COMBINATORIA (RESUMEN)

La Combinatoria es una herramienta que nos permite contar el número de situaciones que se pueden dar al someter a un conjunto finito a las acciones de ordenar y/o elegir entre sus elementos.

COMBINATORIA SIN REPETICIÓN

PERMUTACIONES de *n* elementos: posibles ordenaciones de un conjunto de *n* elementos distintos.
Acción: **ordenar**

Su número: $P_n = n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ (se lee "factorial de *n*") . Por convenio 0!=1

En la calculadora: con la tecla *x*! se calcula "factorial de *x*" , siendo *x* un número entero no negativo.

Modelo: ¿Cuántos números de 4 cifras distintas pueden escribirse con los dígitos 2, 3 , 5 y 8 ?
Solución: 4! = 4· 3 · 2· 1 = 24 números

VARIACIONES de *n* elementos tomados de *r* en *r* : posibles **muestras ordenadas** de *r* elementos distintos que se pueden extraer de un conjunto de *n* elementos ($r \le n$) Acción: **elegir con orden**

Su número: $V_n^r = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)$ (*r* factores enteros consecutivos decrecientes a partir de *n*)

En la calculadora: con la tecla *nPr* se calcula V_n^r , siendo $r \le n$

Notemos que $V_n^n = P_n = n!$

Modelo: En una carrera con 10 atletas, ¿de cuántas formas distintas podrían repartirse las medallas de oro, plata y bronce?

Solución: $V_{10}^3 = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$ formas distintas

---

COMBINACIONES de *n* elementos tomados de *r* en *r*: posibles **muestras sin orden** de *r* elementos distintos que se pueden extraer de un conjunto de n elementos ($r \le n$). Acción: **elegir sin orden**

Su número: $C_n^r = \binom{n}{r} = \dfrac{V_n^r}{P_r} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

En la calculadora: con la tecla nCr se calcula $\binom{n}{r}$ (que se lee "*n sobre r*")

Modelo: En una reunión de 10 personas debe nombrarse una comisión formada por tres de ellas. ¿Cuántas comisiones distintas podrían nombrarse?

Solución: $\binom{10}{3} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$ comisiones distintas.

COMBINATORIA CON REPETICIÓN

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN: posibles **ordenaciones** de una secuencia de *n* signos entre los que hay algunos repetidos (uno se repite α veces, oto β veces, otro γ veces… etc.).

Su número: $P_n^{\alpha,\beta,\gamma\ldots} = \dfrac{n!}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\gamma!\cdots}$

Notemos que $P_n^{\alpha,n-\alpha} = \dbinom{n}{\alpha}$

Modelo: ¿Cuántos números distintos de 6 cifras se pueden escribir usando tres unos, dos cincos y un ocho?

Solución: $P_6^{3,2} = \dfrac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$ números distintos.

VARIACIONES CON REPETICIÓN de *n* elementos tomados de *r* en *r*: posibles **muestras ordenadas** de *r* elementos no necesariamente distintos que se pueden extraer de un conjunto de *n* elementos.

Su número: $VR_n^r = n\cdot n\cdot n\cdots n = n^r$

Notemos que aquí puede ser r > n

Modelo: ¿Cuántos números distintos de 6 cifras se escriben usando solamente las cifras 1, 5 y 8 ?

Solución: $VR_3^6 = 3^6 = 729$ números distintos.

COMBINACIONES CON REPETICIÓN de *n* elementos tomados de *r* en *r*: posibles **muestras no ordenadas** de *r* elementos no necesariamente distintos que se pueden extraer de un conjunto de *n* elementos.

Su número: $CR_n^r = \dbinom{n+r-1}{r}$

Notemos que aquí puede ser r > n

Modelo: Un banco ofrece un regalo a elegir entre 5 posibles regalos por cada cartilla. Un señor que tiene tres cartillas en dicho banco ¿de cuántas formas puede elegir el lote de tres obsequios si no le importa repetir regalos?

Solución: $CR_5^3 = \dbinom{5+3-1}{3} = \dbinom{7}{3} = 35$ lotes distintos.

NÚMEROS COMBINATORIOS

Los números combinatorios o coeficientes binomiales son los números de la forma $\binom{n}{r}$ siendo *r* y *n* enteros no negativos con r≤n. Se calculan, como ya se ha dicho mediante la fórmula:

$$\binom{n}{r} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \quad , \quad \text{o también mediante} \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

Indican:

- El número de combinaciones sin repetición de *n* elementos tomados de *r* en *r*.
- El número de subconjuntos de *r* elementos que tiene un conjunto de *n* elementos.

Propiedades básicas:

1) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ Ejemplo: $\binom{11}{9} = \binom{11}{2} = 55$

2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{1} = 1$

3) $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ Ejemplo: $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$

4) EL TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
…………………………etc.

En cada fila:

- Los extremos son iguales a 1
- Cada elemento del interior es la suma de los dos que tiene encima
- Los elementos de la fila n-ésima son $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ en ese mismo orden.

5) BINOMIO DE NEWTON, nos da el desarrollo de la potencia n-ésima de un binomio.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

(Los coeficientes ordenados son la fila n-ésima del triángulo de Tartaglia)

En el caso de una diferencia los signos alternan:

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}b^n$$

6) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

(Un conjunto de n elementos tiene exactamente 2^n subconjuntos, contando el vacío y el conjunto total)

7) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

Otras propiedades:

8) $\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\binom{r+2}{r}+\cdots\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}$

9) $\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\binom{n}{2}\binom{m}{r-2}+\cdots+\binom{n}{r}\binom{m}{0}=\binom{m+n}{r}$

10) $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$