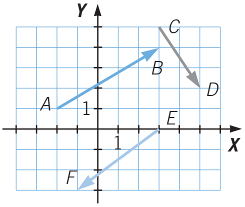
EJERCICIOS

001 **¿Cuáles son las coordenadas de los vectores?**

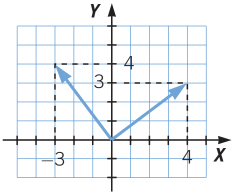
$\overrightarrow{AB} = (5, 3)$

$\overrightarrow{CD} = (2, -3)$

$\overrightarrow{EF} = (-4, -3)$



002 **Dibuja dos vectores diferentes que tengan el mismo módulo, distinta dirección y diferente sentido.**



003 **Expresa estas situaciones con vectores, indicando su módulo, dirección y sentido.**

a) Un barco sale de Canarias con dirección Norte a una velocidad de 10 nudos.

b) Un barco sale de Azores con dirección Sureste y una velocidad de 12 nudos.

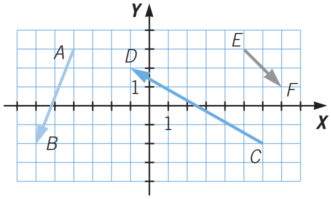
a)

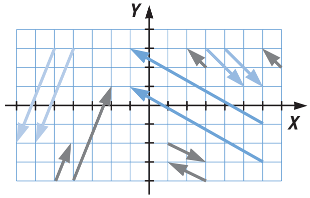
b)

004 **¿Qué diferencias hay entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$?**

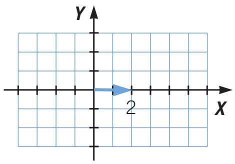
Son vectores con igual módulo y dirección, pero con distinto sentido.

005 **Dibuja dos vectores equivalentes a cada vector y otros dos paralelos.**

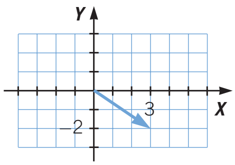




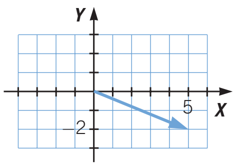
006 **Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 0)$ y $C(3, -2)$, representa y calcula las coordenadas y el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$.**



$\overrightarrow{AB} = (2, 0)$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = 2$



$\overrightarrow{BC} = (3, -2)$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{13}$



$\overrightarrow{AC} = (5, -2)$ $\quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{29}$

007 **Dados los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ y $C(0, 2)$, halla las coordenadas de un punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean equivalentes, y también para que sean paralelos.**

$\overrightarrow{AB} = (1, 1)$

Sea $D(a, b) \rightarrow \overrightarrow{CD} = (a - 0, b - 2) = (a, b - 2)$.

Para que los vectores sean equivalentes:

$(1, 1) = (a, b - 2)$

Las coordenadas de D son $(1, 3)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$ y $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2}$, porque dos vectores equivalentes tienen el mismo módulo.

Para que los vectores sean paralelos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b-2}{1} \rightarrow a = b - 2$$

Las coordenadas de D son $(b - 2, b)$; por ejemplo, $(2, 4)$.

008 **Las coordenadas de los puntos A, B, C y D son:**

$$A(0, 0) \qquad B(-1, 3) \qquad C(-2, -2) \qquad D(1\ -3)$$

Calcula el resultado de estas operaciones.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ **c)** $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$ **e)** $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ **d)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ **f)** $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} = (-1, 3) \qquad \overrightarrow{CD} = (3, -1)$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (2, 2)$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-4, 4)$

c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = (4, -4)$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = (-2, 6)$

e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = (0, 0)$

f) $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-2, -2)$

009 **Los puntos $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$ y $C(2, 0)$ son los vértices de un triángulo. Halla las coordenadas de los vectores que forman sus lados.**

$\overrightarrow{AB} = (1, 1) \qquad \overrightarrow{BC} = (2, -2) \qquad \overrightarrow{CA} = (-3, 1)$

010 **Si $\vec{u} = (-3, 2)$ y $\vec{w} = (4, -1)$, determina el vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.**

$\vec{v} = \vec{w} - \vec{u} = (7, -3)$

011 **Sabiendo que $A(3, -4)$ y $B(5, 2)$, calcula $k \cdot \overrightarrow{AB}$.**

a) $k = 3$ **b)** $k = -2$ **c)** $k = 5$ **d)** $k = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{AB} = (2, 6)$

a) $3 \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \cdot (2, 6) = (6, 18)$

b) $-2 \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \cdot (2, 6) = (-4, -12)$

c) $5 \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \cdot (2, 6) = (10, 30)$

d) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot (2, 6) = (1, 3)$

012 **Efectúa las siguientes operaciones analítica y gráficamente, si $\vec{u} = (6, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 1)$.**

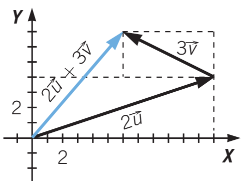
a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$

b) $(-1) \cdot \vec{v} - \vec{u}$

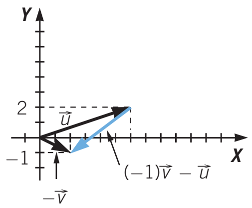
a) $2 \cdot (6, 2) + 3 \cdot (-2, 1) = (12, 4) + (-6, 3) = (6, 7)$

b) $(-1) \cdot (-2, 1) - (6, 2) = (2, -1) - (6, 2) = (-4, -3)$

a)



b)



013 **Sabemos que A' es el transformado de A por la traslación de vector $\vec{u}$. Calcula x e y.**

a) $A(0, 2) \xrightarrow{\vec{u} = (x, y)} A'(-2, 4)$ **c)** $A(x, y) \xrightarrow{\vec{u} = (-2, -3)} A'(-4, 6)$

b) $A(-1, -2) \xrightarrow{\vec{u} = (x, 3)} A'(5, y)$ **d)** $A(x, 8) \xrightarrow{\vec{u} = (7, y)} A'(10, 5)$

a) $\vec{u} = (x, y) = (-2, 4) - (0, 2) = (-2, 2) \rightarrow x = -2, y = 2$

b) $(-1, -2) + (x, 3) = (5, y) \rightarrow x = 6, y = 1$

c) $(x, y) + (-2, -3) = (-4, 6) \rightarrow x = -2, y = 9$

d) $(x, 8) + (7, y) = (10, 5) \rightarrow x = 3, y = -3$

014 **Dados los puntos de coordenadas $A(-1, 7)$ y $B(0, 1)$:**

a) Calcula el vector director de la recta que pasa por A y B.

b) Halla la ecuación vectorial de dicha recta.

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -6)$

b) Ecuación vectorial de la recta: $(x, y) = (-1, 7) + t \cdot (1, -6)$

015 **Calcula la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(0, -4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 7)$.**

La ecuación vectorial de la recta es: $(x, y) = (0, -4) + t \cdot (-1, 7)$.

016 **Determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(-2, 3)$ y tiene como vector director:**

a) $\vec{v} = (3, 4)$ **b)** $-\vec{v} = (-3, -4)$ **c)** $2\vec{v} = (6, 8)$

Escribe cinco puntos de cada una de las rectas. ¿Qué característica tienen en común estas tres rectas?

a) $(x, y) = (-2, 3) + t \cdot (3, 4)$

b) $(x, y) = (-2, 3) + t \cdot (-3, -4)$

c) $(x, y) = (-2, 3) + t \cdot (6, 8)$

Los cinco puntos pueden ser: $(-2, 3)$, $(1, 7)$, $(4, 11)$, $(-5, -1)$ y $(-8, -5)$.

Las tres rectas son coincidentes.

017 **Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(0, -4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 7)$.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 + (-1) \cdot t \\ y = -4 + 7 \cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -t \\ y = -4 + 7t \end{array}\right\}$$

018 **¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 0)$?**

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + (-1) \cdot t \\ y = 3 + 0 \cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 \end{array}\right\}$$

019 **Dados los puntos $A(-1, 7)$ y $B(0, 1)$, halla:**

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por ellos.

b) Tres puntos que pertenezcan a dicha recta.

a) El vector director de la recta es: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -6)$.

Las ecuaciones paramétricas son:

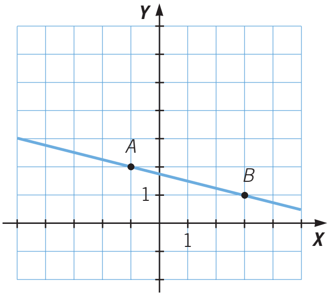
$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 1 \cdot t \\ y = 7 + (-6) \cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = 7 - 6t \end{array}\right\}$$

b) $t = 1 \rightarrow x = -1 + 1 = 0 \qquad y = 7 - 6 \cdot 1 = 1$

$t = 2 \rightarrow x = -1 + 2 = 1 \qquad y = 7 - 6 \cdot 2 = -5$

$t = -1 \rightarrow x = -1 - 1 = -2 \qquad y = 7 - 6 \cdot (-1) = 13$

020 **La siguiente gráfica muestra una recta.**



a) Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación vectorial.

b) ¿Pertenece el punto $(-6, 4)$ a la recta?

La recta pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(3, 1)$.

El vector director de la recta es:

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (4, -1)$

a) Las ecuaciones paramétricas son:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 4 \cdot t \\ y = 2 + (-1) \cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 + 4t \\ y = 2 - t \end{array}\right\}$$

La ecuación vectorial es: $(x, y) = (-1, 2) + t \cdot (4, -1)$.

b) No, ya que no existe ningún valor t para que se cumpla $(-6, 4) = (-1, 2) + t \cdot (4, -1)$.

021 **Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por estos puntos.**

$A(3, -1)$ $\qquad$ $B(4, 5)$

Punto: $A(3, -1)$ $\qquad$ Vector director: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, 6)$

Ecuación continua: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{6}$

022 **Halla la ecuación continua de la siguiente recta expresada en forma paramétrica.**

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x = 2 - 3t} \\ \boldsymbol{y = 2t} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - 3t \rightarrow t = \dfrac{x-2}{-3} \\ y = 2t \rightarrow t = \dfrac{y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2}$$

023 **Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 0)$.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + (-1)\cdot t \\ y = 3 + 0\cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 \end{array}\right\}$$

024 **Expresa la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(1, 2)$ mediante sus ecuaciones:**

a) Vectorial. **b) Paramétricas.**

¿Se puede expresar en forma continua? ¿Por qué?

El vector director de la recta es: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0, 4)$.

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (1, -2) + t \cdot (0, 4)$

b) Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 0\cdot t \\ y = -2 + 4\cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 + 4t \end{array}\right\}$

La recta no se puede expresar en forma continua, porque una de las coordenadas del vector director es cero.

025 **Determina las ecuaciones explícita y punto-pendiente de la recta que pasa por $A(0, -4)$ y su vector director es $\vec{v} = (-1, 7)$.**

Ecuación explícita: $y = -7x - 4$

La pendiente es: $m = \dfrac{7}{-1} = -7$.

Ecuación punto-pendiente: $y + 4 = -7x$

026 **La ecuación de una recta es $y = 3x - 3$. ¿Cuál es la pendiente? Halla un vector director.**

La pendiente de la recta es $m = 3$.

Un vector director de la recta es $\vec{v} = (1, 3)$.

027 **La ecuación de la recta r es $y = -x + 2$.**

a) ¿Cuál es el valor de la pendiente? ¿Y el de la ordenada en el origen?

b) Determina las coordenadas de uno de sus vectores directores.

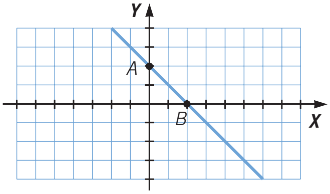
c) Obtén dos puntos de la recta y dibújala.

d) El punto $A(-1, 4)$, ¿pertenece a esa recta?

a) La pendiente es -1 y la ordenada en el origen es 2.

b) Un vector director es $(1, -1)$.

c) $A = (0, 2)$, $B = (2, 0)$



d) $4 \neq -1 \cdot (-1) + 2$

No pertenece a la recta.

028 **Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(0, -1)$ y $B(3, 2)$.**

Vector director: $\vec{v} = (3, 3)$.

La ecuación general es: $-3x + 3y + C = 0$.

Como el punto $B(3, 2)$ pertenece a la recta, resulta:

$$-3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + C = 0 \rightarrow C = 3$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-x + y + 1 = 0$.

029 **¿Cuál es la ecuación general de la recta cuya ecuación vectorial es $(x, y) = (1, 1) + t \cdot (3, 1)$?**

Vector director: $\vec{v} = (3, 1)$.

La ecuación general es: $-x + 3y + C = 0$.

Como el punto $(1, 1)$ pertenece a la recta, resulta:

$$-1 + 3 \cdot 1 + C = 0 \rightarrow C = -2$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-x + 3y - 2 = 0$.

030 **La pendiente de una recta es $m = 2$ y sabemos que pasa por el punto $A(0, -1)$.**

a) Escribe su ecuación general.

b) Calcula un vector director y otro paralelo.

a) Vector director: $\vec{v} = (1, 2)$.

La ecuación general es: $-2x + y + C = 0$.

Como el punto $A(0, -1)$ pertenece a la recta, resulta:

$$-2 \cdot 0 - 1 + C = 0 \rightarrow C = 1$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-2x + y + 1 = 0$.

b) Un vector director es: $\vec{v} = (B, -A) = (1, 2)$.

Un vector paralelo es: $\vec{u} = (2, 4)$.

031 **Indica cuál es la posición relativa de las siguientes rectas en el plano.**

a) $r: x + 3y + 3 = 0$
$s: x - 5y + 3 = 0$

b) $r: x + 3y + 2 = 0$
$s: 3x + 9y + 6 = 0$

a) El vector director de r es $(3, -1)$ y su pendiente es $m = \dfrac{-1}{3}$.

El vector director de s es $(-5, -1)$ y su pendiente es $m' = \dfrac{-1}{-5} \neq \dfrac{1}{3} = m$.

Las rectas son secantes.

b) El vector director de r es $(3, -1)$ y el vector director de s es $(9, -3)$.

Los vectores directores son proporcionales: $\dfrac{-1}{3} = \dfrac{-3}{9}$,

y el punto $(1, -1)$ pertenece a r y s. Las rectas son coincidentes.

032 **Estudia la posición relativa de las rectas r: $(x, y) = t \cdot (3, 1)$ y s: $x - 5y + 3 = 0$.**

El vector director de r es $(3, 1)$ y su pendiente es $m = \frac{1}{3}$.

El vector director de s es $(-5, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{-5} \neq \frac{1}{3}$.

Las rectas son secantes.

033 **¿Cuánto tiene que valer A para que las rectas r: $y = Ax + 6$ y s: $\frac{x}{2} = \frac{y-6}{4}$ sean paralelas?**

Un vector director de s es $(2, 4)$ y su pendiente es 2.

Las rectas son paralelas cuando $A = 2$.

ACTIVIDADES

034 ●● **Escribe tres ejemplos de magnitudes escalares y otros tres de magnitudes vectoriales.**

Magnitudes escalares: la edad de Juan, la altura de María y el precio de la compra.

Magnitudes vectoriales: la gravedad, la aceleración de un móvil y la frenada de un coche.

035 ● **Dibuja el vector $\overrightarrow{AB}$, cuyo origen y extremo son:**

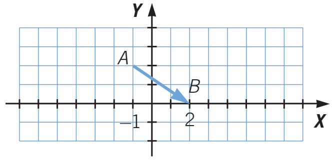
a) $A(-1, 2)$ y $B(2, 0)$

b) $A(2, 0)$ y $B(-1, 2)$

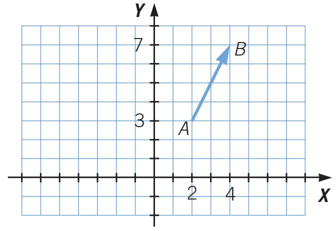
c) $A(2, 3)$ y $B(4, 7)$

d) $A(-2, 3)$ y $B(-4, 7)$

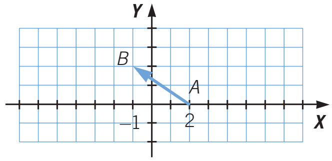
a)



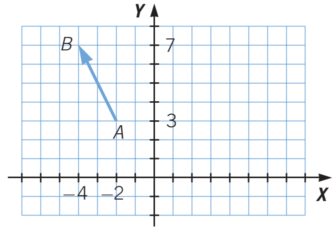
c)



b)



d)



036 Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$, siendo A y B los siguientes puntos.

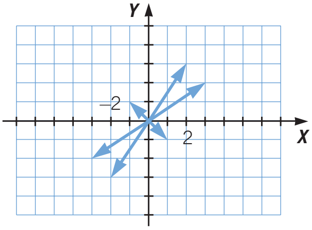
a) $A(0, 2)$ y $B(1, -1)$
b) $A(2, 1)$ y $B(4, 3)$
c) $A(-2, 1)$ y $B(-5, 1)$
d) $A(0, 0)$ y $B(6, 2)$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, -3)$
b) $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$
c) $\overrightarrow{AB} = (-3, 0)$
d) $\overrightarrow{AB} = (6, 2)$

037 ¿Cuántos vectores se pueden formar con los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 5)$ y $C(4, 4)$? Descríbelos y represéntalos.

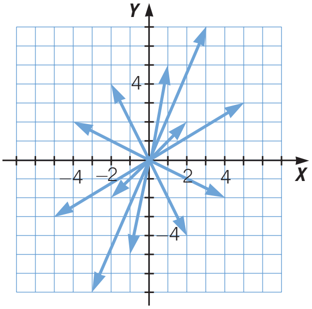
Se pueden formar 6 vectores:

$\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ $\quad\overrightarrow{BA} = (-2, -3)$
$\overrightarrow{BC} = (1, -1)$ $\quad\overrightarrow{CB} = (-1, 1)$
$\overrightarrow{CA} = (-3, -2)$ $\quad\overrightarrow{AC} = (3, 2)$



038 ¿Cuántos vectores se pueden formar con los puntos $A(4, 1)$, $B(2, 5)$, $C(0, 3)$ y $D(-1, -2)$? Descríbelos y represéntalos.

$\overrightarrow{AB} = (-2, 4)$ $\quad\overrightarrow{BA} = (2, -4)$
$\overrightarrow{AC} = (-4, 2)$ $\quad\overrightarrow{CA} = (4, -2)$
$\overrightarrow{AD} = (-5, -3)$ $\quad\overrightarrow{DA} = (5, 3)$
$\overrightarrow{BC} = (-2, -2)$ $\quad\overrightarrow{CB} = (2, 2)$
$\overrightarrow{BD} = (-3, -7)$ $\quad\overrightarrow{DB} = (3, 7)$
$\overrightarrow{CD} = (-1, -5)$ $\quad\overrightarrow{DC} = (1, 5)$



039 Calcula las coordenadas del punto A:

a) Si $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ y $B(5, 2)$.
b) Si $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ y $B(1, 4)$.
c) Si $\overrightarrow{AB} = (-4, 1)$ y $B(-3, 3)$.

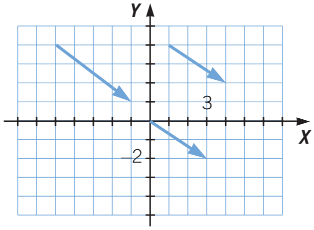
a) $A = (6, -1)$ $\quad$ b) $A = (-1, 1)$ $\quad$ c) $A = (1, 2)$

040 Calcula las coordenadas del punto B:

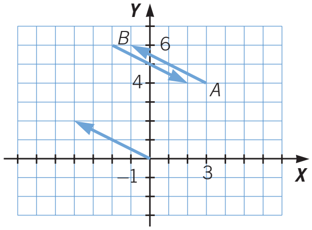
a) Si $\overrightarrow{AB} = (0, 2)$ y $A(-3, 5)$.
b) Si $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$ y $A(4, 6)$.
c) Si $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$ y $A(-2, 4)$.

a) $B = (-3, 7)$ $\quad$ b) $B = (5, 6)$ $\quad$ c) $B = (0, 8)$

041 Dibuja dos vectores que tengan el mismo sentido que $\overrightarrow{AB} = (3, -2)$.



042 Dibuja dos vectores que tengan la misma dirección que $\overrightarrow{AB}$, siendo $A(3, 4)$ y $B(-1, 6)$.

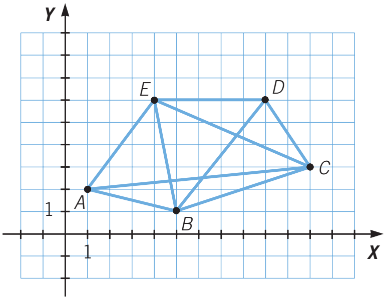


043 Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{BD}$ en el siguiente gráfico.

$\overrightarrow{AC} = (11, 3) - (1, 2) = (10, 1)$

$\overrightarrow{BE} = (4, 6) - (5, 1) = (-1, 5)$

$\overrightarrow{BD} = (9, 6) - (5, 1) = (4, 5)$



044 Si los puntos $A(1, 1)$, $B(1, 3)$ y $C(7, 3)$ son vértices del paralelogramo $ABCD$, calcula.

a) Las coordenadas de D.

b) El vector $\overrightarrow{BD}$.

a) Por ser paralelogramo, tenemos que:

$AB = CD$, por lo que: $\overrightarrow{AB} = (0, 2) \rightarrow \overrightarrow{CD} = (0, 2) \rightarrow D = (7, 5)$.

b) $\overrightarrow{BD} = (6, 2)$

045 Encuentra dos vectores que cumplan que:

a) Tienen la misma dirección y sentido, siendo uno de ellos con origen en (0, 0) y otro en (2, 4).

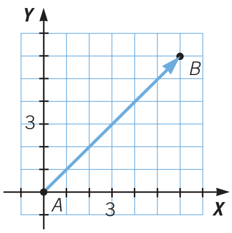
b) Tienen la misma dirección y sentido contrario.

a) $\overrightarrow{AB}$ con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $\overrightarrow{CD}$ con $C = (2, 4)$, $D = (4, 6)$.

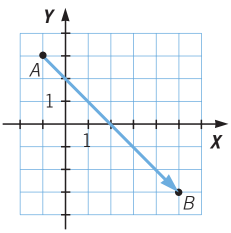
b) $\overrightarrow{AB}$ con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $\overrightarrow{CD}$ con $C = (2, 4)$, $D = (0, 2)$.

046 Calcula el módulo de los vectores.

a)



b)



a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$

047 Obtén el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

a) $A(1, 1)$ y $B(2, 3)$

b) $A(-4, 1)$ y $B(5, -2)$

c) $A(3, -2)$ y $B(1, -1)$

d) $A(-3, 0)$ y $B(0, 4)$

a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}$

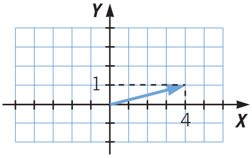
c) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

d) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

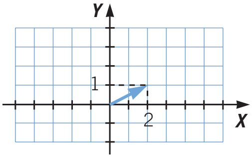
048 Dibuja un vector cuyo módulo sea:

a) $\sqrt{17}$ **b)** $\sqrt{29}$ **c)** $\sqrt{5}$ **d)** $\sqrt{13}$

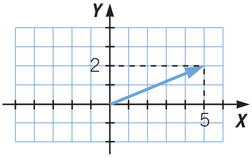
a)



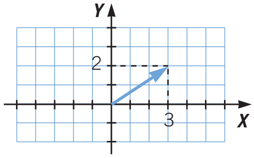
c)



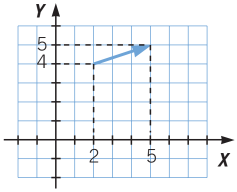
b)



d)

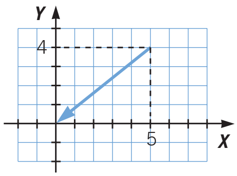


049 Dibuja un vector con origen en (2, 4) y módulo $\sqrt{10}$. ¿Existe más de uno? Razona la respuesta.



Existen infinitos vectores, tantos como direcciones y sentidos se pueden tomar.

050 Dibuja un vector con extremo en (0, 0) y módulo $\sqrt{41}$. ¿Existe más de uno? Razona la respuesta.



Existen infinitos vectores, tantos como direcciones y sentidos se pueden tomar.

051 Escribe dos vectores equivalentes y otros dos paralelos al vector $\overrightarrow{AB}$, siendo $A(-4, 3)$ y $B(1, -2)$.

$\overrightarrow{AB} = (5, -5)$

Equivalentes:

$C = (2, 8)$, $D = (7, 3)$

$E = (1, 5)$, $F = (6, 0)$

Los vectores son $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$.

Paralelos:

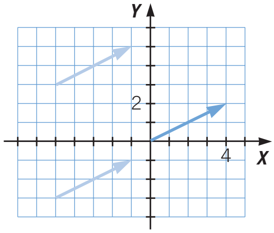
$G = (0, -3)$, $H = (-5, 2)$

$I = (3, -11)$, $J = (13, 1)$

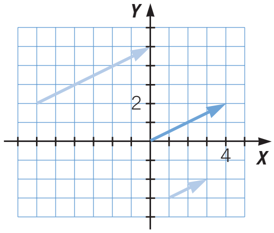
Los vectores son $\overrightarrow{GH}$ e $\overrightarrow{IJ}$.

052 Dibuja dos vectores equivalentes a $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$ y otros dos paralelos, situados en diferentes cuadrantes.

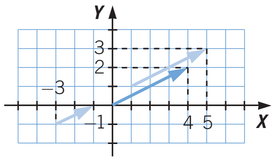
Equivalentes:



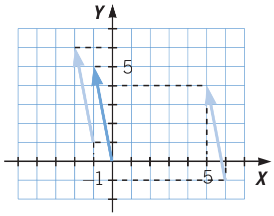
Paralelos:



053 Dibuja un vector equivalente a $\vec{AB} = (4, 2)$ y otro paralelo con origen en (1, 1) y en (−3, −1), respectivamente.



054 Dibuja un vector equivalente a $\vec{AB} = (-1, 5)$ y otro paralelo con extremo en (−2, 6) y en (5, 4), respectivamente.



055 Halla la suma de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$.

a) $A(0, 2)$, $B(2, 5)$, $C(2, -1)$ y $D(5, -2)$

b) $A(3, 5)$, $B(-1, 6)$, $C(6, 4)$ y $D(5, 0)$

a) $\vec{AB} = (2, 3)$, $\vec{CD} = (3, -1) \rightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = (5, 2)$

b) $\vec{AB} = (-4, 1)$, $\vec{CD} = (-1, -4) \rightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = (-5, -3)$

056 Obtén la diferencia de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$.

a) $A(-3, 2)$, $B(0, 5)$, $C(3, 1)$ y $D(4, -2)$

b) $A(0, 5)$, $B(-1, 3)$, $C(-2, 4)$ y $D(5, 1)$

a) $\vec{AB} = (3, 3)$, $\vec{CD} = (1, -3) \rightarrow \vec{AB} - \vec{CD} = (2, 6)$

b) $\vec{AB} = (-1, -2)$, $\vec{CD} = (7, -3) \rightarrow \vec{AB} - \vec{CD} = (-8, 1)$

057 Dados los vectores $\vec{u} = (-6, 1)$ y $\vec{v} = (2, 3)$, calcula.

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$

a) $\vec{u} + \vec{v} = (-4, 4)$ b) $\vec{u} - \vec{v} = (-8, -2)$

058 Determina el módulo del vector que resulta de sumar los vectores $\vec{u} = (3, 7)$ y $\vec{v} = (-6, 2)$.

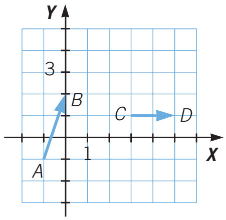
$$\vec{u} + \vec{v} = (-3, 9) \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90}$$

059 Calcula el módulo del vector que resulta de restar los vectores $\vec{u} = (4, -2)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$.

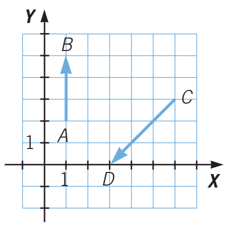
$$\vec{u} - \vec{v} = (7, -3) \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$$

060 Obtén gráficamente la suma y la diferencia de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

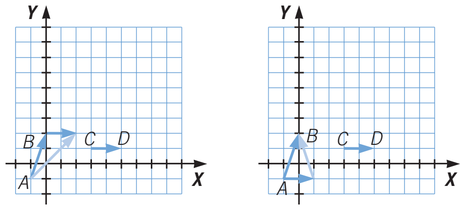
a)



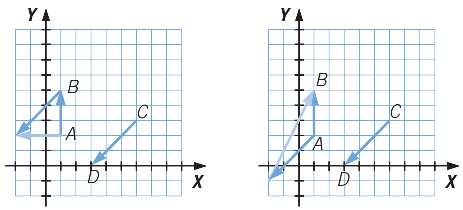
b)



a)



b)



061 **Halla $\vec{v}$, si $\vec{u} = (5, 4)$ y $\vec{u} + \vec{v} = (2, 6)$.**

$\vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = (2, 6) - (5, 4) = (-3, 2)$

062 **Calcula $\vec{v}$, sabiendo que $\vec{u} = (-1, 6)$ y que $\vec{u} - \vec{v} = (3, -2)$.**

$\vec{v} = \vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) = (-1, 6) - (3, -2) = (-4, 8)$

063 **Halla las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (3, 5)$.**

$2 \cdot \vec{u} = (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) = (1, 1) + (3, 5) = (4, 6) \rightarrow \vec{u} = (2, 3)$

$2 \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v}) = (1, 1) - (3, 5) = (-2, -4) \rightarrow \vec{v} = (-1, -2)$

064 Representa el vector $k\vec{u}$, con origen en (0, 0), en estos casos.

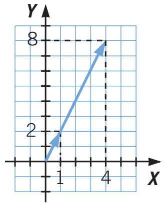
a) $k = 4$ y $\vec{u} = (1, 2)$

b) $k = -2$ y $\vec{u} = (-2, 3)$

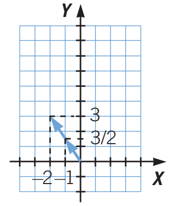
c) $k = \dfrac{1}{2}$ y $\vec{u} = (-2, 3)$

d) $k = \dfrac{3}{5}$ y $\vec{u} = (10, 20)$

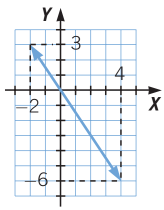
a) $4 \cdot \vec{u} = (4, 8)$



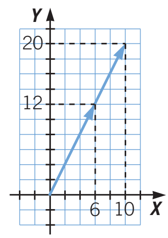
c) $\dfrac{1}{2} \cdot \vec{u} = \left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$



b) $-2 \cdot \vec{u} = (4, -6)$



d) $\dfrac{3}{5} \cdot \vec{u} = (6, 12)$



065 Sabiendo que $A(8, -3)$, $B(5, -1)$ y $C(4, 3)$, calcula los siguientes vectores.

a) $3 \cdot \overrightarrow{AB}$

b) $-5 \cdot \overrightarrow{BC}$

c) $-2 \cdot \overrightarrow{CA}$

d) $4 \cdot \overrightarrow{AC}$

e) $\overrightarrow{BA} + 3 \cdot \overrightarrow{BC}$

f) $\overrightarrow{AC} - 4 \cdot \overrightarrow{AB}$

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 2) \rightarrow 3 \cdot \overrightarrow{AB} = (-9, 6)$

b) $\overrightarrow{BC} = (-1, 4) \rightarrow -5 \cdot \overrightarrow{BC} = (5, -20)$

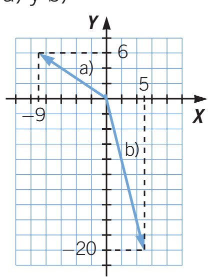
c) $\overrightarrow{CA} = (4, -6) \rightarrow -2 \cdot \overrightarrow{CA} = (-8, 12)$

d) $\overrightarrow{AC} = (-4, 6) \rightarrow 4 \cdot \overrightarrow{AC} = (-16, 24)$

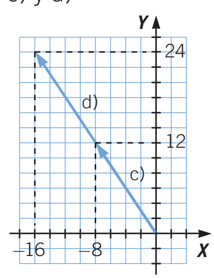
e) $\overrightarrow{BA} = (3, -2), \overrightarrow{BC} = (-1, 4) \rightarrow \overrightarrow{BA} + 3 \cdot \overrightarrow{BC} = (3, -2) + (-3, 12) = (0, 10)$

f) $\overrightarrow{AC} = (-4, 6), \overrightarrow{AB} = (-3, 2) \rightarrow \overrightarrow{AC} - 4 \cdot \overrightarrow{AB} = (4, 6) - (-12, 8) = (16, -2)$

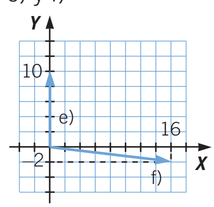
a) y b)



c) y d)



e) y f)



066 Halla el punto trasladado del punto $A(4, 5)$ por estos vectores.

a) $\vec{v} = (-2, 5)$
b) $\vec{v} = (0, 4)$
c) $\vec{v} = (1, -3)$
d) $\vec{v} = (-4, 0)$

a) $A' = A + \vec{v} = (2, 10)$
b) $A' = A + \vec{v} = (4, 9)$
c) $A' = A + \vec{v} = (5, 2)$
d) $A' = A + \vec{v} = (0, 5)$

067 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS?

Calcula la distancia entre dos puntos $A(-1, 3)$ y $B(2, -1)$.

La **distancia entre dos puntos** coincide con el módulo del vector que tiene como extremos esos puntos.

PRIMERO. Se calculan las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-1), -1 - 3) = (3, -4)$$

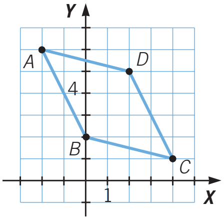
SEGUNDO. Se halla su módulo.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

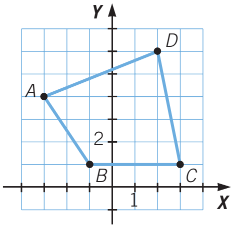
La distancia entre A y B es de 5 unidades.

068 Dadas las siguientes figuras, halla su perímetro.

a)



b)



a)
$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = |(2, -4)| = \sqrt{20} \\ |\overrightarrow{BC}| = |(4, -1)| = \sqrt{17} \\ |\overrightarrow{CD}| = |(-2, 4)| = \sqrt{20} \\ |\overrightarrow{DA}| = |(-4, 1)| = \sqrt{17} \end{array}\right\} \rightarrow P = 2 \cdot \left(\sqrt{20} + \sqrt{17}\right)$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = |(2, -3)| = \sqrt{13} \\ |\overrightarrow{BC}| = |(4, 0)| = 4 \\ |\overrightarrow{CD}| = |(-1, 5)| = \sqrt{26} \\ |\overrightarrow{DA}| = |(-5, -2)| = \sqrt{29} \end{array}\right\} \rightarrow P = 4 + \sqrt{13} + \sqrt{26} + \sqrt{29}$$

069 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO?

Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos *A*(−2, 3) y *B*(2, −1).

El **punto medio de un segmento** se calcula sumando al punto A la mitad del vector $\overrightarrow{AB}$.

PRIMERO. Se calculan las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-2), -1 - 3) = (4, -4)$$

SEGUNDO. Se hallan la coordenadas del punto medio, sumando a A la mitad de $\overrightarrow{AB}$.

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow (x, y) = (-2, 3) + \frac{1}{2} \cdot (4, -4) = (0, 1)$$

Las coordenadas del punto medio son (0, 1).

070 ●●

Calcula el punto medio del segmento *AB*, cuyos extremos son *A*(1, 4) y *B*(4, 3). Si al punto medio le llamamos *M*, calcula el punto medio de los segmentos *AM* y *MB*.

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1, 4) + \frac{1}{2} \cdot (3, -1) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$M_1 = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = (1, 4) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{15}{4}\right)$$

$$M_1 = M + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{13}{4}\right)$$

071 ●●●

Averigua las coordenadas del punto *A*, sabiendo que el punto medio del segmento *AB* es *M*(5, 2) y el punto *B*(7, −3).

$$A = M + \overrightarrow{BM} = (5, 2) + (-2, 5) = (3, 7)$$

072 ●●●

Halla las coordenadas del punto *B*, si *A*(−2, −1) y el punto medio es $\boldsymbol{M\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)}$**.**

$$B = M + \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{9}{4}, \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 6\right)$$

073 ●

Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(5, 3) y *B*(4, 7) en forma vectorial, paramétrica y continua.

Vector director: (−1, 4)

Ecuación vectorial: $(x, y) = (5, 3) + t \cdot (-1, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 5 - t \\ y = 3 + 4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x - 5}{-1} = \dfrac{y - 3}{4}$

074 Obtén la ecuación de la recta, en forma implícita, que pasa por el punto $A(4, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (3, 1)$.

$A = -1$ y $B = 3$, la ecuación general es: $-x + 3y + C = 0$.

Como el punto $A(4, 1)$ pertenece a la recta, resulta:

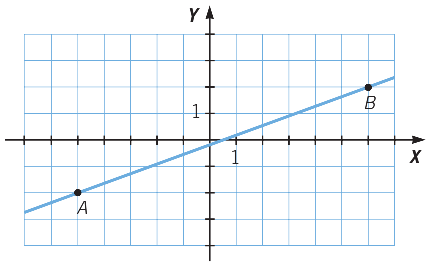
$$-4 + 3 \cdot 1 + C = 0 \rightarrow C = 1$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-x + 3y + 1 = 0$.

075 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0, 2)$ y tiene como vector director $(-2, 3)$, en forma explícita.

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{3}{2}x + 2$

076 A partir de la representación de la siguiente recta, calcula sus ecuaciones de todas las formas posibles.



La recta pasa por los puntos $A(-5, -2)$ y $B(6, 2)$.

El vector director es $\overrightarrow{AB} = (11, 4)$.

Ecuación vectorial:
$(x, y) = (-5, -2) + t \cdot (11, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -5 + 11t \\ y = -2 + 4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x + 5}{11} = \dfrac{y + 2}{4}$

Ecuación general o implícita: $4x - 11y - 2 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{4}{11}x - \dfrac{2}{11}$

Ecuación punto-pendiente: $y + 2 = \dfrac{4}{11}(x + 5)$

077 Escribe la ecuación de estas rectas de todas las formas posibles.

a) $\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\}$

b) $(x, y) = (0, 3) + t \cdot (2, 1)$

c) $y = 3x - 1$

d) $y - 3 = 3 \cdot (x - 5)$

e) $2x + y - 5 = 0$

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (2, 3) + t \cdot (-1, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x - 2}{-1} = \dfrac{y - 3}{2}$

Ecuación general o implícita: $2x + y - 7 = 0$

Ecuación explícita: $y = -2x + 7$

Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = -2(x - 2)$

b) Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 3) + t \cdot (2, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3 + t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{1}$

Ecuación general o implícita: $x - 2y + 6 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{1}{2}x + 3$

Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = \dfrac{1}{2}x$

c) Ecuación explícita: $y = 3x - 1$

Ecuación general o implícita: $3x - y - 1 = 0$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{3}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -1 + 3t \end{array}\right\}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, -1) + t \cdot (1, 3)$

Ecuación punto-pendiente: $y + 1 = 3x$

d) Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = 3 \cdot (x - 5)$

Ecuación explícita: $y = 3x - 12$

Ecuación general o implícita: $3x - y - 12 = 0$

Ecuación continua: $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-3}{3}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 5 + t \\ y = 3 + 3t \end{array}\right\}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (5, 3) + t \cdot (1, 3)$

e) Ecuación general o implícita: $2x + y - 5 = 0$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-5}{-2}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 5 - 2t \end{array}\right\}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 5) + t \cdot (1, -2)$

Ecuación explícita: $y = -2x + 5$

Ecuación punto-pendiente: $y - 5 = -2x$

078 **Obtén cuatro puntos que pertenezcan a la recta de ecuación: $(x, y) = (1, 3) + t \cdot (2, 2)$.**

$t = 1 \longrightarrow (x, y) = (1, 3) + 1 \cdot (2, 2) = (3, 5)$

$t = 2 \longrightarrow (x, y) = (1, 3) + 2 \cdot (2, 2) = (5, 7)$

$t = -2 \rightarrow (x, y) = (1, 3) - 2 \cdot (2, 2) = (-3, -1)$

$t = -3 \rightarrow (x, y) = (1, 3) - 3 \cdot (2, 2) = (-5, -3)$

079 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL PUNTO DE CORTE DE DOS RECTAS SECANTES?

Calcula el punto de corte de estas rectas.

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3} \qquad \left.\begin{array}{l} x=2-3t \\ y=1+t \end{array}\right\}$$

PRIMERO. Se resuelve el sistema que plantean las dos ecuaciones de las rectas.

La segunda ecuación viene dada en forma paramétrica y, como están despejadas las variables x e y, se sustituyen esos valores en la primera ecuación.

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3} \rightarrow \frac{2-3t-3}{2}=\frac{1+t}{3}$$

Se resuelve la ecuación que resulta.

$$3\cdot(2-3t-3)=2\cdot(1+t)$$
$$6-9t-9=2+2t$$
$$11t=-5 \rightarrow t=\frac{-5}{11}$$

SEGUNDO. Se sustituye el valor de t en las ecuaciones paramétricas, donde x e y están despejadas.

$$x=2-3\cdot\frac{-5}{11}=\frac{37}{11}$$
$$y=1-\frac{5}{11}=\frac{6}{11}$$

TERCERO. Las coordenadas del punto de corte son la solución del sistema.

Luego el punto de corte es $P\left(\frac{37}{11},\frac{6}{11}\right)$.

080 **Halla el punto de corte de estas rectas.**

$$r\text{:}\ \frac{x}{1}=\frac{y-2}{2} \qquad s\text{:}\ \left.\begin{array}{l} x=4-t \\ y=t \end{array}\right\}$$

Para hallar el punto de corte hay que resolver el sistema.

$$\frac{4-t}{1}=\frac{t-2}{2} \rightarrow 8-2t=t-2 \rightarrow t=\frac{10}{3}$$

$$x=4-\frac{10}{3}=\frac{2}{3} \qquad y=\frac{10}{3}$$

El punto de corte es $P\left(\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$.

081 ●●● **Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo, cuyos lados están contenidos en las rectas que vienen expresadas mediante estas ecuaciones.**

$$r\colon x - y - 1 = 0 \qquad s\colon x + y + 2 = 0 \qquad p\colon 3x - y + 2 = 0$$

Los vértices del triángulo son los puntos de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} r\colon x - y - 1 = 0 \\ s\colon x + y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to x = -\frac{1}{2} \qquad y = -\frac{3}{2}$$

Un vértice es el punto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} r\colon \quad x - y - 1 = 0 \\ p\colon 3x - y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = 3x + 2 \end{array}\right\} \to x = -\frac{3}{2} \qquad y = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

Otro vértice es el punto de coordenadas $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} s\colon \quad x + y + 2 = 0 \\ p\colon 3x - y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y = -x - 2 \\ y = 3x + 2 \end{array}\right\} \to x = -1 \qquad y = 1 - 2 = -1$$

Otro vértice es el punto de coordenadas $(-1, -1)$.

082 ●● **Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero, cuyos lados están contenidos en las rectas que tienen por ecuación:**

$$r\colon 3x - 4y - 8 = 0 \qquad p\colon 2x + y + 2 = 0$$
$$s\colon x - 2y + 12 = 0 \qquad q\colon 2x + y + 5 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} r\colon 3x - 4y - 8 = 0 \\ p\colon 2x + y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to x = 0 \qquad y = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} r\colon 3x - 4y - 8 = 0 \\ q\colon 2x + y + 5 = 0 \end{array}\right\} \to x = -\frac{12}{11} \qquad y = -\frac{31}{11}$$

$$\left.\begin{array}{l} s\colon x - 2y + 12 = 0 \\ p\colon 2x + y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to x = -\frac{16}{5} \qquad y = \frac{22}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} s\colon x - 2y + 12 = 0 \\ q\colon 2x + y + 5 = 0 \end{array}\right\} \to x = -\frac{22}{5} \qquad y = \frac{24}{5}$$

083 ●● **¿Cuáles son las ecuaciones que corresponden a las rectas que forman los ejes de coordenadas? Razona si puedes escribirlas de todas las formas.**

- Eje de abscisas

  Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t \cdot (1, 0)$

  Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array}\right\}$ Ecuación general: $y = 0$

- Eje de ordenadas

  Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t \cdot (0, 1)$

  Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \end{array}\right\}$ Ecuación general: $x = 0$

Ninguna de estas rectas se puede escribir en forma continua, porque ambas tienen algún componente de su vector director igual a cero.

084 **Dos rectas tienen por ecuaciones:**

$$\boldsymbol{r\text{: } y = 3x - 1}$$
$$\boldsymbol{s\text{: } (x, y) = (1, 3) + t \cdot (-3, 2)}$$

a) Escribe las rectas en forma paramétrica.
b) ¿Cuáles son sus vectores directores?
c) Calcula cuatro puntos distintos de cada una de las rectas.
d) Halla, si lo tienen, un punto común de ambas rectas.

a) $r\text{: } \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 3t - 1 \end{array}\right\}$ $\quad s\text{: } \left.\begin{array}{l} x = 1 - 3t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\}$

b) El vector director de r es $\vec{u} = (1, 3)$ y el vector director de s es $\vec{v} = (-3, 2)$.

c) Puntos de la recta r:

$t = 1 \rightarrow (1, 2)$; $t = 0 \rightarrow (0, -1)$; $t = 2 \rightarrow (2, 5)$; $t = -1 \rightarrow (-1, -4)$

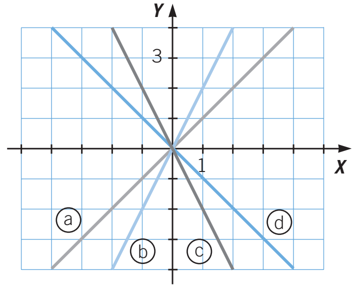
Puntos de la recta s:

$t = 1 \rightarrow (-2, 5)$; $t = -2 \rightarrow (7, -1)$; $t = 0 \rightarrow (1, 3)$; $t = -1 \rightarrow (4, 1)$

d) $\left.\begin{array}{l} r\text{: } y = 3x - 1 \\ x\text{: } y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{11}{3} \end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{14}{11} \qquad y = \dfrac{-31}{11}$

085 **Las rectas que no tienen término independiente en su forma general, verifican la propiedad de que pasan todas por el origen de coordenadas.**

Halla las ecuaciones explícita e implícita de estas rectas, y comprueba que se verifica la propiedad.



a) $y = x \rightarrow x - y = 0$

b) $y = 2x \rightarrow 2x - y = 0$

c) $y = -2x \rightarrow -2x - y = 0 \rightarrow 2x + y = 0$

d) $y = -x \rightarrow -x - y = 0 \rightarrow x + y = 0$

No hay término independiente y el punto (0, 0) pertenece a todas las rectas.

086 Estudia la posición de estas rectas en el plano.

$$r: 2x + 3y - 1 = 0 \qquad s: 3x - 4y + 4 = 0$$

El vector director de r es $(3, -2)$ y su pendiente es $m = -\frac{2}{3}$.

El vector director de s es $(-4, -3)$ y su pendiente es $m' = \frac{3}{4}$.

Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

087 Estudia la posición relativa en el plano de las siguientes parejas de rectas.

a) $r: 3x + y - 7 = 0$ $\qquad s: 3x + y + 5 = 0$

b) $r: x + y - 3 = 0$ $\qquad s: 2x + 2y - 6 = 0$

c) $r: x + 3y - 4 = 0$ $\qquad s: x + 2y + 5 = 0$

d) $r: -5x + 10y - 8 = 0$ $\qquad s: 10x - 20y + 16 = 0$

e) $r: -x + 2y - 1 = 0$ $\qquad s: 2 - x + 3y - 8 = 0$

f) $r: \frac{1}{2}x + y - 3 = 0$ $\qquad s: x - \frac{1}{5}y + 8 = 0$

a) El vector director de r y de s es $(1, -3)$. Los vectores directores son iguales, pero el punto $(0, 7)$ de r no pertenece a s: $3 \cdot 0 + 7 + 5 \neq 0$. Las rectas son paralelas.

b) El vector director de r es $(1, -1)$ y el de s es $(2, -2)$. Los vectores directores son proporcionales y también los coeficientes: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6}$. Las rectas son coincidentes.

c) El vector director de r es $(3, -1)$ y su pendiente es $m = -\frac{1}{3}$.

El vector director de s es $(2, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{2}$.

Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

d) El vector director de r es $(10, 5)$ y el de s es $(-20, -10)$. Los vectores directores son proporcionales y también los coeficientes: $\frac{-5}{10} = \frac{10}{-20} = \frac{-8}{16}$. Las rectas son coincidentes.

e) El vector director de r es $(2, 1)$ y su pendiente es $m = \frac{1}{2}$.

El vector director de s es $(3, 1)$ y su pendiente es $m' = \frac{1}{3}$.

Las pendientes son distintas, y las rectas son secantes.

f) El vector director de r es $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ y su pendiente es $m = -\frac{1}{2}$.

El vector director de s es $\left(-\frac{1}{5}, -1\right)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{-\frac{1}{5}} = 5$.

Las pendientes son distintas, por lo que las rectas son secantes.

088 **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas en el plano.**

a) $r: (x, y) = (1, 3) + t \cdot (1, 2)$ $\quad s: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-5}{2}$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = t \end{array}\right\}$ $\quad s: (x, y) = (2, 0) + t \cdot (2, -1)$

c) $r: \left.\begin{array}{l} x = 3 + 5t \\ y = 2 - 2t \end{array}\right\}$ $\quad s: \dfrac{x-8}{10} = \dfrac{y}{-4}$

d) $r: 2x - 3y = 0$ $\quad s: (x, y) = t \cdot (1, -1)$

e) $r: \left.\begin{array}{l} x = -2t \\ y = -3 + 2t \end{array}\right\}$ $\quad s: x + 3y - 2 = 0$

a) El vector director de r y s es $(1, 2)$. El punto $(1, 3)$ de r pertenece a s: $\dfrac{1-2}{1} = \dfrac{3-5}{2}$. Las rectas son coincidentes.

b) El vector director de r es $(-1, 1)$ y su pendiente es $m = -1$.

El vector director de s es $(2, -1)$ y su pendiente es $m' = \dfrac{-1}{2}$.

Las pendientes son distintas, por lo que las rectas son secantes.

c) El vector director de r es $(5, -2)$ y el de s es $(10, -4)$. Los vectores directores son proporcionales. El punto $(3, 2)$ de r pertenece también a s: $\dfrac{3-8}{10} = \dfrac{2}{-4}$. Las rectas son coincidentes.

d) El vector director de r es $(-3, -2)$ y su pendiente es $m = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

El vector director de s es $(1, -1)$ y su pendiente es $m' = \dfrac{-1}{1} = -1$.

Las pendientes son distintas, y las rectas son secantes.

e) El vector director de r es $(-2, 2)$ y su pendiente es $m = \dfrac{2}{-2} = -1$.

El vector director de s es $(3, -1)$ y su pendiente es $m' = \dfrac{-1}{3}$.

Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

089 **Calcula las coordenadas del vértice *A* de un triángulo isósceles, cuyo lado desigual coincide con el segmento de extremos *B*(3, 1) y *C*(9, 3), y sabiendo que la altura sobre *BC* es de 4 cm.**

El vértice $A = (x, y)$ está a la misma distancia de B y de C.

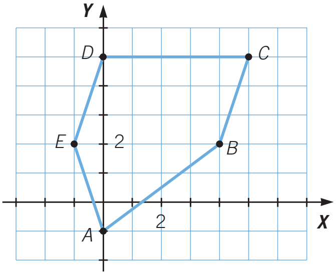
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (x-9)^2 + (y-3)^2 \rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 =$$
$$= x^2 + 18x + 81 + y^2 - 6y + 9 \rightarrow 12x + 4y - 40 = 0 \rightarrow y = 10 - 3x$$

Por ser un triángulo isósceles, la base mide: $\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{20}$, y por el teorema de Pitágoras, la distancia de A a B y C es: $\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{4^2 + 5} = \sqrt{16}$.

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 21 \xrightarrow{y=10-3x} 10x^2 - 120x + 349 = 0$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7{,}05 \rightarrow y = -1{,}15 \\ x = 4{,}95 \rightarrow y = 5{,}15 \end{array}\right. \rightarrow A = (7{,}05; -1{,}15) \quad A = (4{,}95; 5{,}15)$$

090 Halla la suma de los vectores que forman los lados *AB*, *BC*, *CD*, *DE* y *EA* del siguiente polígono.



¿Ocurre lo mismo en todos los polígonos?

La suma de los vectores es (0, 0). Esto ocurre en todos los polígonos cerrados.

091 Si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección y $a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{v}$, siendo *a* y *b* números reales, ¿qué puedes afirmar sobre los números *a* y *b*?

$\vec{u} = (u_1, u_2) \qquad \vec{v} = (v_1, v_2)$

Por tener los vectores distinta dirección: $\dfrac{v_1}{u_1} \neq \dfrac{v_2}{u_2}$

$a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{v} \to (a \cdot u_1, a \cdot u_2) = (b \cdot v_1, b \cdot v_2) \to (a \cdot u_1 - b \cdot v_1, a \cdot u_2 - b \cdot v_2) = (0, 0)$

$$\to \begin{cases} a \cdot u_1 - b \cdot v_1 = 0 \\ a \cdot u_2 - b \cdot v_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = \dfrac{b \cdot v_1}{u_1} \\ a = \dfrac{b \cdot v_2}{u_2} \end{cases} \to b \cdot \frac{v_1}{u_1} = b \cdot \frac{v_2}{u_2} \xrightarrow{\frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}} b = 0 \to a = 0$$

Los números reales *a* y *b* son 0.

092 Utilizando vectores, demuestra que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

El punto de corte es el corte de las rectas $A + a \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ y $B + b \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = A + \vec{u} + b \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{v} = \overrightarrow{AD}$

$$A + a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A + \vec{u} + b \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \to a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} =$$
$$= (b + 1) \cdot \vec{u} - b \cdot \vec{v} \to (a + b) \cdot \vec{v} = (b + 1 - a) \cdot \vec{u}$$

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son vectores paralelos:

$a + b = 0 \to a = -b$

$b + 1 - a = 0 \xrightarrow{a = -b} 2b + 1 = 0 \to b = -\dfrac{1}{2} \to a = \dfrac{1}{2}$

El punto de corte es: $A + \dfrac{1}{2} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A + \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$, que es el punto medio.

093 **Calcula la ecuación de la recta vertical que divide al triángulo, de vértices *A*(0, 0), *B*(2, 2) y *C*(10, 2), en dos regiones con igual área.**

Tomando como base el lado horizontal y como altura la distancia al eje *X*:

$$\text{Área} = \frac{(10-2)\cdot 2}{2} = 8$$

La ecuación de los lados que no forman la base es: $\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = \dfrac{x}{5} \end{array}\right\}$

La base del nuevo triángulo es: $10 - a$.

La altura del nuevo triángulo es $2 - \dfrac{a}{5}$.

Por tanto, el área será: $4 = \dfrac{(10-a)\cdot\left(2-\dfrac{a}{5}\right)}{2} \rightarrow a = \begin{cases} 10+2\sqrt{10} \\ 10-2\sqrt{10} \end{cases}$.

La recta vertical es: $x = 10 - 2\sqrt{10}$.

EN LA VIDA COTIDIANA

094 **Algunas especies de ballenas se encuentran en peligro de extinción.**

Pedro es biólogo marino y forma parte de una de las plataformas en defensa de estos mamíferos. En su equipo de trabajo han decidido colocar localizadores en algunas de las crías para seguir sus desplazamientos y asegurarse de que no sufren ningún daño.

Se le ha implantado uno de los localizadores a una hembra joven y se ha anotado su recorrido desde ese momento.

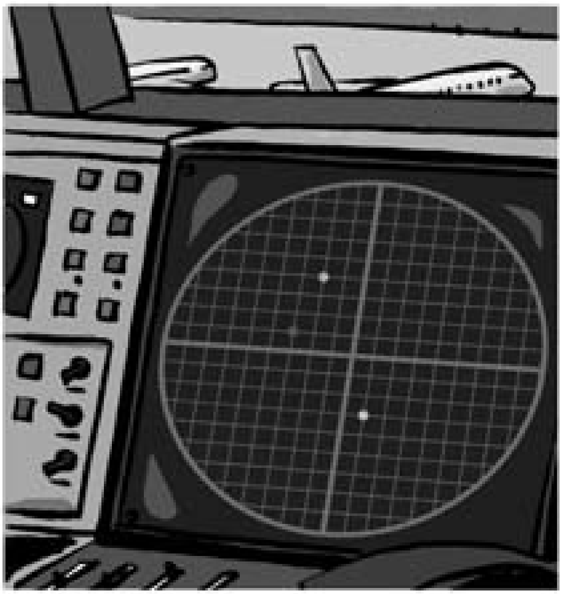
a) ¿Qué dirección debe tomar el barco del equipo de Pedro desde el punto inicial para volver a encontrar a la ballena?

b) ¿Cuántas millas deberá recorrer?

a) El barco debe tomar dirección Noroeste.

b) $2.500 + \sqrt{(5.000)^2 + (4.500)^2} = 6.726{,}81$ millas

095 ●●● **En el radar de la torre de control de un aeropuerto se ve, en un instante $t = 0$, la posición de tres aviones.**



Transcurrida una unidad de tiempo, es decir, cuando $t = 1$, los aviones aparecen en el radar en las siguientes posiciones.

La torre de control informa a dos de los aviones de que tienen que cambiar su trayectoria o su velocidad para evitar una colisión.

a) ¿Cuáles son los aviones que van a chocar?

b) Si estuvieras en la torre de control, ¿qué órdenes darías a cada uno de los aviones para evitar un accidente?

a) Los aviones parten de los puntos A, B y C, para llegar a A', B' y C'.

Avión 1: $A = (-2, 4)$; $A'(0, 3) \rightarrow \vec{u}_1 = (2, -1)$
La trayectoria que sigue es $A + t \cdot \vec{u}_1$.

Avión 2: $B = (-3, 1)$; $B'(1, 1) \rightarrow \vec{u}_2 = (4, 0)$
La trayectoria que sigue es $B + t \cdot \vec{u}_2$.

Avión 3: $C = (1, -3)$; $C'(4, 2) \rightarrow \vec{u}_3 = (3, 1)$
La trayectoria que sigue es $C + t \cdot \vec{u}_3$.

Para que los aviones chocaran tendrían que llegar al mismo punto en el mismo momento.

Aviones 2 y 3:

$$B + t \cdot \vec{u}_2 = C + t \cdot \vec{u}_3 \rightarrow (-3, 1) + t \cdot (4, 0) = (1, -3) + t \cdot (3, 1)$$
$$\rightarrow (-2, 2) = t \cdot (-1, 1) \rightarrow t = 2$$

Los aviones 2 y 3 se chocarían para $t = 2$.

b) Para que los aviones no se choquen es suficiente con indicarle a uno de ellos que cambie la trayectoria o modifique su velocidad.