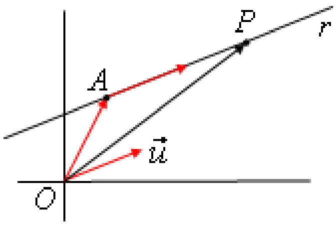
Tema 9 (II). Ecuaciones de una recta **Resumen**

Recta en el plano
Una recta *r* viene determinada por un punto *A* y un vector director $\vec{u}$, que indica su dirección.

Ecuación vectorial:



Si *P* es un punto de la recta *r*, se cumple la ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u}$$

Si $A(a_1, a_2)$, el vector director es $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y las coordenadas del punto genérico *P* son *x*, *y*), la ecuación anterior puede escribirse así:

$$(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(u_1, u_2)$$

Cualquiera de las ecuaciones anteriores recibe el nombre de ecuación vectorial. En la segunda, dicha ecuación se expresa dando las coordenadas de un punto y del vector director.

Ecuaciones paramétricas.
La ecuación $(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(u_1, u_2) \Leftrightarrow (x, y) = (a_1 + \lambda u_1, a_2 + \lambda u_2)$.

Igualando las respectivas coordenadas resulta: $\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \end{cases}$; que son las ecuaciones paramétricas. El parámetro es λ, e indica un número real cualquiera. Dando valores a λ se obtienen las coordenadas de puntos de la recta.

Ejemplo:
Las ecuaciones de la recta que pasa por *A*(1, 4) y tiene por vector director el $\vec{u}$ = (2, –3) son:

Vectorial: (*x*, *y*) = (1, 4) + λ(2, –3). Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \end{cases}$

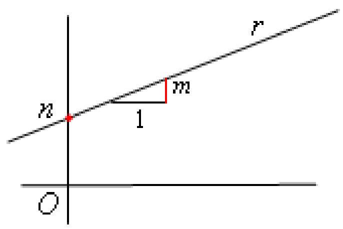
Para λ = 1 se obtiene el punto de coordenadas: *x* = 1 + 2 = 3; *y* = 4 – 3 = 1 → *P*(3, 1).
Para λ = –2 se obtiene el punto de coordenadas: *x* = 1 – 4 = –3; *y* = 4 + 6 = 10 → *Q*(–3, 10).

Ecuación continua. Despejando λ en cada una de las ecuaciones paramétricas e igualamos las dos expresiones obtenidas, resulta: $\dfrac{x - a_1}{u_1} = \dfrac{y - a_2}{u_2}$., que se llama ecuación continua.

Ejemplo:
La ecuación continua de la recta dada en el ejemplo anterior es: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{-3}$.

Ecuación punto-pendiente. Se deduce de la ecuación continua: $y - a_2 = \dfrac{u_2}{u_1}(x - a_1)$

Si se hace $m = \dfrac{u_2}{u_1}$, la ecuación queda $y - a_2 = m(x - a_1)$.



El cociente $m = \dfrac{u_2}{u_1}$ es la pendiente de la recta: es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje *OX*. La pendiente *m* indica lo que aumenta (o disminuye) la variable *y* por cada aumento unitario de la variable *x*.

Ecuación explícita. Despejando y en la ecuación punto-pendiente se obtiene $y = mx + n$.
Al número n se le llama ordenada en el origen.

Ejemplo:
La recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3}$ puede escribirse también así: $y - 4 = \frac{-3}{2}(x-1)$ → Punto pendiente
Despejando: $y - 4 = \frac{-3}{2}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$ → Explícita.

Ecuación general. También se llama ecuación implícita o cartesiana.
Se deduce de la continua, multiplicando en "cruz":

$$\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} \Rightarrow (x-a_1)\cdot u_2 = (y-a_2)\cdot u_1 \Rightarrow u_2\cdot x - u_1\cdot y - a_1\cdot u_2 + a_2\cdot u_1 = 0$$

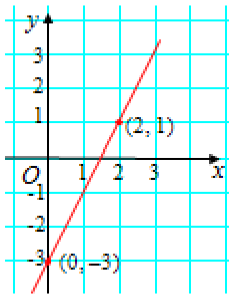
Si se hace $u_2 = A$, $-u_1 = B$ y $-a_1\cdot u_2 + a_2\cdot u_1 = C$, queda $Ax + By + C = 0$.
Las letras *A*, *B* y *C* son números, que pueden valer 0, aunque no a la vez; *x* e *y* son variables, que indican las coordenadas de los puntos de esa recta, siendo *x* la abscisa e *y* la ordenada.

- Un punto pertenece a una recta cuando cumple su ecuación.
- Para representar una recta basta con conocer dos de sus puntos.

Ejemplo:
a) La recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3}$ puede escribirse también así:

$$-3(x-1) = 2(y-4) \Leftrightarrow 3x + 2y - 11 = 0.$$

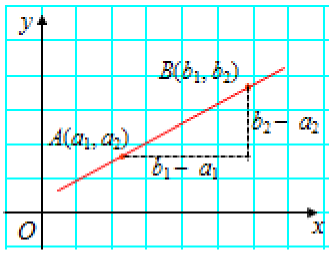
Puntos de esa recta son, por ejemplo: (1, 4), (–1, 7), (11/3, 0) y (0, 11/2).
b) Dos puntos de la recta $y = 2x - 3$ son, (0, –3) y (2, 1); uniéndolos se obtiene su representación gráfica.



Ecuación de la recta que pasa por dos puntos
La ecuación de la recta que pasa por $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ es

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1} = \frac{y-a_2}{b_2-a_2} \Leftrightarrow y - a_2 = \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}(x-a_1)$$

La misma expresión se obtiene partiendo de la ecuación $y = mx + n$ e imponiendo que los puntos *A* y *B* la cumplan.



Ejemplo: La ecuación de la recta que pasa por *A* = (–2, 1) y *B* = (3, 4) será:

$$\frac{x-(-2)}{3-(-2)} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{3} \Leftrightarrow 3x - 5y + 11 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$$

Posición relativa de dos rectas
En el plano, dos rectas pueden ser secante, paralelas o coincidentes. Su posición se determina estudiando el sistema asociado a ellas. Así, la posición de las rectas $r: Ax + By + C = 0$ y $s: A'x + B'y + C' = 0$, viene determinada por la solución de $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$.
Si las rectas fuesen paralelas (la misma pendiente) el sistema será incompatible: *A/A´* = *B/B´*.