Tema 12. Funciones exponenciales y logarítmicas **Resumen**

La función exponencial es de la forma $f(x) = a^x \Leftrightarrow y = a^x$, $a > 0$ y $a \neq 1$.

Ejemplos:

a) $f(x) = 2^x$ es la función exponencial de base 2.

Algunos valores son:

$f(1) = 2^1 = 2$; $f(2) = 2^2 = 4$; $f(3) = 2^3 = 8$;

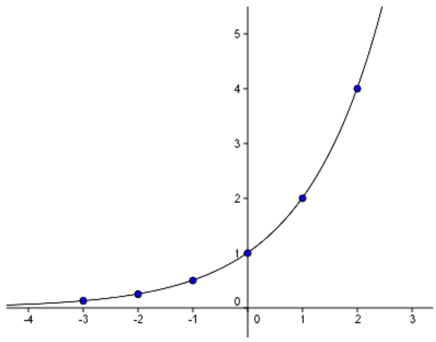
$f(0) = 2^0 = 1$; $f(-1) = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$; $f(-2) = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$;

$f(-3) = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$; $f(2{,}3) = 2^{2{,}3} = 4{,}924577653$.

Este último valor se halla con la calculadora, teclas ...

Los puntos correspondientes de su gráfica son:

(1, 2); (2, 4); (3, 8); (0, 1); (-1, 1/2); (-2, 1/4); (-3, 1/8),



b) $f(x) = 0{,}5^x$ es la exponencial de base 1/2.

Esta función es equivalente a:

$f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2^x} \Leftrightarrow f(x) = 2^{-x}$

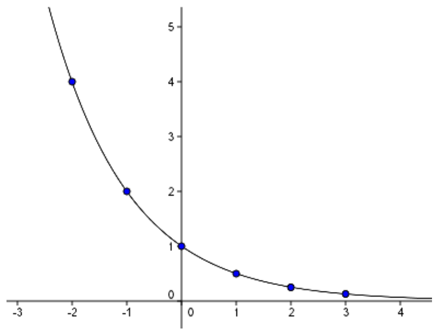
Algunos valores son:

$f(1) = 0{,}5^1 = 0{,}5$; $f(2) = 0{,}5^2 = 0{,}25$; $f(3) = 0{,}5^3 = 0{,}125$;

$f(0) = 0{,}5^0 = 1$; $f(-1) = 0{,}5^{-1} = 2$; $f(-2) = 0{,}5^{-2} = 4$;...

Los puntos correspondientes de su gráfica son:

(1, 0,5); (2, 0,25); (3, 0,125); (0, 1); (-1, 2); (-2, 4).



Observación: Para trabajar correctamente con las funciones exponenciales y logarítmicas es necesario manejar bien las propiedades de la potenciación.

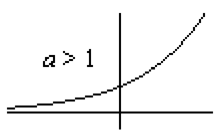
Algunas de ellas son: $a^1 = a$; $a^0 = 1$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; $-a^n$ no es igual a $(-a)^n$

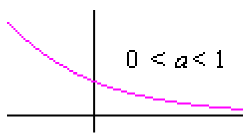
Características fundamentales de la función exponencial $f(x) = a^x$

- Dominio: **R**.
- Su valor siempre es positivo: $f(x) = a^x > 0$, para todo *x*.
- Corta al eje *OY* en el punto *y* = 1, pues $f(0) = a^0 = 1$.
- Los valores de la función siempre son positivos: su recorrido es el intervalo (0, +∞).
- Crecimiento y decrecimiento:

Si la base *a* > 1, la función siempre es creciente: desde 0 hasta +∞. La curva se *pega* al eje *OX* por la izquierda

Si la base 0 < *a* < 1, la función es decreciente: desde +∞ hasta 0. La curva se *pega* al eje *OX* por la derecha.





(En ambos casos se dice que el eje *OX* es una asíntota horizontal de la curva.)

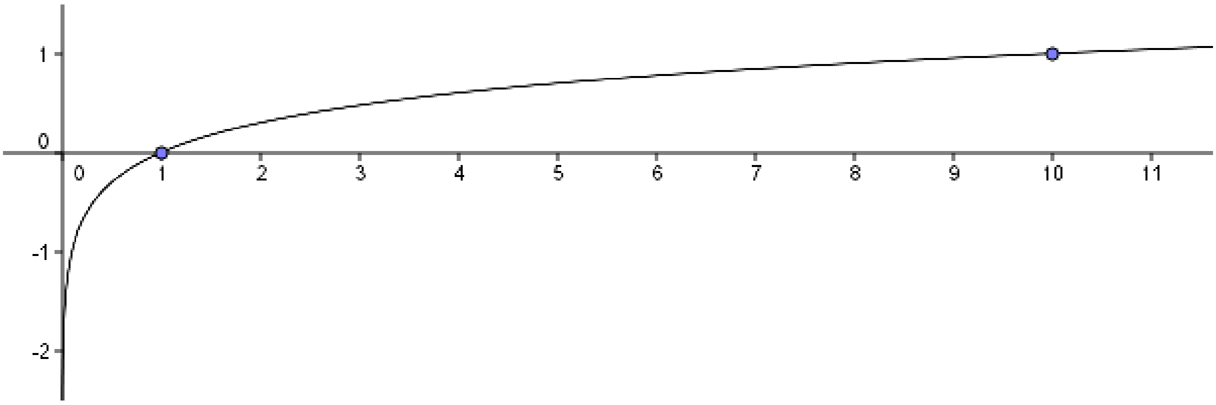
La función logarítmica

La más sencilla es $f(x) = \log_a x \iff y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$).

Para las bases usuales, $a = 10$ y $a = e$: $f(x) = \log x$ y $f(x) = \ln x$.

Los valores de esta función pueden hallarse con ayuda de la calculadora. Teclas log y ln.

La gráfica de la función $f(x) = \log x$, (la del logaritmo en base 10) es la siguiente:



Propiedades fundamentales:

- Dominio: $\mathbf{R}^+ \to x > 0$. Recorrido: $(-\infty, +\infty)$.
- El eje OY, la recta $x = 0$, es asíntota vertical de su curva.

Si $a > 1$ (que es lo usual), la función es creciente.

Si $0 < a < 1$, la función será decreciente.

Propiedades de los logaritmos

$\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$ $\qquad \log_a A^n = n \log_a A$ $\qquad \log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

$\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$ $\qquad \log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$

Aplicaciones de exponenciales y logaritmos: aumentos y disminuciones porcentuales

Interés simple. Un capital C_0, al cabo de un año, a un interés del *i* % produce una renta $R = C_0 \cdot \frac{i}{100} = C_0 \cdot r$, donde $r = \frac{i}{100}$ indica la tasa en tanto por uno.

- El capital acumulado al cabo de un año será $C = C_0(1+r)$.

Ejemplo: Un capital de 20000 €, al 5% anual, produce una renta anual de 20000 · 0,05 = 1000 €. El capital acumulado al cabo de un año será $C = 20000 \cdot (1+0{,}05) = 21000$ €

Interés compuesto. En el interés compuesto, el capital inicial va incrementándose con los intereses producidos en los años anteriores.

- El capital acumulado al cabo de *t* años, a una tasa de interés anual *r* (en tanto por uno), será: $C(t) = C_0(1+r)^t$. Esta expresión es el resultado de ir multiplicando el capital inicial del año anterior por el factor $(1+r)$. Así:

Inicial: $C_0 \to$ (1$^{\text{er}}$ año): $C_0 \cdot (1+r) \to$ (2º año): $[C_0 \cdot (1+r)] \cdot (1+r) = C_0(1+r)^2$

$\to$ (3$^{\text{er}}$ año): $[C_0(1+r)^2] \cdot (1+r) = C_0(1+r)^3 \to ... \to$ (*t* años): $C(t) = C_0(1+r)^t$

Ejemplo:

a) Un capital de 20000 €, al 6% anual, se convierte al cabo de 8 años en

$C(8) = 20000(1+0{,}06)^8 = 31876{,}96$ €

b) ¿Cuánto tiempo tardaría en doblarse un capital al 5% anual?

Habría que resolver la ecuación: $2 \cdot C_0 = C_0(1+0{,}05)^t \Leftrightarrow 2 = (1+0{,}05)^t$.

Aplicando logaritmos:

$$\log 2 = \log(1+0{,}05)^t \Rightarrow \log 2 = t \cdot \log(1+0{,}05) \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = 14{,}2 \text{ años}$$

Disminuciones porcentuales. Si alguna cosa (dinero, agua, material radiactivo...) está sujeto a una disminución porcentual a lo largo del tiempo, la cantidad de esa cosa que queda al cabo de *t* años será: $C(t) = C_0(1-r)^t$, siendo a *r* la tasa de disminución anual, en tanto por uno, y C_0 la cantidad inicial.

Ejemplo: Debido a un proceso de desertización, la superficie forestal de una determinada región disminuye un 8% anualmente.

a) Si en el momento actual la superficie forestal es de 15000 hectáreas, ¿cuántas hectáreas quedarán dentro de 4 años?

Quedarán: $C(4) = 15000(1-0{,}08)^4 = 10745{,}89$ ha.

b) Si se mantiene ese proceso de desertización, ¿en cuánto tiempo la superficie forestal quedaría reducida a la mitad?

Habría que resolver la ecuación: $7500 = 15000(1-0{,}08)^t \Leftrightarrow 0{,}5 = (1-0{,}08)^t$.

Aplicando logaritmos:

$$\log 0{,}5 = \log(1-0{,}08)^t \Rightarrow \log 0{,}5 = t \cdot \log(1-0{,}08) \Rightarrow t = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}92} = 8{,}31 \text{ años}$$