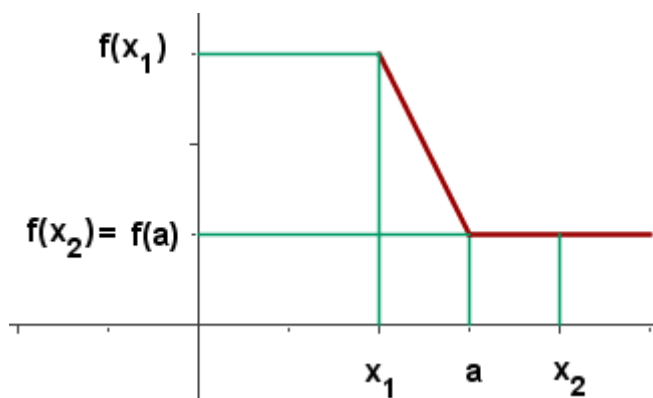


Función decreciente

f es decreciente en $a \Leftrightarrow \exists E(a) / \forall x \in E(a)$:

$$x > a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$$

$$x > a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$$



Crecimiento

Si f es derivable en a :

f es estrictamente creciente en $a \Rightarrow f'(a) > 0$

Decrecimiento

Si f es derivable en a :

f es estrictamente decreciente en $a \Rightarrow f'(a) < 0$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Crecimiento

Si f es derivable en a :

f es estrictamente creciente en $a \Rightarrow f'(a) > 0$

Decrecimiento

Si f es derivable en a :

f es estrictamente decreciente en $a \Rightarrow f'(a) < 0$

Cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Para hallar su crecimiento y decrecimiento vamos a realizar los siguientes pasos:

1. Derivar la función.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

2. Obtener las raíces de la derivada primera, para ello hacemos: $f'(x) = 0$.

$$3x^2 - 3 = 0 \quad x = -1 \quad x = 1$$

3. Formamos intervalos abiertos con los ceros (raíces) de la derivada primera y los puntos de discontinuidad (si los hubiese)



4. Tomamos un valor de cada intervalo, y hallamos el signo que tiene en la derivada primera.

Si $f'(x) > 0$ es creciente.

Si $f'(x) < 0$ es decreciente.

Del intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$, por ejemplo.

$$f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 > 0$$

Del intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$, por ejemplo.

$$f'(0) = 3(0)^2 - 3 < 0$$

Del intervalo $(1, \infty)$ tomamos $x = 2$, por ejemplo.

$$f'(2) = 3(2)^2 - 3 > 0$$



5. Escribimos los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

De crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

De decrecimiento: $(-1, 1)$

Ejemplo de intervalos de crecimiento y decrecimiento

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Dominio

$$(x-1)^2 = 0 \quad x = 1 \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \quad \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0$$

$$x = 0 \quad x = 3$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	+	-	+
	\nearrow	\nearrow	\searrow	\nearrow

Creciente

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$$

Decreciente

$$(1, 3)$$

Extremos relativos o locales

Si f es derivable en a , a es un **extremo relativo o local** si:

1. Si $f'(a) = 0$.

2. Si $f''(a) \neq 0$.

Máximos locales

Si f y f' son derivables en a , a es un **máximo relativo o local** si se cumple:

1. $f'(a) = 0$

2. $f''(a) < 0$

Mínimos locales

Si f y f' son derivables en a , a es un **mínimo relativo o local** si se cumple:

1. $f'(a) = 0$

2. $f''(a) > 0$

Cálculo de máximos y mínimos

Estudiar los máximos y mínimos de:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Para hallar sus extremos locales, seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada primera y calculamos sus raíces.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

$$x = -1 \quad x = 1.$$

2. Realizamos la 2ª derivada, y calculamos el signo que toman en ella los ceros de derivada primera y si:

$f''(x) > 0$ Tenemos un mínimo.

$f''(x) < 0$ Tenemos un máximo.

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(-1) = -6 \text{ Máximo}$$

$$f''(1) = 6 \text{ Mínimo}$$

3. Calculamos la imagen (en la función) de los extremos relativos.

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$

Máximo(-1, 4) Mínimo(-1, 0)

Concavidad y convexidad

Si f y f' son derivables en a

$$\begin{cases} f''(a) > 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava en } a \\ f''(a) < 0 \Rightarrow f \text{ es convexa en } a \end{cases}$$

Hemos tomado el criterio que el valle tiene forma cóncava y la montaña forma convexa.

Intervalos de concavidad y convexidad

Estudiar los intervalos la concavidad y la convexidad de la función:

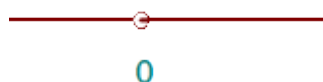
$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Para estudiar la concavidad y la convexidad, efectuaremos los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada segunda y calculamos sus raíces.

$$f''(x) = 6x - 6x = 0x = 0.$$

2. Formamos intervalos abiertos con los ceros (raíces) de la derivada segunda y los puntos de discontinuidad (si los hubiese).



3. Tomamos un valor de cada intervalo, y hallamos el signo que tiene en la derivada segunda.

Si $f''(x) > 0$ es cóncava.

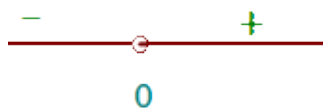
Si $f''(x) < 0$ es convexa.

Del intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$, por ejemplo.

$$f''(-1) = 6(-1) < 0 \text{ Convexa.}$$

Del intervalo $(0, \infty)$ tomamos $x = 1$, por ejemplo.

$$f''(1) = 6(1) > 0 \text{ Cóncava.}$$



4. Escribimos los intervalos:

Concavidad: $(0, \infty)$

Convexidad: $(-\infty, 0)$

Ejemplo de intervalos de concavidad y convexidad

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Dominio

$$(x-1)^2 = 0 \quad x = 1 \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \quad \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0$$

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4} \quad \frac{6x}{(x-1)^4} = 0$$

$$x = 0$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+	+
	∩	∪	∪

Cóncava

$$(0, 1) \cup (1, \infty)$$

Convexa

$$(-\infty, 0)$$

Puntos de inflexión de una función

En ellos la función no es cóncava ni convexa sino que hay cambio de concavidad a convexidad o viceversa.

Si f y f' son derivables en a

a es un punto de inflexión $\Rightarrow f''(a) = 0$

$$f'''(a) \neq 0$$

Estudio de los puntos de inflexión

Calcular los puntos de inflexión de:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Para hallar los puntos de inflexión, seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada segunda y calculamos sus raíces.

$$f''(x) = 6x \quad 6x = 0 \quad x = 0.$$

2. Realizamos la derivada tercera, y calculamos el signo que toman en ella los ceros de derivada segunda y si:

$f'''(x) \neq 0$ Tenemos un punto de inflexión.

$$f'''(x) = 6 \quad \text{Será un punto de inflexión.}$$

3. Calculamos la imagen (en la función) del punto de inflexión.

$$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$$

Punto de inflexión: (0, 2)

Máximos, mínimos y puntos de inflexión

$f'(a) > 0$: f creciente en a

$f'(a) < 0$: f decreciente en a

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} f''(a) > 0 : a \text{ mínimo} \\ f''(a) < 0 : a \text{ máximo} \end{array} \right\} \\
 f'(a) = 0 \left\{ \begin{array}{l} f''(a) = 0 \left\{ \begin{array}{l} f'''(a) > 0 : f \text{ creciente en } a \\ f'''(a) < 0 : f \text{ decreciente en } a \end{array} \right. \\
 \left. \left. \left. \begin{array}{l} f'''(a) = 0 \left\{ \begin{array}{l} f^{IV}(a) > 0 : a \text{ mínimo} \\ f^{IV}(a) < 0 : a \text{ máximo} \\ f^{IV}(a) = 0 \text{ \{etc...\}} \end{array} \right. \end{array} \right. \right. \end{array} \right.
 \end{array}$$

$f''(a) > 0 : f$ cóncava en a

$f''(a) < 0 : f$ convexa en a

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} f'''(a) \neq 0 : a \text{ punto de inflexión} \\ f'''(a) = 0 \left\{ \begin{array}{l} f^{IV}(a) > 0 : f \text{ cóncava en } a \\ f^{IV}(a) < 0 : f \text{ convexa en } a \\ f^{IV}(a) = 0 \text{ \{etc...\}} \end{array} \right. \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Representación gráfica de funciones

Para representar una función calcularemos aquellos puntos o intervalos donde la función tiene un comportamiento especial, que determinaremos mediante el estudio de los siguientes apartados:

1. *Dominio de una función.*
2. *Simetría.*
3. *Periodicidad.*
4. *Puntos de corte con los ejes.*
5. *Asíntotas.*
6. *Ramas parabólicas.*
7. *Crecimiento y Decrecimiento.*
8. *Máximos y mínimos.*
9. *Concavidad y convexidad.*
10. *Puntos de inflexión.*

Ejemplo de representación de una función

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Dominio

$$1+x^2 = 0 \quad D = \mathbb{R}$$

Simetría

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -f(x)$$

Simetría respecto al origen.

Puntos de corte con los ejes

Punto de corte con OY:

$$\frac{x}{1+x^2} = 0 \quad (0,0)$$

Puntos de corte con el eje OX

$$(0,0)$$

Asíntotas

Asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0 \quad y = 0$$

No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad x = \pm 1$$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
	↘	↗	↘

Creciente : $(-1, 1)$

Decreciente : $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Mínimos

$$\text{Mínimo} \left(-1, -\frac{1}{2} \right)$$

Máximos

Máximo $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} \quad \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} = 0 \quad x = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$$

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
	∩	∪	∩	∪

Cóncava: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

Convexa: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

Puntos de inflexión

Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $(0, 0)$ $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Representación gráfica

