Tema 13. FUNCIONES REALES **Resumen**

<u>Concepto de función</u>
Una función entre dos conjuntos X e Y es una relación definida de tal manera que a cada elemento X le corresponde exactamente otro elemento (uno y sólo uno) de Y.
Cuando X e Y son el conjunto de los reales, **R**, la función se llama de variable real.
En una función intervienen dos variables, una independiente y otra dependiente. La independiente suele designarse por *x*; suele llamarse *y*. Si el par (*x, y*) pertenece a la función *f*, se dice que $y = f(x)$. Esquemáticamente se indican así: *f*: **R** → **R**, esto es: $x \to \; y = f(x)$

- Las funciones reales suelen darse mediante una fórmula o expresión algebraica. Por ejemplo: $f(x) = x^2 - 3x$; $g(x) = \sqrt{3-x}$. También se escribe: $y = x^2 - 3x$; $y = \sqrt{3-x}$

<u>Dominio de *f*</u>. Dom(*f*) = {$x \in$ **R** | $f(x)$ existe}. Valores para los que existe $f(x)$.
<u>Imagen (recorrido) de *f*</u>. Im(*f*) = {$y \in$ **R** | $y = f(x)$, $x \in$ Dom(*f*)}. Son los valores que toma *f*.
Ejemplo: a) $y = x^2 - 3x$ está definida para todo número real: Dom(*f*) = **R**. Al tratarse de una parábola hacia arriba, su recorrido son los números $y \geq 3/2$, que es la ordenada del vértice.
b) $y = x^2 - 3x$ está definida para todo número real $x \leq 3$. Su recorrido son los números $y \geq 0$.

<u>Funciones definidas a trozos</u>: $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x < a \\ f_2(x), & \text{si } x \geq a \end{cases}$. Se indica así que la función que actúa para los valores de $x < a$ es $f_1(x)$, y para los valores de $x \geq a$ es $f_2(x)$.

<u>Idea gráfica de una función</u>. Las funciones de variable real suelen representarse por una línea. Todos los puntos de esa línea corresponden a pares de números relacionados entre sí por la función; para cada punto (x_0, y_0) de la gráfica, y_0 es la imagen de x_0; esto es, $y_0 = f(x_0)$.
Si una función viene dada por la expresión $y = f(x)$, para determinar la imagen de un número x_i basta con hallar el valor de $f(x_i)$. Los sucesivos puntos $(x_i, f(x_i))$ generan la gráfica de *f*.

<u>Funciones polinómicas</u>. Son de la forma $f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
Estas funciones están definidas para todo valor de *x*; luego su dominio es **R**.
Ejemplos: a) Función constante: $f(x) = a_0$ o $y = a_0$. Su gráfica es una recta horizontal.
b) Función lineal: $f(x) = a_1 x + a_0$ o $y = mx + n$. Su gráfica es una recta. Un caso particular es $f(x) = mx$ o $y = kx$, que es la <u>función de proporcionalidad directa</u>. El coeficiente *k* indica la razón de proporcionalidad. Su gráfica es la de una recta que pasa por el origen.
c) Función cuadrática: $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.Su gráfica es la de una parábola.

<u>Funciones racionales</u>. Son de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.
Estas funciones están definidas para todo valor de *x* que no anule el denominador.
Ejemplos:
a) Para $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$, Dom = **R** − {−2, 2}. b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 4}$ está definida para todo **R**.

Funciones con radicales. Son de la forma $y=\sqrt[n]{f(x)}$, siendo $f(x)$ cualquier otra función. Estas funciones están definidas cuando está definida $f(x)$ y además puede hacerse la raíz. En el caso de raíces de índice par, en particular la raíz cuadrada, $y=\sqrt{f(x)}$, cuando $f(x)\geq 0$.

Composición de funciones

Cuando sobre $f(x)$ actúa otra función *g* se puede hablar de composición de funciones. Es frecuente la notación $(g\circ f)(x)$, cuyo significado es $g(f(x))$; se lee *f* compuesta con *g*.
Esquemáticamente es:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}$$

Análogamente, $(f\circ g)(x)=f(g(x))$.
La composición de funciones no es conmutativa. Esto es, en general $g(f(x)) \neq f(g(x))$

Funciones inversas

Las funciones *f* y *g* son inversas si $g(f(x))=x$ y $f(g(x))=x$.
La función inversa de *f* se designa por f^{-1}. (También se dice que *f* y *g* son recíprocas.)

Imagen inversa de un número

Para todo y_0 del recorrido de la función *f*, su imagen inversa, $f^{-1}(y_0)$, es el conjunto de los números *x*, del dominio, que se transforman en y_0. Esto es, $f^{-1}(y_0)=\{x\in \mathrm{R} \mid f(x)=y_0\}$.

- Para hallar $f^{-1}(y_0)$ se resuelve la ecuación $f(x)=y_0$.
- En particular, $f^{-1}(0)$ da los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

Gráficamente, para determinar $f^{-1}(y_0)$ se traza la recta horizontal $y = y_0$; las abscisas correspondientes a los puntos de corte de esa recta con la gráfica de $f(x)$ forman la imagen inversa de y_0.

Transformaciones de una función

A partir de la función $f(x)$ pueden deducirse el comportamiento de:

$$-f(x),\quad |f(x)|,\quad k+f(x),\quad k\cdot f(x),\quad f(x+k),\quad f(k\cdot x),\quad k \text{ es un número real.}$$

- La función $-f(x)$ cambia de signo todos los resultados de $f(x)$.

Las gráficas de $f(x)$ y de $-f(x)$ son simétricas respecto del eje *OX*.

- La función $|f(x)|$ cambia de signo todos los resultados negativos de $f(x)$; los resultados positivos los deja iguales. Su gráfica no puede aparecer por debajo del eje *OX*.

También puede definirse a trozos. Así: $|f(x)|=\begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x)<0 \\ f(x), & \text{si } f(x)\geq 0 \end{cases}$

- La función $k+f(x)$ suma el número *k* a los resultados de $f(x)$. Por tanto, si *k* es positivo, la gráfica de $f(x)$ se desplaza *k* unidades hacia arriba; si $k < 0$, se desplaza hacia abajo.
- La función $k\cdot f(x)$ multiplica por *k* todos los resultados de $f(x)$.
- La función $f(x+k)$ es la misma que $f(x)$ pero trasladada *k* unidades a la izquierda si *k* es positivo, y *k* unidades a la derecha, si *k* es negativo.
- La función $f(k\cdot x)$ contrae o dilata la función $f(x)$; si $k > 1$, se contrae; si $0 < k < 1$, se dilata.

Algunas características acerca del comportamiento de una función

$f(x)$ es creciente en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \le f(a) \le f(a+h)$

$f(x)$ es decreciente en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \ge f(a) \ge f(a+h)$

$f(x)$ tiene un máximo en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \le f(a) \ge f(a+h)$

$f(x)$ tiene un mínimo en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \ge f(a) \ge f(a+h)$

En todos los casos, h es un número positivo y pequeño (tan pequeño como se quiera).

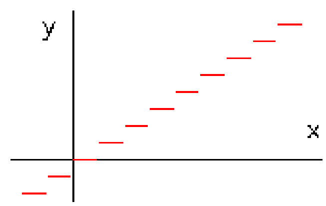
Continuidad. Discontinuidades.

La idea básica de continuidad es: una función *f* es continua cuando puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Cada vez que sea necesario levantarlo para seguir dibujando se produce una discontinuidad.

"Una función es continua en un punto cuando a variaciones infinitesimales (tan pequeñas como se quiera) de la variable x, en los alrededores de ese punto, corresponden variaciones también infinitesimales en los valores de la función".

Funciones escalonadas

Son funciones definidas a trozos, constantes en cada trozo y discontinuas en los puntos de división de los intervalos.



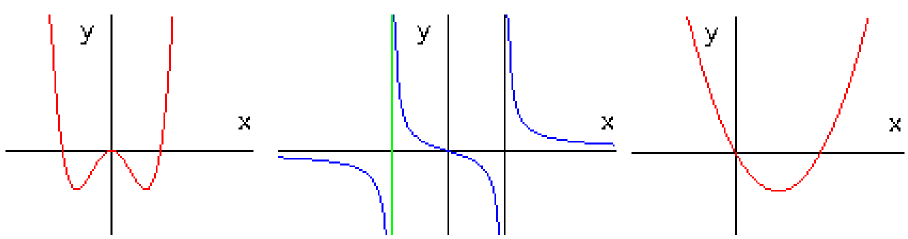
Funciones simétricas: pares e impares

Función es par: $f(-x) = f(x)$ para todo x de su dominio. Son simétricas respecto del eje OY.

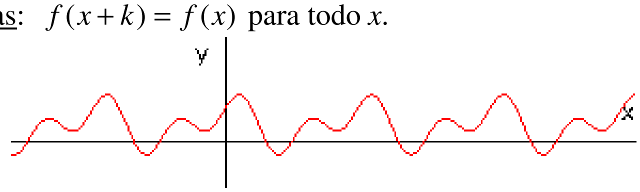
Función es impar: $f(-x) = -f(x)$ para todo x de su dominio. Simétricas respecto del origen.

Ejemplos:

a) Par: $f(x) = x^4 - 3x^2$. b) Impar: $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$. c) Ni par ni es impar: $f(x) = x^2 - 3x$.



Funciones periódicas: $f(x + k) = f(x)$ para todo x.



Asíntotas. Son rectas hacia las cuales tiende a *pegarse* la gráfica de la función. Pueden ser verticales, horizontales y oblicuas.

Las funciones de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, pueden tener asíntotas verticales en aquellos puntos que anulen el denominador: en las soluciones de $Q(x) = 0$. La función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$, dibujada más arriba, tiene dos asíntotas verticales, $x = -2$ y $x = 2$, y otra horizontal, $y = 0$.