Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

4ºB ESO

Capítulo 11

Funciones polinómicas, definidas a trozos y de proporcionalidad inversa

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: David Miranda Suárez

Revisora: María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

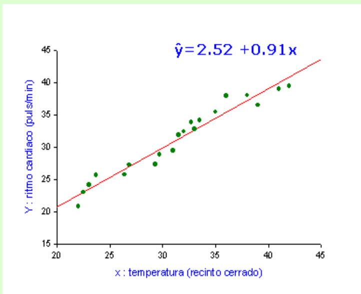
Índice

Resumen

En nuestra vida diaria hacemos uso continuamente de las relaciones de proporcionalidad, como cuando vamos a comprar cualquier producto al supermercado, o si queremos comparar dos tarifas de luz distintas para saber cuál nos conviene elegir. En estos casos, la representación gráfica nos facilita la toma de decisiones. El lanzamiento de objetos a ciertas distancias, como lanzar un papel a la basura, llenar el vaso de agua o dar un salto: la trayectoria que describe es una curva que recibe el nombre de *parábola*.

En este capítulo estudiaremos las propiedades más importantes de las *relaciones de proporcionalidad directa e inversa* y las *funciones polinómicas*, así como sus elementos y representaciones gráficas en el plano cartesiano.

Comprender estas funciones es muy útil para la ciencia, ya que se utilizan para comparar datos y para saber si esos datos tienen alguna relación lineal (los datos se comportan como una recta) o de otro tipo (polinómica, exponencial,…).



Ejemplo de Recta de regresión

Al estudio de estos datos y sus curvas se dedica la estadística mediante *el análisis de regresión*. Con la aproximación de datos a rectas o curvas conocidas, se realizan estudios y predicciones, de ahí su importancia para la vida real.

Antes de comenzar

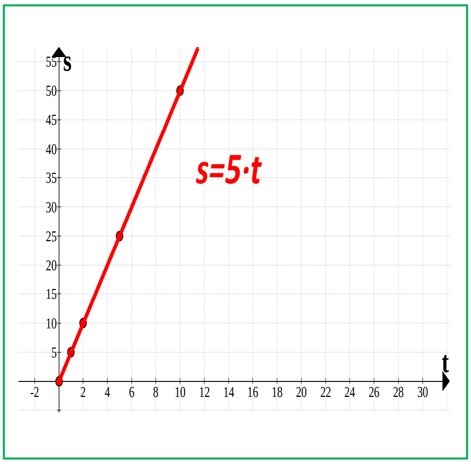
Actividades resueltas

Antes de comenzar, vamos a representar mediante gráficas las siguientes situaciones:

- *Situación 1:* La gráfica s-t de un movimiento rectilíneo uniforme: el espacio recorrido, en función del tiempo, por un ciclista que se desplaza con una velocidad de 5 m/s.

Al tratarse de un movimiento rectilíneo uniforme, podemos describir el espacio recorrido en función del tiempo mediante la fórmula $s = v \cdot t$ donde *v* = 5 m/s.

Tiempo (*t*)	Espacio (*s*)
0	0
1	5
2	10
5	25
10	50



- *Situación 2*: La gráfica v-t de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: el espacio recorrido por un ciclista que se desplaza con una aceleración de 2 m/s^2.

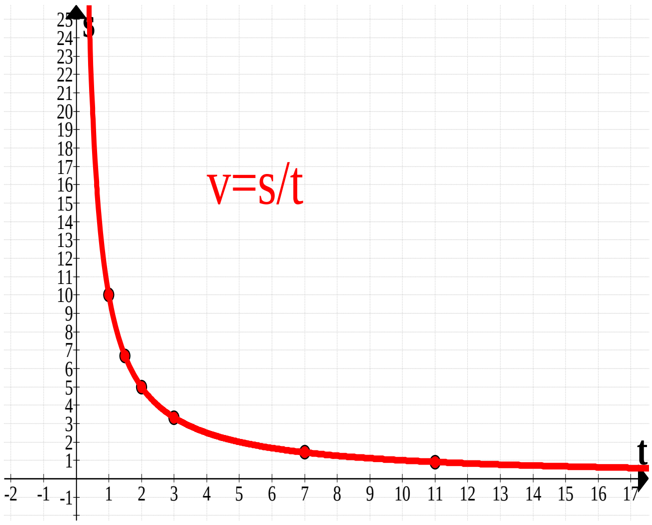
En este caso se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, luego podemos describir el espacio recorrido por la fórmula $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$, donde el espacio inicial y la velocidad inicial son 0. Representamos la función $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$.

Tiempo (*t*)	Espacio (*s*)
0	0
1	1
2	4
3	9

- *Situación 3*: Representamos la velocidad de un ciclista con respecto al tiempo, cuando recorre un espacio de 10 m.

El movimiento que describe es un movimiento rectilíneo uniforme, luego la fórmula que representamos es $v = \frac{s}{t}$, y como el espacio que recorre el ciclista es de 10 metros, $v = \frac{10}{t}$

Tiempo (t)	Velocidad (v)
1	10
1.5	6.67
2	5
3	3.33
5	2
7	1.43
11	0.91



1. FUNCIONES POLINOMICAS DE PRIMER GRADO

1.1. Proporcionalidad directa

Recuerda que dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Al realizar el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, obtenemos la **razón de proporcionalidad directa *k***.

Ejemplo:

- En la situación 1, las magnitudes espacio y tiempo son directamente proporcionales

Tiempo (*t*)	0	1	2	5	10
Espacio (*s*)	0	5	10	25	50

y la razón de proporcionalidad es $k = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{25}{5} = \frac{50}{10} = 5$

Si observamos su gráfica, podemos comprobar que se trata de una semirrecta cuyo origen es el origen de coordenadas. En esta situación no es interesante considerar tiempos negativos, razón por la cual la representación es una semirrecta.

La representación gráfica en el plano cartesiano de dos **magnitudes directamente proporcionales** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

Se puede escribir la relación entre la magnitud A (a) y la magnitud B (b) como $b = k \cdot a$ donde k es la **razón de proporcionalidad**.

Para representar estas relaciones de proporcionalidad directa, basta con situar los valores de cada magnitud en el plano cartesiano y unirlos mediante una recta.

Actividades resueltas

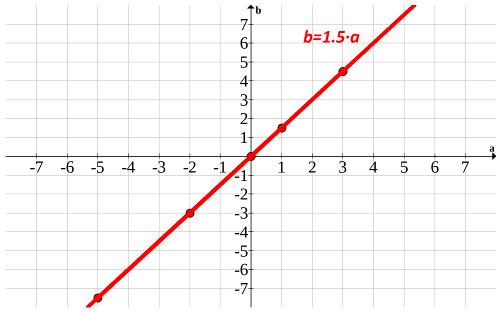
- Representa gráficamente la siguiente relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla:

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–7,5	–3	0	1,5	4,5

Al calcular la razón de proporcionalidad se obtiene:

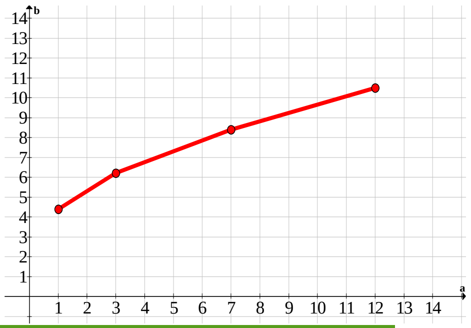
$$k=\frac{-7.5}{-5}=\frac{-3}{-2}=\frac{1.5}{1}=\frac{4.5}{3}=1.5$$

La relación se define así: $b=1.5\cdot a$



- La siguiente tabla nos muestra el peso de un bebe los primeros meses de crecimiento. Utilizando una gráfica, decidir si son magnitudes directamente proporcionales.

Meses	1	3	7	12
Peso (Kg)	4,4	6,2	8,4	10,5



Al representar los puntos en el plano, se observa que la gráfica no es una recta, entonces **no son directamente proporcionales**.

Actividades propuestas

1. El consumo medio de agua al día por habitante (en 2011) es de 142 litros. Representa gráficamente el consumo de una persona en una semana.

2. El agua virtual es el agua necesaria para crear un producto. Representa gráficamente las siguientes relaciones:

a. 71 litros para producir una manzana.

b. 10.850 litros para producir unos vaqueros.

c. 4.000 litros para producir una camiseta.

1.2. Función lineal. Rectas de la forma $y = m \cdot x$

La representación gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales es una recta que pasa por el origen. Luego la relación de proporcionalidad directa es una función lineal.

Una **función lineal** es una función polinómica de primer grado. Su representación en el plano cartesiano es una recta.

Existen dos tipos de funciones lineales:

- Rectas cuya expresión algebraica es $y = m \cdot x$
- Rectas cuya función viene dada por $y = m \cdot x + n$

En este apartado vamos a estudiar las funciones lineales del primer tipo, es decir las rectas de la forma $y = m \cdot x$

Ejemplo:

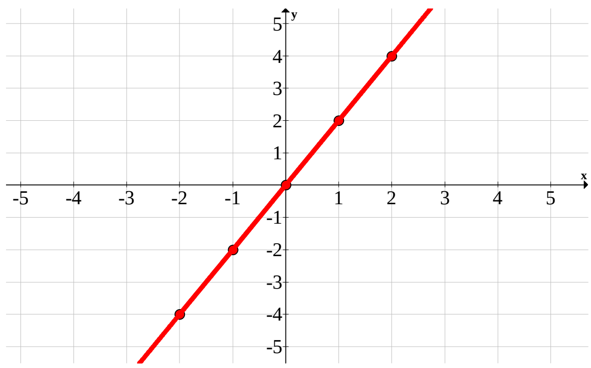
- Las proporciones se representan como rectas de la forma $b = k \cdot a$
  - donde k es la razón de proporcionalidad, $k = \frac{b}{a}$
  - a y b son los valores que toman las magnitudes A y B respectivamente.
- La relación peso – coste de cualquier producto, es una proporcionalidad y se representa con rectas de la forma $y = m \cdot x$
- Muchas de las relaciones en física son proporcionales y se representan mediante rectas como espacio – tiempo, peso – densidad , fuerza – masa, …

Actividades resueltas

- Representa la recta $y = 2 \cdot x$

  Para ello, hay que construir una tabla de valores y representar los puntos. La recta es la consecuencia de unir los puntos.

  Se puede observar, que la variable y se define dando valores a la variable x. Por esta razón x es la variable independiente (puede ser cualquier valor que se le dé) e y es la variable dependiente (depende del valor de la x).



x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−2	0	2	4

Nota: para definir una recta es suficiente con dar dos puntos de ella.

Las rectas $y = m \cdot x$ tienen los siguientes componentes:

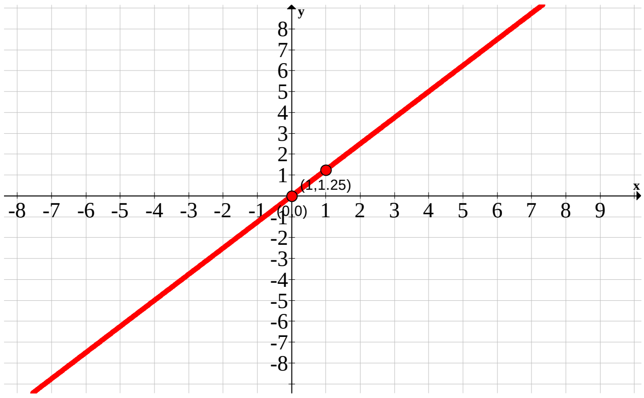
- x es la variable **independiente**.
- y es la variable **dependiente**.
- m es la **pendiente** de la recta, y es lo que diferencia una recta de otra.

Las características más importantes:

- Pasan por el origen de coordenadas, es decir, el punto (0,0) pertenece a la recta.
- Su dominio y su recorrido son todos los reales: tanto x la como la y aceptan cualquier valor.
- Son simétricas respecto al origen, o lo que es lo mismo, son funciones impares.

Actividades resueltas

- Estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de la función lineal $y = 1,25 \cdot x$



Al tratarse de una recta, se puede observar que el dominio son todos los reales, puesto que se admite cualquier valor de la x.

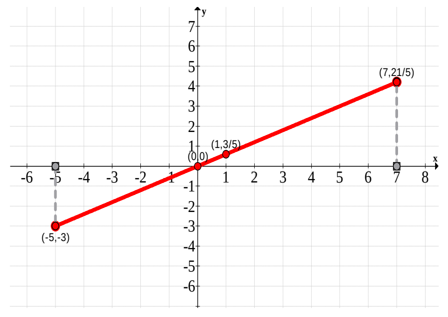
Si no se considera ningún intervalo, la recta no tiene máximos ni mínimos absolutos y relativos.

Para ver la simetría, tomamos la función $y = f(x) = 1,25 \cdot x$

$f(-x) = 1,25 \cdot (-x) = -1,25 \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f \text{ es impar}$

Es decir, es simétrica respecto al origen de coordenadas.

- Estudia la función $y = \frac{3}{5} \cdot x$ en el intervalo $[-5,7]$.



El dominio es todo el intervalo [-5,7].

$f(-x) = \frac{3}{5} \cdot (-x) = -\frac{3}{5} \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f \text{ es impar}$, simétrica respecto al origen.

En los extremos del intervalo, existen mínimo (–5, –3) y máximo (7,21/5).

Actividades propuestas

3. Halla el dominio, máximos y mínimos y la simetría de las siguientes rectas:

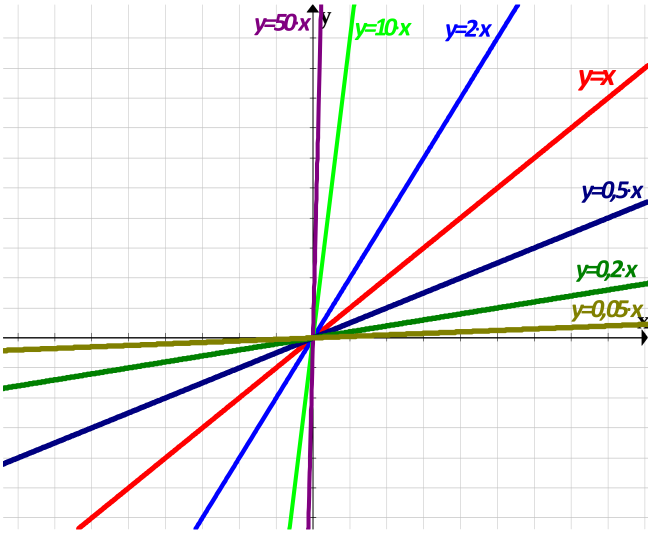
a. $y = 4 \cdot x$ b. $y = \frac{x}{3}$ c. $y = 2,65 \cdot x$

1.3. Estudio de la pendiente

Como hemos visto con anterioridad, la pendiente m es lo que diferencia unas rectas de otras. Mide la inclinación de la recta respecto al eje de abscisas.

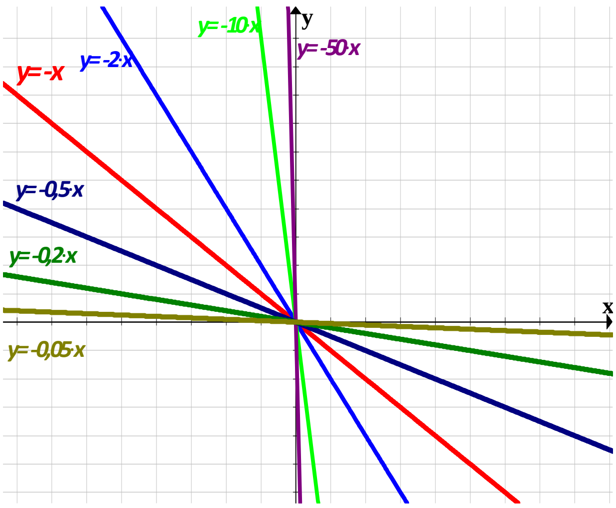
En las relaciones de proporcionalidad directa, la pendiente viene dada por la razón de proporcionalidad *k*.

Observa en el siguiente gráfico cómo varía la recta según vamos aumentando o disminuyendo la pendiente. Partimos de la recta $y=x$, donde $m=1$.



- Si aumenta m, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje y.
- Si disminuye m, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje x

Ahora observa lo que ocurre cuando la pendiente m toma valores negativos.



- Si aumenta m, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje x.
- Si disminuye m, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje y.

Como se puede observar, al variar la pendiente la inclinación de la recta también varia, según se van dando valores m.

La pendiente de la recta es el valor que mide la inclinación de la recta, es decir, mide el crecimiento o decrecimiento de la función lineal:

- Si $m>0$, la recta es creciente.
- Si $m<0$, la recta es decreciente.

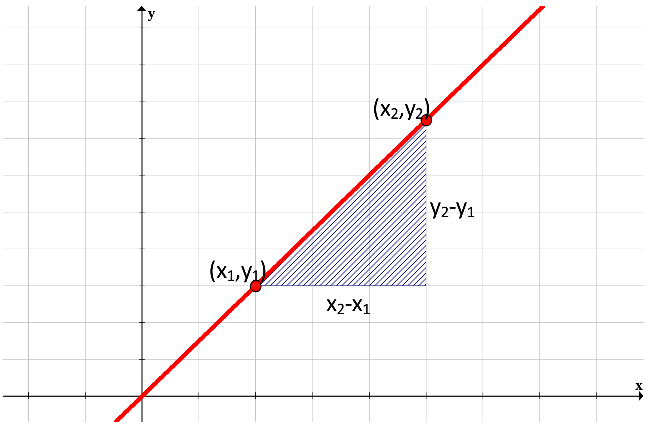
La pendiente es el coeficiente que acompaña a la variable independiente x.

Interpretación geométrica de la pendiente

La pendiente de la recta no solo indica el crecimiento y decrecimiento de la función, sino que también mide cuánto crece o cuánto decrece. Se puede decir que la pendiente mide el crecimiento de la recta en función de lo que avanza:

- Si $m > 0$:
  - Para valores altos de m la recta crece con mayor rapidez, esto es, la recta "sube" mucho y avanza poco.
  - Para valores pequeños de m la recta crece con menos rapidez, es decir, "sube" poco y avanza mucho.
- Si $m < 0$:
  - Para valores altos de m la recta decrece con menos rapidez, es decir, baja poco y avanza mucho.
  - Para valores pequeños de m la recta decrece con mayor rapidez, esto es, la recta "baja" mucho y "avanza" poco.

Una manera de calcular la pendiente, es dividiendo el valor de lo que sube la recta entre lo que avanza, como se muestra en el siguiente dibujo:



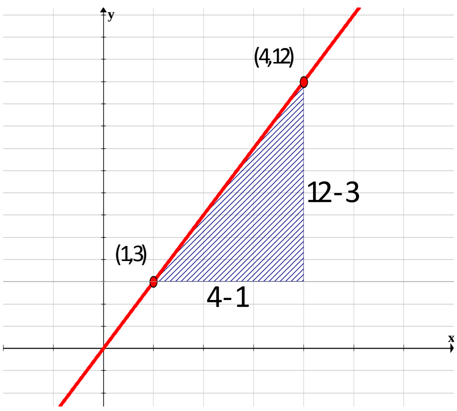
Dados dos puntos cualesquiera de la recta, la pendiente se calcula de la siguiente forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es decir,

$$m = \frac{\text{lo que sube}}{\text{lo que avanza}}$$

Ejemplo:

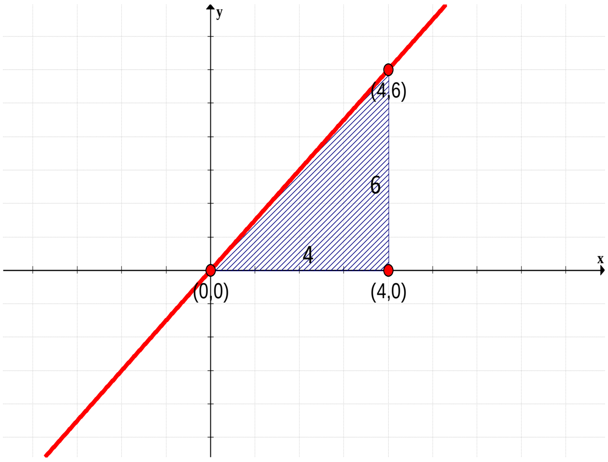


La recta sube 12 – 3 = 9 y avanza 4 – 1 = 3, entonces

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

Actividades resueltas

- Calcula la pendiente de la siguiente recta y su expresión algebraica.



Tomamos dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta, el (0,0) y el (4,6).

En este caso, la altura del triángulo sombreado nos indica el valor que sube la recta, 6, y la base es el valor que la recta avanza, 4.

Al dividir estos valores, obtenemos la pendiente y la expresión algebraica de la recta.

$$m = \frac{6}{4} = 1,5$$

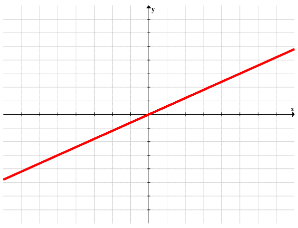
$$y = 1,5 \cdot x$$

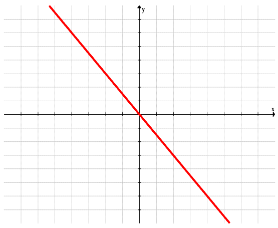
En estos ejemplos, la recta siempre sube, es decir, la función es creciente. ¿Qué ocurre si la recta fuese decreciente? Para no equivocarnos con los cálculos, siempre evaluamos la función de izquierda a derecha, es decir, el primer punto estará más a la izquierda, será más pequeño.

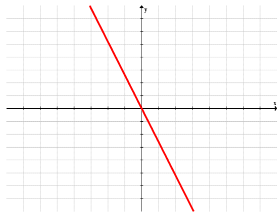
Esto es así porque la pendiente mide la cantidad de crecimiento (o decrecimiento) según la función va aumentando o lo que es lo mismo, avanzando.

Actividades propuestas

4. Halla la pendiente y la expresión algebraica de las siguientes rectas:

a. 

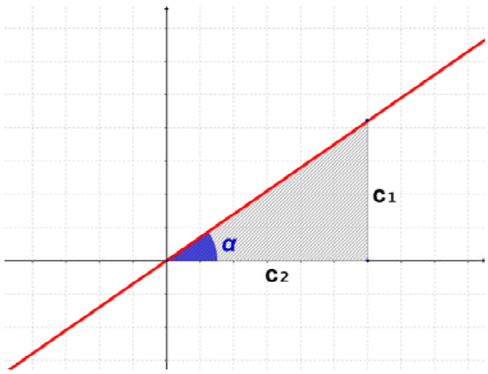
b. 

c. 

Otra expresión de la pendiente

Para hallar la pendiente se toma como referencia la base y la altura del triángulo rectángulo que forman los vértices de los puntos de la recta.

El cociente entre la altura y la base es la pendiente. Como el triángulo construido es un triángulo rectángulo, la pendiente es el cociente entre sus dos catetos, o lo que es lo mismo, la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal.



$$\tan\alpha = \frac{C_{opuesto}}{C_{contiguo}} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow m = \tan\alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

La pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas, es decir, la recta con la horizontal.

1.4. Rectas de la forma $y = m \cdot x + n$

Volvamos a la situación 1 al principio del capítulo. En ese caso, queríamos hallar el espacio que recorría el ciclista. Ahora supongamos que el ciclista, antes de empezar con su ruta, se ha tenido que desplazar 2 Km hasta el inicio de su camino.

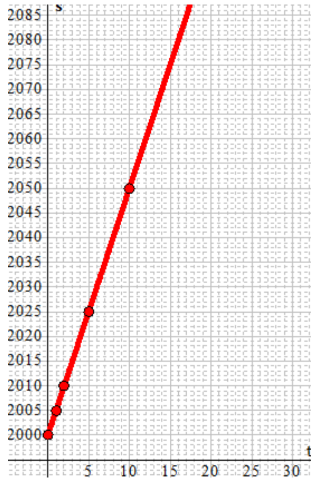
Actividades resueltas

- *Situación 1.2:* la gráfica s-t de un movimiento rectilíneo uniforme: el espacio recorrido, en función del tiempo, por un ciclista que se ha trasladado 2 Km antes de empezar el recorrido y se desplaza con una velocidad de 5 m/s.

  En este caso, la fórmula del MRU, como tenemos un espacio inicial, es $s = s_0 + v \cdot t$. Con los datos del ejercicio, la expresión queda $s = 2 + 5 \cdot t$.

  Construimos la nueva tabla y dibujamos la gráfica:

Tiempo (t)	Espacio (s)
0	2000
1	2007
2	2012
5	2027
10	2052



  Podemos observar que hemos tenido que adaptar los ejes para poder pintar gráfica, ya que la recta se ha desplazado 2.000 posiciones en el eje y.

  La gráfica de esta recta tiene como expresión algebraica $y = 5 \cdot x + 2.000$, donde x corresponde al tiempo t e y al espacio s , y 2.000 es el espacio inicial s_0.

  En ambos caso, el de la situación 1 y esta nueva situación, la pendiente de ambas rectas es 5. Esto es así ya que se trata de la misma recta pero desplazada 2.000 posiciones en el eje de abscisas, es decir, las dos rectas son paralelas.

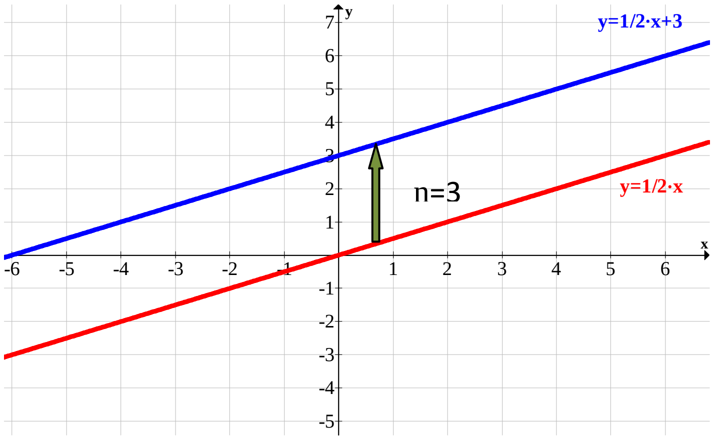
Las rectas de la forma $y = m \cdot x + n$ tienen la misma pendiente que las rectas $y = m \cdot x$ pero se desplazan en el eje de abscisas (eje y) n posiciones. Por esta razón, a n se le llama **ordenada en el origen**, ya que es el valor de la recta en el punto de partida, es decir, cuando $x = 0$.

Ejemplo:

- Comparemos la recta $y = 1/2 \cdot x$ con la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$

Las dos rectas tienen la misma forma, es decir, la misma inclinación o la misma pendiente. En ambos casos $m = 1/2$. Son dos rectas paralelas.

La diferencia está en el valor de la n: la recta $y = 1/2 \cdot x$ (donde $n=0$) se ha desplazado 3 posiciones en el eje y, para convertirse en la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$ (donde $n=3$)

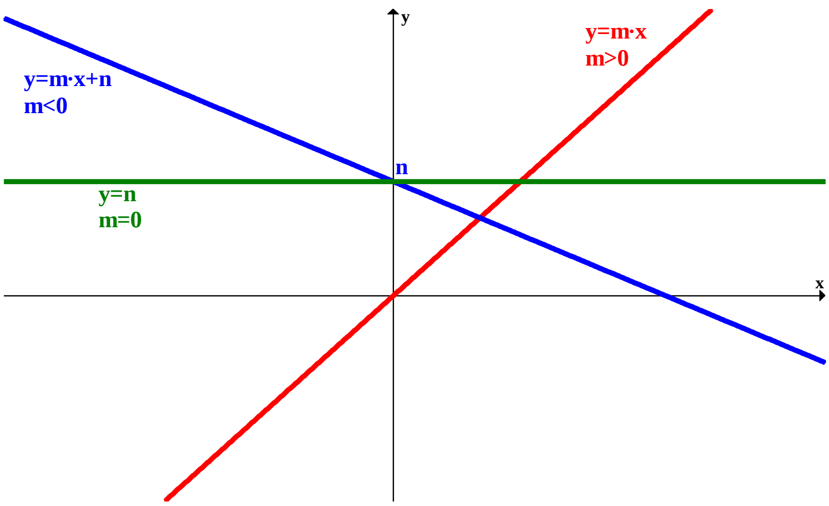


Las funciones polinómicas de primer grado, o funciones lineales, se describen algebraicamente de la forma $y = m \cdot x + n$ y se representan mediante rectas.

Además de la variable independiente x, la variable dependiente y, y la pendiente m, se añade el valor n que es la ordenada en el origen.

La recta $y = m \cdot x + n$ es paralela a la recta $y = m \cdot x$ (tienen la misma pendiente, m) desplazada verticalmente n posiciones. Por esta razón, el crecimiento o decrecimiento de estas funciones se comportan de la misma manera:

- Si $m > 0$, la función es **creciente**.
- Si $m < 0$, la función es **decreciente**.
- Si $m = 0$, la función es **constante**, ni crece ni decrece. Es paralela al eje x, y pasa por el punto $y = n$.



Las funciones $y = m \cdot x$ e $y = m \cdot x + n$ se les llama **funciones lineales**, aunque a las segundas también se les llama **funciones afines**.

Actividades propuestas

5. Representa las siguientes funciones lineales:

a. $y = 3 \cdot x + 4$

b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$

c. $2x + \cdot 4y = 5$

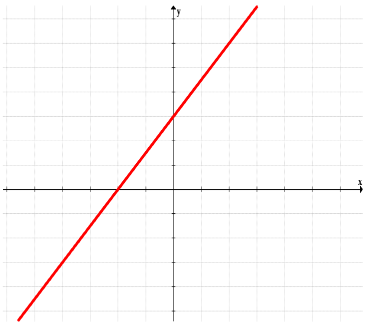
d. $y = 5$

e. $y = 0$

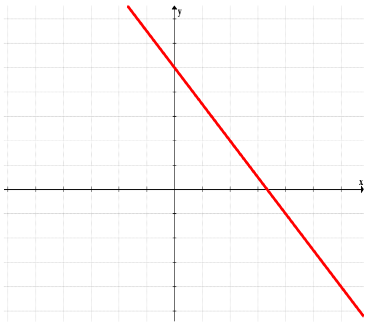
f. $x = 3$

6. Halla la expresión de las siguientes rectas:

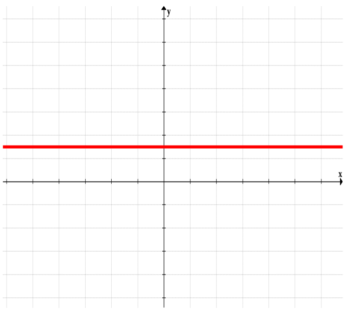
a.



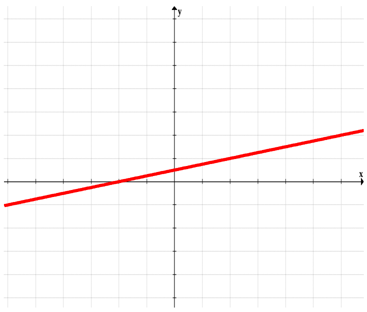
b.



c.



d.



2. FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

2.1. Funciones polinómicas de segundo grado. Parábola $y = a \cdot x^2$

En el apartado anterior hemos representado las gráficas de las funciones polinómicas de primer grado. Ahora, vamos a estudiar la representación de las funciones polinómicas de segundo grado. La gráfica de este tipo de funciones será semejante a la representación de la *situación 2* al principio del capítulo.

Las funciones polinómicas de segundo grado son aquellas que tienen como expresión algebraica un polinomio de grado 2, es decir, su expresión es de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Se representan mediante **parábolas.**

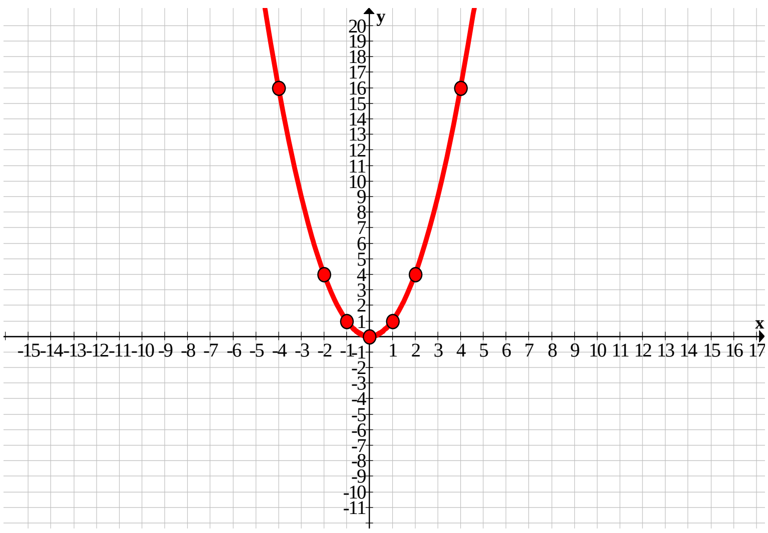
Ejemplo:

- La representación de la situación 2 es una parábola.
- En Física, la trayectoria de muchos movimientos se representan mediante parábolas, y por eso recibe el nombre de tiro parabólico: lanzar un proyectil con cierto ángulo, el aterrizaje de un avión en un portaviones, etc.

Parábola $y = a \cdot x^2$

Vamos a representar la parábola $y = x^2$. Para ello, construimos una tabla de valores y representamos los pares de puntos en el plano cartesiano.

x	*y*
–10	100
–5	25
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
5	25
10	100



En la tabla y en la gráfica se pueden observar algunas características:

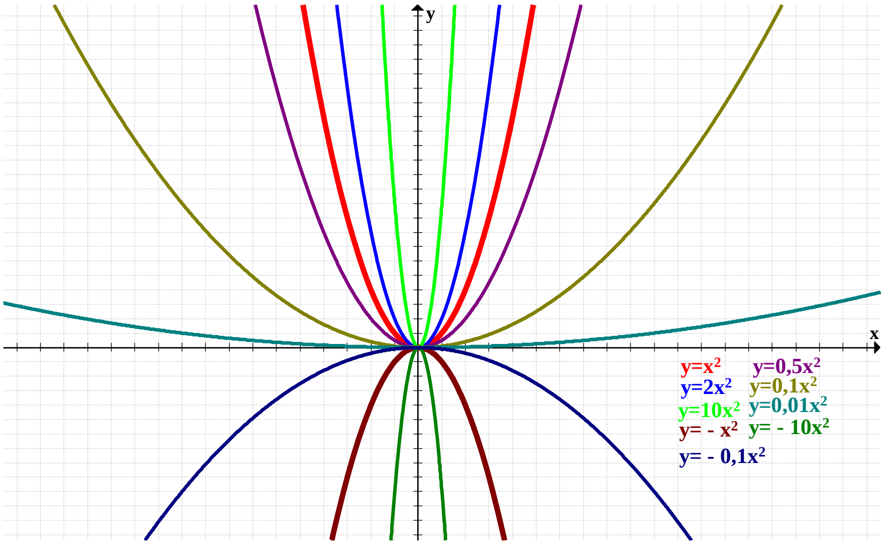
- El dominio y el recorrido son todos los reales.
- La función es continua, porque no presenta saltos.
- Es simétrica respecto al eje y, es decir, es una función par:

$$y = f(x) = x^2 \quad , \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- Es decreciente hasta el 0, y después creciente, luego tiene un mínimo absoluto en el (0, 0).

En este caso, $a = 1$, y sabemos que si $a = -1$, la parábola tiene la misma forma pero está abierta hacia abajo, y en vez de un mínimo, tiene un máximo en el (0, 0).

Veamos lo que sucede cuando aumentamos o disminuimos el coeficiente a :



- Si $a > 0$:
  - al aumentar a , la parábola se hace más estrecha, y se va acercando al eje y.
  - al disminuir a , la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x .
- Si $a < 0$:
  - al aumentar a , la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x .
  - al disminuir a , la parábola se hace más estrecha y se va acercando al eje y.

En general, las parábolas cuya expresión algebraica es $\boldsymbol{y = a \cdot x^2}$, tienen las siguientes características:

- son **continuas** en todo el dominio
- el dominio y el recorrido son todos los reales
- si $a > 0$, la parábola está abierta hacia arriba y tiene un **mínimo absoluto** en el punto (0, 0)
- si $a < 0$, la parábola está abierta hacia abajo y tiene un máximo absoluto en el punto (0, 0)

  A este punto se le llama **vértice** de la parábola
- son funciones pares, es decir, simétricas respecto al eje y.

Actividades propuestas

7. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$ b. $y = -3x^2$ c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

d. $y = 4{,}12x^2$ e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ f. $y = \frac{7}{8}x^2$

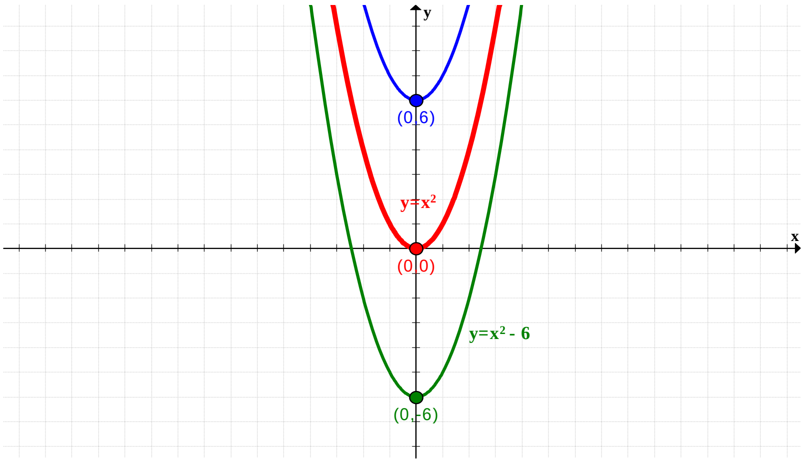
Textos Marea Verde

2.3. Traslaciones en el plano

Utilizando como plantilla la gráfica de $y = x^2$, se pueden obtener las gráficas de otras parábolas más complejas, dependiendo del tipo de desplazamiento que utilicemos.

Desplazamientos verticales: traslaciones en la dirección del eje y : $y = x^2 + k$.

En este caso, se trata de mover la parábola en dirección vertical, es decir, hacia arriba o hacia abajo. Comparemos las parábolas $y = x^2 + 6$ y $y = x^2 - 6$ con nuestra plantilla:



Se puede observar, que al sumar 6 a la parábola x^2, la gráfica es idéntica pero desplazada 6 unidades en sentido positivo en el eje y, es decir, la parábola ha subido 6 unidades. El nuevo vértice pasa a ser el punto (0, 6).

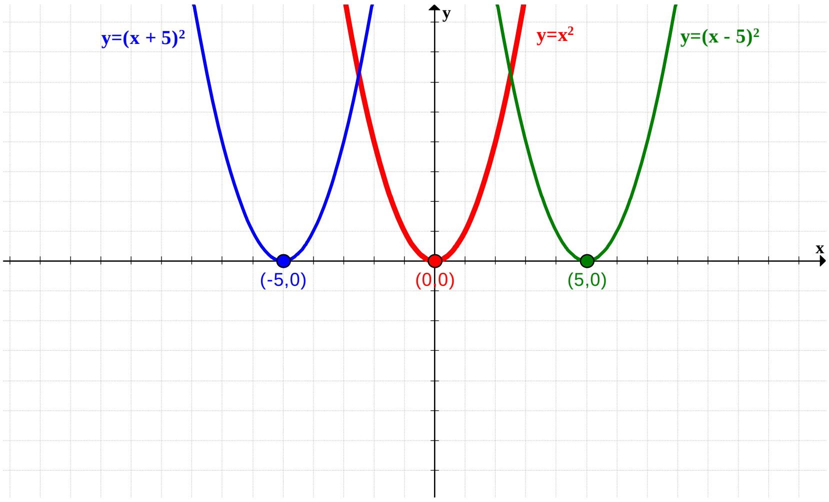
Algo parecido ocurre cuando se resta 6 unidades a x^2. En este caso la gráfica se ha desplazado 6 unidades en sentido negativo hasta el vértice (0,-6), es decir, baja 6 unidades.

En general, la parábola $\boldsymbol{y = x^2 + k}$ tiene la misma gráfica que $y = x^2$ pero trasladada k unidades verticalmente en el eje y. Si k es positivo, la traslación es hacia arriba y si k es negativo, hacia abajo.

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (0, k).

Desplazamientos horizontales: traslaciones en la dirección del eje x: $y = (x - q)^2$.

Ahora trasladamos la parábola en dirección horizontal. Hacia la derecha o hacia la izquierda. Comparemos las parábolas $y = (x+5)^2$ y $y = (x-5)^2$ con la plantilla:



En este caso, al aumentar la variable que se eleva al cuadrado, es decir, sumar 5 unidades, la gráfica se traslada horizontalmente hacia la izquierda 5 unidades, siendo el nuevo vértice el punto (-5,0). Al disminuir dicha variable, es decir, restar 5 unidades, la parábola se desplaza hacia la derecha siendo el nuevo vértice el punto (5, 0).

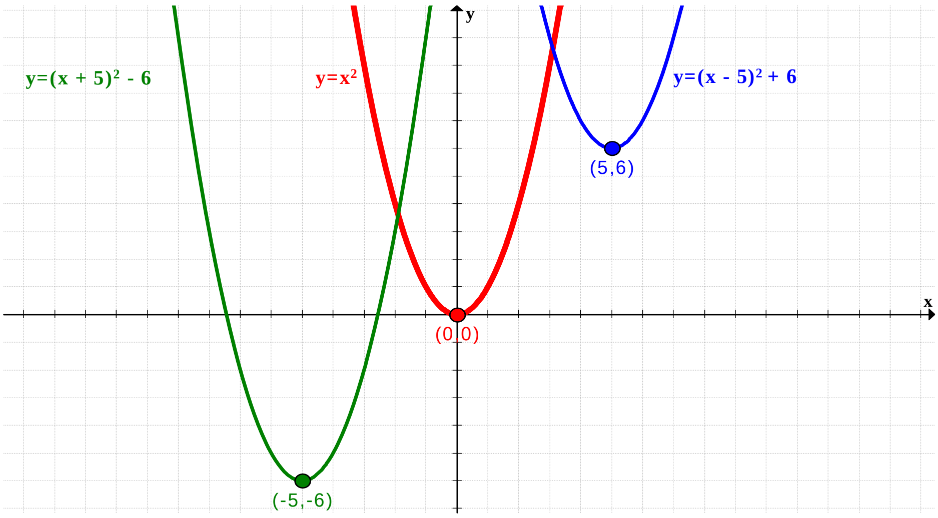
En general, la parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ trasladada $\boldsymbol{q}$ unidades en el eje x hacia la derecha si $q>0$ y hacia la izquierda si $q<0$.

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto $(q,0)$**.**

Desplazamientos oblicuos: traslaciones en ambos ejes: $\boldsymbol{y=(x-q)^2+k}$.

El último movimiento es el que combina los dos anteriores, es decir, movemos la plantilla k posiciones de manera vertical y q posiciones de manera horizontal, resultando un movimiento oblicuo en el plano.

Comparemos la parábola $y=(x-5)^2+6$ y $y=(x+5)^2-6$ con la plantilla $y=x^2$.



La parábola $y=(x-5)^2+6$ se traslada 5 unidades a la derecha y 6 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y=(x+5)^2-6$ se traslada 5 unidades hacia la izquierda y 6 unidades hacia abajo.

Es decir, es la combinación de los dos movimientos anteriores.

En general, la parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2+k}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ trasladada de la siguiente forma:

$$q \text{ unidades} \begin{cases} \text{hacia la derecha si } q>0 \\ \text{hacia la izquierda si } q>0 \end{cases} \quad ; \quad k \text{ unidades} \begin{cases} \text{hacia arriba si } k>0 \\ \text{hacia abajo si } k<0 \end{cases}$$

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (q, k).

Representación de parábolas de la forma $y = x^2 + r \cdot x + s$

Sabemos representar las parábolas de la forma $y=(x-q)^2+k$ mediante traslaciones. ¿Cómo podemos pintar la gráfica de las parábolas cuya expresión algebraica es $y=x^2+r\cdot x+s$? Basta con convertir esa expresión en una cuya función sepamos representar:

Actividades resueltas

- Representa la gráfica de la función cuadrática $y=x^2+6\cdot x-4$

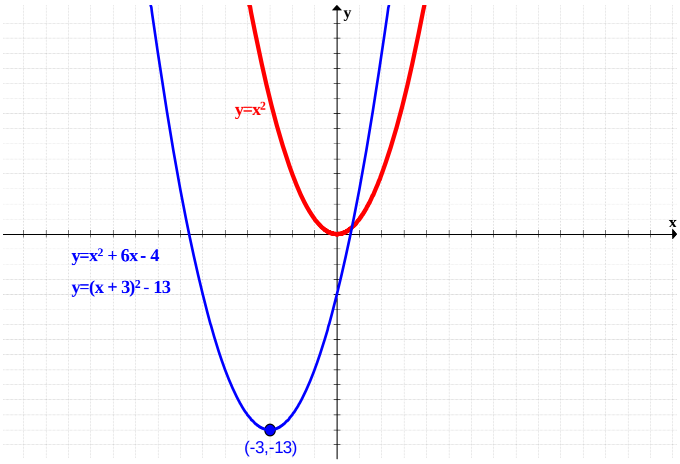
  La función viene dada de la forma $y=x^2+r\cdot x+s$, y queremos convertirla en $y=(x-q)^2+k$.

$$y=x^2+r\cdot x+s \Leftrightarrow y=(x-q)^2+k$$

  Sabemos que $(x+3)^2=x^2+6x+9$, donde ya nos aparece x^2+6x. Ahora tenemos que ajustar el resto:

$$y=x^2+6x-4=(x+3)^2+K=x^2+6x+9+K \Rightarrow K=-13 \Rightarrow \boxed{y=(x+3)^2-13}$$

Con la parábola expresada de esta manera, basta con trasladar la gráfica de $y=x^2$, 3 unidades a la izquierda y 13 unidades hacia abajo, siendo el vértice el punto (–3, –13).



En general, el vértice de la parábola se encuentra en el punto $x=\frac{-r}{2}$. La otra coordenada se obtiene sustituyendo x en la expresión de la función.

Ejemplo:

- En el caso anterior, $y=x^2+6\cdot x-4$, el vértice está en el punto (–3, –13).

Como r = 6, la primera coordenada del vértice es $x=\frac{-r}{2}=\frac{-6}{2}=-3$. Sustituyendo el valor en la expresión: $y=(-3)^2+6\cdot(-3)-4=9-18-4=-13$

Actividades propuestas

8. Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a. $y=(x+4)^2-5$

b. $y=-(x-\frac{4}{5})^2+6$

c. $y=x^2-5$

d. $y=x^2-6x+16$

e. $y=x^2+4x+\frac{5}{2}$

f. $y=-x^2+12x-26$

g. $y=x^2-10x+17$

h. $y=-x^2+2x-4$

i. $y=-x^2+\frac{4}{3}x-1$

2.3. Función cuadrática. Parábolas de la forma $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

Las funciones polinómicas de segundo grado reciben el nombre de **funciones cuadráticas**.

Hasta ahora solo hemos estudiado las funciones de tipo $y=x^2+rx+s$, que es una parábola abierta hacia arriba, o $y=-x^2+rx+s$, abierta hacia abajo.

Sabemos cómo afecta el valor del coeficiente a en la gráfica de la parábola $y=a\cdot x^2$, haciéndola más estrecha o más ancha.

Para representar las funciones cuadráticas $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ se convierte dicha expresión en una más familiar que sabemos representar:

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=y=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$$

Actividades resueltas

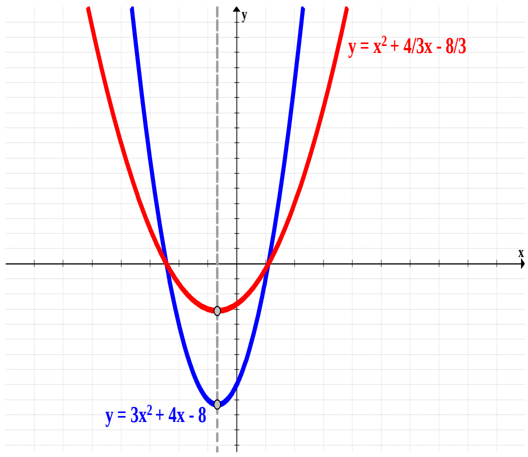
- Representa la parábola $y=3x^2+4x-8$:

Convertimos la función en una expresión más fácil de representar:

$$y=3x^2+4x-8=3\cdot(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3})$$

y la comparamos con $x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$.

$$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}=(x+\frac{4}{6})^2-\frac{20}{9}$$



Las dos parábolas tienen el vértice en el mismo punto de abscisa, y la coordenada y queda multiplicada por 3.

En cuanto a la forma, la parábola es más estrecha, como se puede ver en el punto 2.1.

En general, la representación de la función cuadrática $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ se puede aproximar representando la parábola $y=x^2+rx+s$, teniendo el vértice en el mismo punto de abscisa y la forma dependerá del valor absoluto del coeficiente a, siendo más ancha para valores grandes más estrecha para valores más pequeños.

La orientación de la parábola será:

- hacia arriba si $a>0$
- hacia abajo si $a<0$

Elementos de la parábola

Los elementos más característicos de la parábola ayudan a representar su gráfica en el plano cartesiano.

Coeficiente a:

Si $a>0$ la parábola está abierta hacia arriba.

Si $a<0$ la parábola está abierta hacia abajo.

Vértice:

El **vértice** de la parábola está en el punto $(\frac{-b}{2a},\frac{b^2-4ac}{4a})$:

Habíamos visto que para la parábola de la forma $y=x^2+rx+s$, la primera coordenada es $\frac{-r}{2}$.

La parábola en el caso general es $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$, es decir, $r=\frac{b}{a}$, entonces la primera coordenada del vértice es $\frac{-r}{2}=\frac{\frac{-b}{a}}{2}=\frac{-b}{2a}$.

La segunda coordenada sale al sustituir $x=\frac{-b}{2a}$ en la función cuadrática.

Puntos de corte con el eje OX:

Son los puntos donde la parábola corta al eje x, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $y=0$. Indica cuándo la parábola es positiva o negativa.

Para calcularlos, se resuelve la ecuación de segundo grado $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

Punto de corte con el eje OY:

Es el punto donde la parábola corta al eje y, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $x = 0$.

Cuando $x=0$ la parábola toma el valor de c, luego el punto de corte es el punto $(0,c)$.

Eje de simetría:

La parábola es simétrica en la recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, es decir, el

eje de simetría de la parábola es la recta $x = \frac{-b}{2a}$.

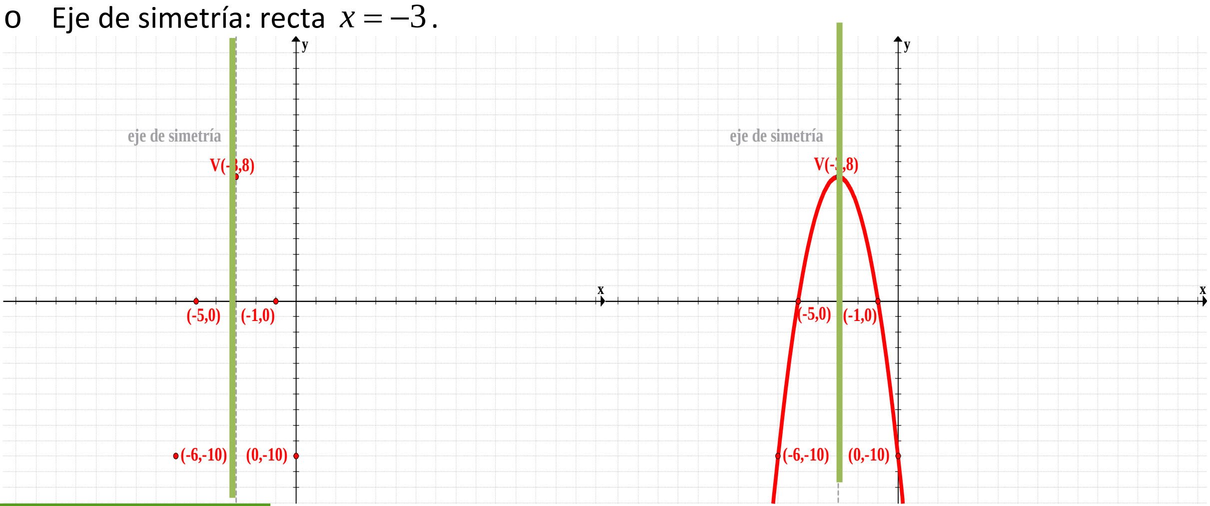
El eje de simetría también pasa por el punto medio del segmento formado por los dos puntos de corte con el eje x.

A partir de estos elementos, se puede representar la gráfica de una función cuadrática.

Actividades resueltas

- Determina los elementos de la parábola $y = -2x^2 - 12x - 10$
  - $a = -2$, entonces la parábola está abierta hacia abajo.
  - Vértice: $\begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2\cdot(-2)} = \frac{-12}{4} = -3 \\ y = -2\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3) - 10 = -18 + 36 - 10 = 8 \end{cases} \Rightarrow Vértice: V(-3, 8)$
  - Puntos de corte:
    - Eje OX: $y = -2x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{-4} = \begin{cases} x_1 = -5 \Rightarrow (-5, 0) \\ x_2 = -1 \Rightarrow (-1, 0) \end{cases}$
    - Eje OY: $\begin{cases} y = -2x^2 - 12x - 10 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2\cdot 0^2 - 12\cdot 0 - 10 = -10 \Rightarrow (0, -10)$

    La parábola también pasa por su simétrico: $(-6, -10)$.
  - Eje de simetría: recta $x = -3$.



Actividades propuestas

9. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$ b. $y = 6x^2 - 24x$ c. $y = -2x^2 + 4x - 2$

d. $y = 2x^2 + 5x - 12$ e. $y = 3x^2 + 6x - 9$ f. $y = -2x^2 + 7x + 3$

g. $y = 7x^2 + 21x - 28$ h. $y = 5x^2 - 9x + 4$ i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

3. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

3.1. Función de proporcionalidad inversa $y = \frac{k}{x}$

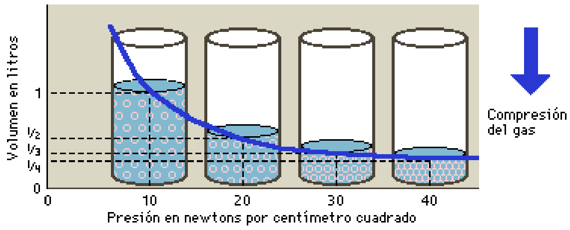
Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número. La **razón de proporcionalidad inversa** *k* es el producto de cada par de magnitudes: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

Ejemplo

- Se puede comprobar en la *situación 3* en el inicio del capítulo, que la velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales. En este caso, el espacio se mantiene constante, siendo la razón de proporcionalidad inversa $s = v \cdot t$.
- En Física encontramos muchos ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales: la densidad y el volumen, la potencia y el tiempo, la presión y la superficie,…

Actividades resueltas

- Representa en el plano la ley de Boyle-Mariotte: "a temperatura constante, el volumen de una masa fija de gas es inversamente proporcional a la presión que este ejerce."

  La fórmula que describe esta ley es $P \cdot V = k$

  Si despejamos el volumen final V, obtenemos la siguiente expresión: $V = \frac{k}{P}$.

  La gráfica describe una curva que a medida que aumenta la presión inicial, disminuye el volumen y se va aproximando al eje x, y al contrario, si disminuye la presión, el volumen que ocupa el gas es mayor.

La función de proporcionalidad inversa se define mediante la expresión $y = \frac{k}{x}$, donde k es la razón de proporcionalidad inversa y las variables x e y son los distintos valores que tienen las dos magnitudes.

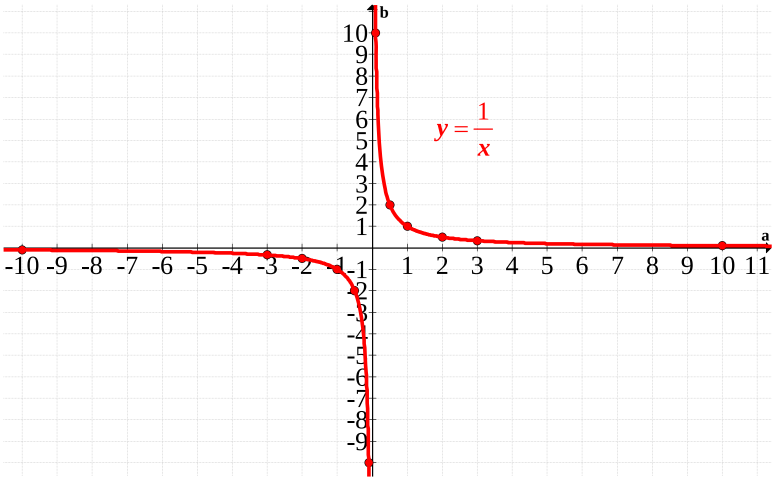
Su representación gráfica en el plano cartesiano es una **hipérbola**.

Ejemplo

- Representa la hipérbola $y = \frac{1}{x}$

  Damos una tabla de valores y representamos los puntos en el plano:

x	–3	–2	–1	–1/2	–1/10	1/10	1/2	1	2	3
y=1/x	–1/3	–1/2	–1	–2	–10	10	2	1	1/2	1/3



Se puede observar que la gráfica nunca corta a los ejes de coordenadas, ya que el 0 no pertenece al dominio y tampoco al recorrido de la función.

Es fácil comprobar que la función es simétrica respecto del origen, y continua en todo el dominio, es decir, en $\Re - \{0\}$.

La hipérbola $y = \frac{k}{x}$

Actividades propuestas

10. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa en el mismo sistema de coordenadas:

a. $y = \frac{-1}{x}$ b. $y = \frac{5}{x}$ c. $y = \frac{1}{2x}$

d. $y = \frac{3}{8x}$ e. $y = \frac{-5}{3x}$ f. $y = \frac{-12}{5x}$

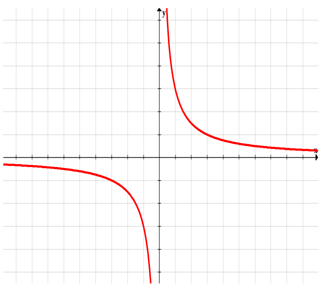
11. Describe lo que sucede cuando varía el valor de k. Ayúdate de las gráficas del ejercicio anterior.

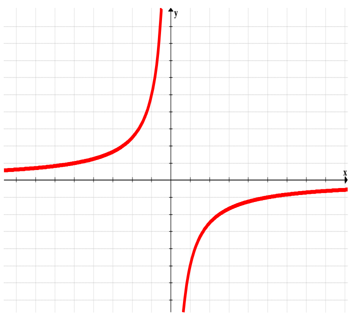
12. Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas que pasa por cada uno de estos puntos. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a. $(4, 2)$ b. $(3, -1)$ c. $(1/3, 5)$

d. $(12, 3)$ e. $(a, 1)$ f. $(1, b)$

13. Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:


a)


b)

14. Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:

a. $y = \frac{9}{2x}$ b. $y = \frac{-5}{3x}$ c. $y = \frac{-0,3}{x}$

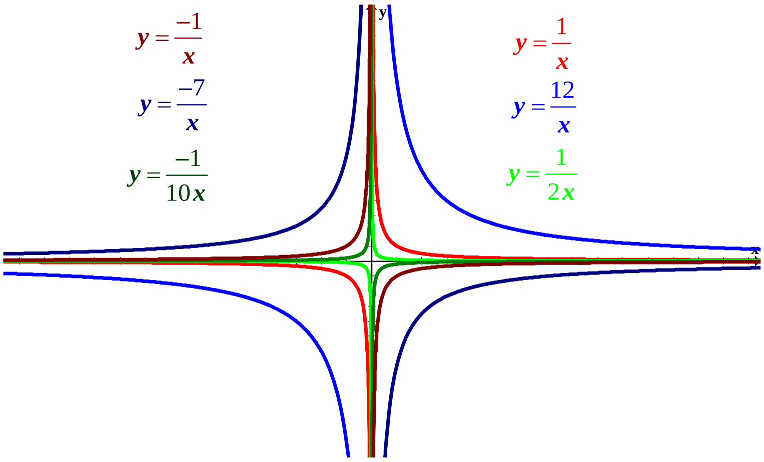
d. $(-5, 2)$ e. $(4, -9)$ f. $(1, 1/2)$

En general, las hipérbolas cuya expresión es $y = \frac{k}{x}$ tienen las siguientes propiedades:

- $|\boldsymbol{k}|$:
  - o Si el valor absoluto de k aumenta, la curva se aleja del origen de coordenadas.
  - o Si el valor absoluto de k disminuye, la curva se aproxima al origen de coordenadas.
- **Dominio:** son todos los reales menos el 0: $\Re - \{0\}$
- **Recorrido:** su recorrido son todos los reales menos el 0: $\Re - \{0\}$
- **Continuidad:** la función de proporcionalidad inversa es continua en todo su dominio, pero discontinua en la recta real, ya que el 0 no está en el dominio, y por tanto, hay un salto.
- **Simetría:** son funciones impares, esto es, son simétricas respecto al origen de coordenadas.

  Asíntotas: Cuando los valores de x y los de y se hacen muy grandes, la curva se aproxima a los ejes pero sin tocarlos, por tanto, los ejes de coordenadas son las asíntotas de las funciones de proporcionalidad inversa: las rectas $x = 0$ e $y = 0$.
- **Crecimiento:** depende del signo de k :
  - o Si $k > 0$: la función es **decreciente** en todo su dominio de definición.
  - o Si $k < 0$: la función es **creciente** en todo su dominio de definición.

Las asíntotas dividen a la hipérbola en dos curvas, que reciben el nombre de **ramas de la hipérbola**.



3.2. La hipérbola $y = \dfrac{k}{x-a} + b$

A partir de la representación de la función $y = \frac{k}{x}$, ¿es posible representar otro tipo de hipérbolas? Al igual que ocurre con las parábolas, podemos trasladar las hipérbolas en el plano en dirección horizontal o vertical, según los valores que tomen los parámetros a y b.

Actividades propuestas

15. Representa en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes hipérbolas:

a. $y = \frac{5}{x}$ $\quad y = \frac{5}{x} + 3$ $\quad y = \frac{5}{x} - 3$

b. $y = \frac{-12}{x}$ $\quad y = \frac{-12}{x-3}$ $\quad y = \frac{-12}{x+3}$

c. $y = \frac{3}{x}$ $\quad y = \frac{3}{x-1} + 5$ $\quad y = \frac{5x-2}{x-1}$

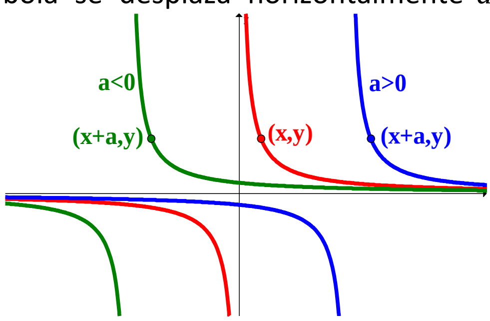
16. Describe lo que sucede cuando varían los parámetros a y b en las hipérbolas del ejercicio anterior.

En general, la representación gráfica de las hipérbolas cuya expresión algebraica es $y = \frac{k}{x-b} + a$ es una traslación el plano dependiendo de los valores de a y b.

Desplazamientos horizontales

Al variar el valor de $\boldsymbol{a}$, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza horizontalmente a unidades:

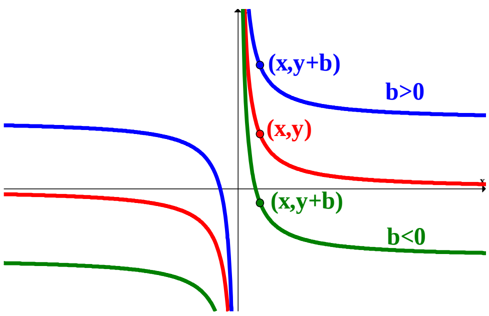
- Si $\boldsymbol{a > 0}$: la hipérbola se desplaza hacia la derecha.
- Si $\boldsymbol{a < 0}$: la hipérbola se desplaza hacia la izquierda.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x + a, y)$:
  $$(x, y) \to (x + a, y)$$
- El vector de traslación es el vector $(a, 0)$



Desplazamientos verticales

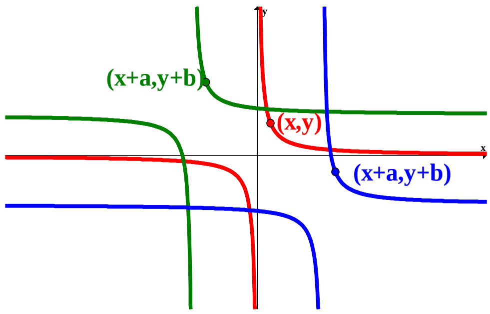
Al variar el valor de $\boldsymbol{b}$, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza verticalmente b unidades:

- Si $\boldsymbol{b > 0}$: la hipérbola se desplaza hacia arriba.
- Si $\boldsymbol{b < 0}$: la hipérbola se desplaza hacia abajo.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x, y + b)$:
  $$(x, y) \to (x, y + b)$$
- El vector de traslación es el vector $(0, b)$



Desplazamientos oblicuos

Al variar tanto el valor a de cómo el valor de b, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza diagonalmente tantas unidades como sea el valor de los parámetros:



- Las direcciones hacia donde se traslada dependerá de los signos de a y b.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x+a, y+b)$:
$$(x, y) \to (x+a, y+b)$$
- El vector de traslación es el vector (a, b)

Actividades propuestas

17. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa a partir de la hipérbola $y = \frac{5}{x}$:

a. $y = \frac{10}{x-5} + 3$ b. $y = \frac{1}{x+4} + 8$ c. $y = \frac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \frac{10}{2x-4} - 7$ e. $y = 6 - \frac{4}{x}$ f. $y = \frac{20}{5-x} - 2$

18. Estudia el dominio, recorrido, continuidad, simetría, asíntotas y crecimiento de las funciones de proporcionalidad inversa del ejercicio anterior.

19. Escribe una regla para expresar cómo se trasladan las asíntotas según los parámetros a y b.

Hipérbola $y = \frac{mx+n}{px+q}$

Las funciones que se definen mediante esta expresión también son funciones de proporcionalidad inversa y se representan mediante hipérbolas. Para ello, necesitamos hacer el cambio en una expresión como la estudiada en el apartado anterior que nos resulte más fácil de manejar y representar:

$$y = \frac{mx+n}{px+q} \to \text{Dividiendo } (mx+n):(px+q) \to y = \frac{k}{x-a} + b$$

Actividades resueltas

- Convertir la función $y = \frac{3x+2}{x-7}$ en una función cuya expresión sea más sencilla de representar.

  Dividimos $3x+2$ entre $x-7$:

  $$(3x+2) = 3(x-7) + 23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)} = \frac{3(x-7)}{(x-7)} + \frac{23}{(x-7)} = \frac{23}{(x-7)} + 3$$

  Esta última expresión es fácil de representar.

Actividades propuestas

20. Representa las siguientes hipérbolas:

a. $y = \frac{2x-4}{x+5}$ b. $y = \frac{3-5x}{x+2}$ c. $y = \frac{4x-12}{x-3}$

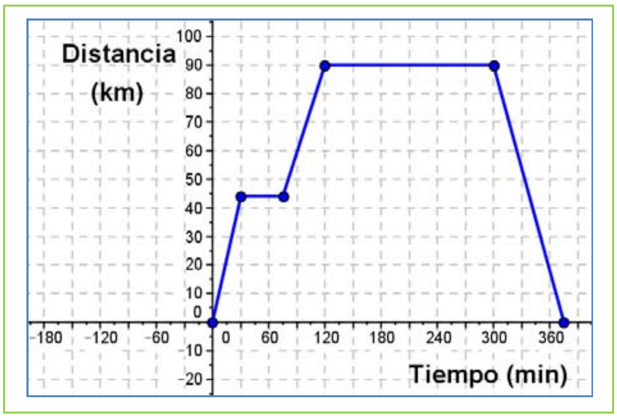
d. $y = \frac{6x+8}{1-x}$ e. $y = \frac{7x+5}{x-4}$ f. $y = \frac{6x+10}{2x-1}$

4. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Hay gráficas que no podemos representar con una única fórmula, como la del margen:

Actividades resueltas

- *La gráfica del margen representa una excursión en autobús de un grupo de 1º de E.S.O. a Toledo, pasando por Aranjuez. Busca una expresión que la represente.*

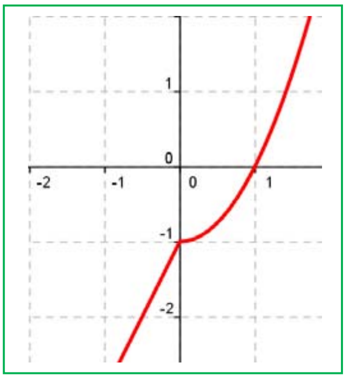


Este tipo de función se denomina **función definida a trozo**s pues cada trozo tiene una expresión algebraica diferente. Observa que está formada por 5 tramos de rectas, distintos. Podemos calcular sus ecuaciones pues conocemos los puntos por los que pasan: ((0, 0), (30, 45), (75, 45), (90, 120), (90, 300) y (0, 360).

Su expresión es:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & si\ 0\le x\le 30\\ 45 & si\ 30<x\le 75\\ 5x-330 & si\ 75<x\le 120\\ 90 & si\ 120<x\le 300\\ -\frac{3}{2}x+360 & si\ 300<x\le 360\end{cases}$$

- *Representa gráficamente la función* $f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\ x<0\\ x^2-1 & si\ x>0\end{cases}$.



Está definida de distinta manera antes de 0, que es una recta, que después de 0, que es una parábola. Simplemente dibujamos estas funciones en los intervalos indicados.

Actividades propuestas

21. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\ x<0\\ x-1 & si\ x>0\end{cases}$.

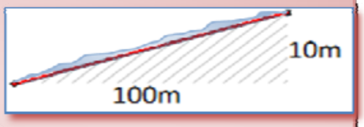
22. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & si\ x<0\\ 2x+2 & si\ x>0\end{cases}$.

23. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}2x+1 & si\ x<1\\ x+3 & si\ x>1\end{cases}$.

CURIOSIDADES. REVISTA

¿Conoces esta señal?

Seguramente la has visto en alguna carretera, pero ¿qué indica? Mide la pendiente de la carretera con respecto a la horizontal y significa que la pendiente es del 10 %, es decir, $\frac{10}{100}$. Quiere decir que subimos 10 metros de altura mientras que avanzamos 100 metros.



- Busca en internet el perfil del *L'Angliru* y comprueba la pendiente de sus rampas.

Arquímedes y el rayo de calor

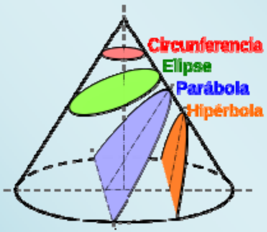
Arquímedes es uno de los personajes que más han aportado a la ciencia en la historia. Este ingeniero, físico, inventor, astrónomo y matemático nació en Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) y es el responsable muchos teoremas e invenciones que seguramente habrás oído, como el famoso principio de Arquímedes, o el tornillo de Arquímedes utilizado en las cadenas de producción de muchas empresas.

Cuando los romanos atacaron Siracusa, cuenta la leyenda que Arquímedes construyó un sistema que concentraba los rayos de sol en un rayo de calor que provocó el incendio de los barcos enemigos. Este sistema estaba compuesto por espejos (o escudos bien pulidos) colocados de tal forma que dibujasen una superficie parabólica.

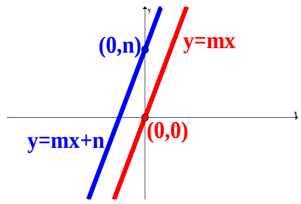
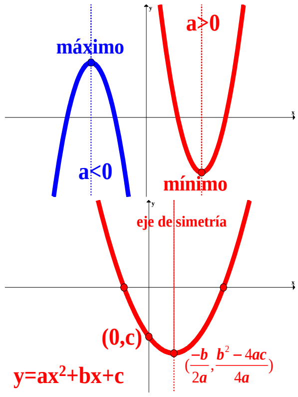
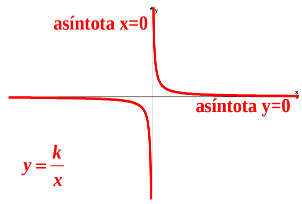
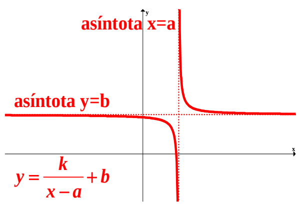
¿Mito o realidad? No se sabe, pero en la actualidad, este sistema es la base del funcionamiento de los hornos solares.

Apolonio de Pergue

Hemos estado hablando de parábolas e hipérbolas, pero, ¿de dónde vienen esas palabras y formas? El nombre de estas curvas se lo debemos a Apolonio de Pergue (262 a.C.- 190 a.C.) que estudió este tipo de funciones en su obra *Las Cónicas*. Las curvas surgen de los cortes de un cono: dependiend o el ángulo de corte, obtenemos unas curvas u otras. Es como cortar una barra de pan.



RESUMEN

		Ejemplos
Función polinómica de primer grado: Rectas $y = m \cdot x$ $y = m \cdot x + n$	Su expresión son polinomios de grado uno. Se representan mediante **rectas**: Hay dos tipos: - **Funciones lineales o de proporcionalidad directa**: $y = m \cdot x$, pasan por el origen de coordenadas. - **Funciones afines**: $y = m \cdot x + n$, son traslaciones en el eje y, n unidades. Pasan por el punto $(0, n)$.	
Función polinómica de segundo grado: Parábolas $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	Su expresión son polinomios de grado dos. Se representan mediante **parábolas**: **Vértice:** $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ **Puntos de corte con el eje OX:** $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. **Punto de corte con el eje OY:** $x = 0$, es el punto $(0, c)$. **Eje de simetría**: es la recta $x = \frac{-b}{2a}$.	
Función de proporcionalidad inversa: Hipérbolas $y = \frac{k}{x}$	$\lvert k \rvert$: aleja o acerca la curva al origen de coordenadas. **Dominio y recorrido:** son todos los números reales menos el 0. **Continuidad:** continua en todo su dominio, discontinua en $x = 0$. **Simetría:** impar, simétricas respecto al origen de coordenadas. **Asíntotas:** las rectas $x = 0$ e $y = 0$. **Crecimiento:** - Si $k > 0$: **decreciente** en $(-\infty, 0)$ y **creciente** en $(0, +\infty)$. - Si $k < 0$: **creciente** en $(-\infty, 0)$ y **decreciente** en $(0, +\infty)$.	
Hipérbolas $y = \frac{k}{x - a} + b$	Son el resultado de trasladar la hipérbola $y = \frac{k}{x}$ por el vector de traslación (a, b): - Dominio: $\Re - \{a\}$ Recorrido: $\Re - \{b\}$ - Puntos: $(x, y) \to (x + a, y + b)$ - Asíntotas: $\{x = 0 \to x = a\}; \{y = 0 \to y = b\}$	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Función lineal

1. Representa gráficamente la siguiente relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla y escribe su ecuación. Describe qué tipo de relación es.

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–15	–6	0	3	9

2. Representa las rectas a) $y = 5x$, b) $y = –5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2'3x$.

3. Estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de las funciones lineales a) $y = 1'5x$, b) $y = –0'5x$.

4. Estudia la función $y = 0,7x$ en el intervalo [–2, 5].

5. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (0, 0) y determina su expresión algebraica.

6. Representa las siguientes funciones lineales:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = –x + 5$ c) $y = 3x – 2$ d) $y = –2x – 3$.

7. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (2, 1) y determina su expresión algebraica.

8. Calcula la pendiente de las rectas que pasa por los puntos que se indican y determina su expresión algebraica.

a) (5, 1), (3, –2) b) (–3, 4), (4, –1) c) (1, 4), (0, 6) d) (–2, –4), (–1, 0)

9. Dos empresas de telefonía móvil lanzan sus ofertas: la empresa StarTel ofrece por cada llamada pagar 50 céntimos más 2 céntimos por minuto hablado; Tel-Hello ofrece 75 céntimos por llamada y minutos ilimitados. ¿Qué oferta es más económica? Para dar la respuesta, realiza los siguientes pasos, expresando los resultados analítica y gráficamente:

a. ¿Hay algún momento en que las dos ofertas sean iguales?

b. Si hablo una media de 15 minutos al día, ¿qué oferta me conviene?

c. Si hablo una media de 35 minutos al día, ¿qué oferta me conviene?

d. Si hago una media de 10 llamadas al día de 3 minutos de duración, ¿qué oferta me conviene?

e. Si hago una media de 2 llamadas al día de 30 minutos de duración, ¿qué oferta es la mejor?

f.¿Qué oferta es más económica?

10. El escritor Jaime Joyce tiene distintas ofertas editoriales para publicar su última novela. La editorial Dole le ofrece 100 €, además del 20 % de cada libro que venda; la editorial Letrarte le ofrece 350 €; y la editorial Paco le ofrece según la venta de libros: 50 € si vende hasta 250 libros, 100 € si vende hasta 500 libros, 300 € si vende hasta 1000 libros y 500 € si vende más de 1000 libros. Entre todas las editoriales, ¿cuál crees que es mejor oferta para Jaime?

Funciones cuadráticas

11. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $y = (x - 2)^2$ d) $y = (-x - 3)^2$.

12. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = 2{,}5x^2$ b) $y = -1{,}2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = -0{,}7x^2$.

13. Representa la gráfica de las funciones parabólicas siguientes e indica el vértice:

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = (x - 2)^2 + 4$ d) $y = -x^2 + x - 3$.

14. Determina los elementos de las parábolas siguientes

a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ b) $y = -2x^2 + 4x - 1$ c) $y = 4(x - 2)^2 + 9$ d) $y = -5x^2 + 2x - 6$.

Funciones de proporcionalidad inversa

15. Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas $y = k/x$ que pasan por los puntos que se indican. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a) (5, 1), b) (4, –1)) (1, 4) d) (–2, –4).

16. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

a) $y = 2/x$ b) $y = -1/x$ c) $y = 3/x$ d) $y = -2/x$.

17. Determina el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:

a) $y = 2'3/x$ b) $y = -1'7/x$ c) $y = 3'2/x$ d) $y = -2'1/x$.

18. Representa las siguientes hipérbolas:

a) $y = 2/x + 3$ b) $y = -1/x + 5$ c) $y = 3/x - 2$ d) $y = -2/x - 3$.

19. Representa las siguientes hipérbolas:

a) $y = 2/(x + 3)$ b) $y = -1/(x + 5)$ c) $y = 3/(x - 2)$ d) $y = -2/(x - 3)$.

20. Representa las siguientes hipérbolas:

a) $y = \frac{2x-3}{x+4}$ b) $y = \frac{-x-3}{2x+1}$ c) $y = \frac{2x-3}{3x-2}$ d) $y = \frac{x+2}{-x-3}$.

Funciones definidas a trozos

21. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x < -1 \\ x^2 - 1 & si\ x > -1 \end{cases}$.

22. Determina los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 2x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$.

23. Indica los intervalos donde la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si\ x < 2 \\ -x^2+4 & si\ x > 2 \end{cases}$ es creciente.

24. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & si\ x < 1 \\ 1/x & si\ x > 1 \end{cases}$.

AUTOEVALUACIÓN

1. La recta $y = 4x + 2$ tiene de pendiente m y ordenada en el origen b:

a) $m = 4$, $b = 0$ b) $m = 1/2$, $b = 6$ c) $m = 2$, $b = 4$ d) $m = 4$, $b = 2$

2. La recta que pasa por los puntos (1, 6) y (–2, 4) tiene de pendiente m y ordenada en el origen b:

a) $m = 2$, $b = 4$ b) $m = 3/2$, $b = 6$ c) $m = 2/3$, $b = 16/3$ d) $m = 6$, $b = 2/3$

3. Indica cuál de las siguientes funciones lineales es simétrica respecto del origen de coordenadas:

a) $y = (-10/17)x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = -x + 3$

4. Indica cuál de las siguientes funciones cuadráticas es simétrica respecto del eje de ordenadas:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = 4x^2$ d) $y = -x^2 + 3x + 2$

5. Indica el vértice de la función cuadrática $y = 3x^2 + 1$:

a) (0, 1) b) (1, 2) c) (0, 2) d) (0, 3)

6. Señala cuál de las siguientes funciones cuadráticas es *más estrecha* que $y = x^2$:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

7. Indica cuál de las siguientes hipérbolas es simétrica respecto del origen de coordenadas:

a) $y = -15/(21x)$ b) $y = 3/x + 1$ c) $y = 4/x + 2$ d) $y = -1/x + 3$

8. Señala cuál de las siguientes hipérbolas tiene como asíntotas a las rectas $x = 2$ e $y = 3$:

a) $y = -15/(x - 3) -2$ b) $y = 3/(x - 2) + 3$ c) $y = 4/(x + 2) -3$ d) $y = -12/(x + 3) + 2$

9. Si traslado la hipérbola $y = 3/x$ mediante el vector de traslación (1, 3) obtengo la hipérbola:

a) $y = 3/(x - 1) + 3$ b) $y = 3/(x - 3) + 1$ c) $y = 3/(x + 3) -1$ d) $y = -3/(x + 1) - 3$

10. Señala cuál de las siguientes funciones cuadráticas alcanza un mínimo absoluto:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$