7 Geometría analítica

ANALIZA Y CALCULA

¿Qué ángulo formarán las direcciones de las bolas si ambas siguen en la misma línea recta?

Las direcciones de las bolas, si ambas siguen en la misma línea recta, formarán un ángulo de 0º.

¿Qué crees que quiere decir ecuación vectorial? ¿Y ecuación escalar?

Una ecuación vectorial es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en la que intervienen vectores y una ecuación escalar es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

¿Qué es un choque elástico?

Un choque elástico es una colisión entre dos o más objetos en la que estos no sufren deformaciones.

REFLEXIONA Y SACA CONCLUSIONES

Una bola de billar al golpear una banda lateral sigue las leyes de reflexión, es decir, el ángulo que forma la trayectoria de la bola con la banda antes de golpear y el ángulo después del choque miden lo mismo. ¿En qué otros fenómenos se producen las leyes de reflexión?

Respuesta modelo: la reflexión de la luz, el sonido o las ondas en el agua.

En el billar francés, a tres bandas, una bola ha de golpear a las otras dos y tocar en tres de las bandas de la mesa. En las bandas largas hay dibujados 7 rombos o diamantes y en las cortas hay 3. Investiga cómo utilizan los jugadores profesionales los rombos para conseguir carambolas.

Respuesta libre.

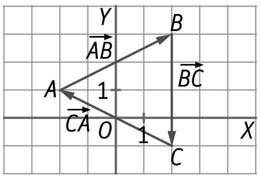
Actividades propuestas

1. Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{AB} = (4, 2)$

$\overrightarrow{BC} = (0, -4)$

$\overrightarrow{CA} = (-4, 2)$



2. Actividad resuelta.

3. Las coordenadas de un punto *P* son (1, 3), y las del vector $\overrightarrow{PQ}$, (–2, –2). Calcula las coordenadas de *Q* y de $\overrightarrow{QP}$.

$Q = (1, 3) + (-2, -2) = (-1, 1)$ y $\overrightarrow{QP} = (1 + 1, 3 - 1) = (2, 2)$

4. Calcula el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ en cada caso.

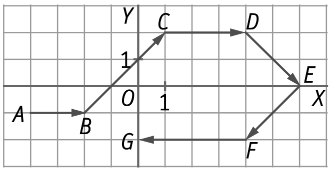
a) Origen *A*(–1, 0) y extremo *B*(3, 5)

b) Origen *A*(7, –4) y extremo *B*(–2, 3)

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(3+1)^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2-7)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{130}$

5. Identifica los vectores equipolentes de la imagen y los vectores libres que determinan.



No hay vectores equipolentes porque todos los vectores tienen distinto módulo, dirección o sentido.

6. Calcula la distancia entre los puntos:

a) ***A*(5, –3) y *B*(1, –1)** **b)** ***C*(–2, 3) y *D*(–1, –4)**

a) $d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(1-5)^2 + (-1+3)^2} = 2\sqrt{5}$ **b)** $d(C, D) = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-1+2)^2 + (-4-3)^2} = 5\sqrt{2}$

7. Los vértices de un triángulo son *A*(3, 5), *B*(10, 0) y *C*(4, –1).

a) Calcula los vectores de forman cada lado.

b) Halla la longitud de cada lado.

a) $\overrightarrow{AB} = (10 - 3, 0 - 5) = (7, -5)$

$\overrightarrow{BC} = (4 - 10, -1 - 0) = (-6, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (4 - 3, -1 - 5) = (1, -6)$

b) $d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{7^2 + (-5)^2} = \sqrt{74}$

$d(B, C) = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$

$d(C, A) = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$

8. Si $\vec{u} = (-3, 2)$, $\vec{v} = (1, 2)$ y $\vec{w} = (0, 3)$, realiza las operaciones.

a) $\vec{u} + \vec{v}$ **c)** $\vec{v} + \vec{w}$

b) $5\vec{u} + \vec{w}$ **d)** $3\vec{w} + 2\vec{v}$

a) $\vec{u} + \vec{v} = (-3 + 1, 2 + 2) = (-2, 4)$ **c)** $\vec{v} + \vec{w} = (1 + 0, 2 + 3) = (1, 5)$

b) $5\vec{u} + \vec{w} = (-15, 10) + (0, 3) = (-15, 13)$ **d)** $3\vec{w} + 2\vec{v} = (0, 9) + (2, 4) = (2, 13)$

9. Dados los vectores $\vec{u} = (4, 2)$, $\vec{v} = (-6, 3)$ y $\vec{w} = (2, 0)$, indica si son linealmente dependientes.

a) $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **b)** $\vec{u}$ **y** $\vec{w}$ **c)** $\vec{v}$ **y** $\vec{w}$

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes porque no existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.

b) $\vec{u}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes porque no existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k \cdot \vec{w}$.

c) $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes porque no existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$.

10. Actividad resuelta.

11. Comprueba si los puntos *A*(–2, 3), *B*(–2, 1) y *C*(–5, 5) están alineados.

Para que *A*, *B* y *C* estén alineados debe verificarse que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean proporcionales. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (-2+2, 1-3) = (0, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (-5+2, 5-3) = (-3, 2)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{0}{-3} \neq \frac{-2}{2} \Rightarrow \text{ Los puntos } A, B \text{ y } C \text{ no están alineados.}$$

12. Actividad resuelta.

13. Dado el segmento de extremos *A*(2, –5) y *B*(10, –1), halla los puntos *P*, *Q* y *R* que dividen *AB* en cuatro partes iguales.

Si se considera el vector $\overrightarrow{AB}$ = (10 – 2, –1 + 5) = (8, 4), se observa que: $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{8}{4}, \frac{4}{4}\right) = (2, 1)$ y, por tanto:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ = (2, –5) + (2, 1) = (4, –4) $\Rightarrow$ *P*(4, –4)

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AP}$ = (2, –5) + 2(2, 1) = (6, –3) $\Rightarrow$ *Q*(6, –3)

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{AP}$ = (2, –5) + 3(2, 1) = (8, –2) $\Rightarrow$ *R*(8, –2)

14. Actividad resuelta.

15. Dados los vectores $\vec{u}$ = (–2, 2) y $\vec{v}$ = (–1, 3), calcula su producto escalar, sus módulos y el ángulo que forman.

$\vec{u}\cdot\vec{v}$ = –2 (–1) + 2 · 3 = 2 + 6 = 8 $\quad |\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad |\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{8}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}$ = 0,894 $\Rightarrow$ α = arccos 0,894 = 26º 37´ 11´´

16. Actividad resuelta.

17. Calcula el valor de *m* para que los vectores $\vec{u}$ = (*m*, 2*m* – 1) y $\vec{v}$ = (1 – *m*, *m*):

a) Sean perpendiculares. **b) Tengan un módulo de 1.**

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = m\cdot(1 - m) + (2m - 1)\cdot m = m - m^2 + 2m^2 - m = m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$.

b) $|\vec{u}| = \sqrt{m^2 + (2m-1)^2} = \sqrt{m^2 + 4m^2 + 1 - 4m} = \sqrt{5m^2 - 4m + 1} = 1 \Rightarrow 5m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0$ o $m = \dfrac{4}{5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(1-m)^2 + m^2} = \sqrt{1 + m^2 - 2m + m^2} = \sqrt{2m^2 - 2m + 1} = 1 \Rightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Rightarrow m = 0$ o $m = 1$

18. Comprueba si el triángulo de vértices *A*(8, 9), *B*(2, 1) y *C*(1, 8) es rectángulo e indica el vértice correspondiente al ángulo recto.

Se consideran los vectores $\overrightarrow{AC}$ = (1 – 8, 8 – 9) = (–7, –1) y $\overrightarrow{BC}$ = (1 – 2, 8 – 1) = (–1, 7).

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ = –7 · (–1) + (–1) · 7 = 7 – 7 = 0 $\Rightarrow$ Los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ son perpendiculares.

El triángulo es rectángulo y *C* es el vértice correspondiente al ángulo recto.

19. Calcula los ángulos del triángulo *A*(–1, 0), *B*(2, –1) y *C*(4, 2). ¿Suman 180º?

Sean los vectores $\overrightarrow{AB}$ = (3, –1), $\overrightarrow{BA}$ = (–3, 1), $\overrightarrow{BC}$ = (2, 3), $\overrightarrow{CB}$ = (–2, –3), $\overrightarrow{AC}$ = (5, 2), y $\overrightarrow{CA}$ = (–5, –2).

$\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{-3\cdot 2 + 1\cdot 3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 3^2}} = \dfrac{-3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}}$ = –0,263 11 $\Rightarrow$ α = arccos –0,263 11 = 105º 15´ 16´´

$\cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \dfrac{2\cdot 5 + 3\cdot 2}{\sqrt{2^2 + 3^2}\cdot\sqrt{5^2 + 2^2}} = \dfrac{16}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}}$ = 0,824 04 $\Rightarrow$ β = arccos 0,824 04 = 34º 30´ 31´´

$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{3\cdot 5 - 1\cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{5^2 + 2^2}} = \dfrac{13}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{29}}$ = 0,76 338 $\Rightarrow$ γ = arccos 0,763 38 = 40º 14´ 13´´

α + β + γ = 105º 15´ 16´´ + 34º 30´ 31´´ + 40º 14´ 13´´ = 180º

20. **Actividad resuelta.**

21. **Indica si $A(0, -1)$ y $B(6, -1)$ pertenecen o no a las rectas.**

a) $r: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 - t \end{cases}$ **b)** $s: 2x - 3y = 15$

a) A sí pertenece a la recta r porque $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 3 + 3t \\ -1 = -2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$

B no pertenece a la recta r porque $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 3 + 3t \\ -1 = -2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

b) A no pertenece a la recta s porque $2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) = 3 \neq 15$

B sí pertenece a la recta s porque $2 \cdot 6 - 3 \cdot (-1) = 12 + 3 = 15$

22. **Halla un punto, un vector director y un vector normal de cada una de las siguientes rectas.**

a) $4x - 3y - 1 = 0$ **b)** $y = x$ **c)** $(x, y) = (-3, 2) + t(-1, 4)$

Llamamos P a un punto de la recta, $\vec{v}$, a un vector director, y $\vec{n}$, a un vector normal.

a) $P(1, 1)$, $\vec{v} = (3, 4)$ y $\vec{n} = (4, -3)$

b) $P(0, 0)$, $\vec{v} = (1, 1)$ y $\vec{n} = (1, -1)$

c) $P(-3, 2)$, $\vec{v} = (-1, 4)$ y $\vec{n} = (4, 1)$

23. **Halla dos puntos de cada una de las siguientes rectas y el vector director.**

a) $(x, y) = (1, 1) + t(0, -3)$

b) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$

c) $y - 3 = -2(x + 5)$

d) $x = \dfrac{y + 4}{5}$

Llamamos P y Q a dos puntos de la recta, y $\vec{v}$, a un vector director.

a) Si $t = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1 \Rightarrow P(1, 1)$

Si $t = 1 \Rightarrow x = 1, y = -2 \Rightarrow Q(1, -2)$

$\vec{v} = (0, -3)$

b) Si $t = 0 \Rightarrow x = 0, y = 3 \Rightarrow P(0, 3)$

Si $t = 1 \Rightarrow x = 2, y = -2 \Rightarrow Q(2, -2)$

$\vec{v} = (2, -5)$

c) Si $x = 0, y = -7 \Rightarrow P(0, -7)$

Si $x = -1, y = -5 \Rightarrow P(-1, -5)$

$y - 3 = -2(x + 5) \Rightarrow 2x + y + 7 = 0 \Rightarrow \vec{v} = (-1, 2)$

d) Si $x = 0, y = -4 \Rightarrow P(0, -4)$

Si $x = 1, y = 1 \Rightarrow P(1, 1)$

$x = \dfrac{y + 4}{5} \Rightarrow 5x - y - 4 = 0 \Rightarrow \vec{v} = (1, 5)$

24. **Actividad resuelta.**

25. **Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos:**

a) $P(-2, 3)$ y $Q(1, 2)$ **b)** $P(0, 3)$ y $Q(-2, -3)$

a) El vector $\overrightarrow{PQ} = (3, -1)$ es el vector director de la recta. La ecuación continua es $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y - 2}{-1}$.

b) El vector $\overrightarrow{PQ} = (-2, -6)$ es el vector director de la recta. La ecuación continua es $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y - 3}{-6}$.

26. **Calcula la ecuación general de la recta que pasa por $P(-2, 3)$ y tiene pendiente $m = -4$.**

Como $m = -4$, un vector director de la recta es $\vec{v} = (1, -4)$. Por tanto, la ecuación general de la recta es de la forma $4x + y + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Como la recta pasa por $P(-2, 3)$, entonces $4 \cdot (-2) + 3 + k = 0 \Rightarrow k = 5$

La ecuación general de la recta que pasa por $P(-2, 3)$ y tiene pendiente $m = -4$ es $4x + y + 5 = 0$.

27. **Calcula, en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta en los siguientes casos.**

a) **Pasa por el punto $A(5, -2)$ y lleva dirección del vector $\vec{u} = (1, -3)$.**

b) **Pasa por el punto $A(-5, 4)$ y tiene pendiente $m = -2$.**

c) **Pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(5, -2)$**

Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de cada una.

a) Un vector director es $\vec{u}(-1, 3)$. Por tanto, la pendiente de la recta es $m = -3$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (5, -2) + t(1, -3)$

Ecuación general: $3x + y - 13 = 0$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

Ecuación explícita: $y = -3x + 13$

Ecuación continua: $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+2}{-3}$

Ecuación punto – pendiente: $y + 2 = -3(x - 5)$

La ordenada en el origen es $n = 13$.

b) La pendiente de la recta es $m = -2$. Por tanto, un vector director es $\vec{v}(1, -2)$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-5, 4) + t(1, -2)$

Ecuación general: $2x + y + 6 = 0$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

Ecuación explícita: $y = -2x - 6$

Ecuación continua: $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y-4}{-2}$

Ecuación punto – pendiente: $y - 4 = -2(x + 5)$

La ordenada en el origen es $n = -6$.

c) La recta pasa por $A(-1, 3)$ y $B(5, -2)$. Por tanto, un vector director es $\vec{v}(6, -5)$. La pendiente es $m = -\dfrac{5}{6}$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-1, 3) + t(6, -5)$

Ecuación general: $5x + 6y - 13 = 0$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{-5x}{6} + \dfrac{13}{6}$

Ecuación continua: $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-3}{-5}$

Ecuación punto – pendiente: $y - 3 = -\dfrac{5}{6}(x + 1)$

La ordenada en el origen es $n = \dfrac{13}{6}$.

28. **Estudia la posición relativa de las rectas.**

a) **r: $2x + y - 5 = 0$ y s: $4x + 3y = 11$**

b) **$r: -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}y + \dfrac{5}{4} = 0$ y s: $2x - 3y - 5 = 0$**

a) $\dfrac{2}{4} \neq \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ Rectas secantes

b) $-\dfrac{1}{2} : 2 = -\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} : (-3) = \dfrac{5}{4} : (-5) \Rightarrow$ Rectas coincidentes

29. **Actividad resuelta.**

30. **Calcula el valor de m para que las rectas r: $5x + my + 1 = 0$ y s: $-x - y + 3 = 0$ sean paralelas. ¿Hay algún valor de m que las haga coincidentes? ¿Y secantes?**

$\dfrac{5}{-1} = \dfrac{m}{-1} \Rightarrow m = 5 \Rightarrow \dfrac{5}{-1} = \dfrac{5}{-1} \neq \dfrac{1}{3}$

Para $m \neq 5$ las rectas son secantes y para $m = 5$ las rectas son paralelas.

31. Halla la ecuación de la recta paralela a *r*: $3x - 4y = 12$ y que pasa por el punto *P*(5, –5).

Las rectas paralelas a *r*: $3x - 4y = 12$ son de la forma $3x - 4y + k = 0$.

Como la recta pasa por *P*, entonces $3 \cdot 5 - 4 \cdot (-5) + k = 0 \Rightarrow k = -35$.

La ecuación de la recta es: $3x - 4y - 35 = 0$

32. Halla la ecuación de la recta perpendicular a *r*: $-2x - 4y = 5$ y que pasa por el origen de coordenadas.

Las rectas perpendiculares a *r*: $-2x - 4y = 5$ son de la forma $-4x + 2y + k = 0$.

Como la recta pasa por el origen de coordenadas, entonces $-4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0$.

La ecuación de la recta perpendicular a *r* pasando por el origen de coordenadas es: $-4x + 2y = 0$

33. Dada la recta de ecuaciones paramétricas *r*: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$:

a) Calcula su ecuación general.

b) Halla la recta paralela a *r* que pasa por *A*(–1, 4).

c) ¿Cuál es la ecuación de la perpendicular a *r* que pasa por (–2, 2)?

a) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{3} \Rightarrow 3x - 6 = -2y - 2 \Rightarrow 3x + 2y - 4 = 0$

b) Las rectas paralelas a *r*: $3x + 2y - 4 = 0$ son de la forma $3x + 2y + k = 0$.

Como la recta pasa por *A*, entonces $3 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + k = 0 \Rightarrow k = -5$.

La ecuación de la recta paralela a *r* pasando por *A* es: $3x + 2y - 5 = 0$

c) Las rectas perpendiculares a *r*: $3x + 2y - 4 = 0$ son de la forma $2x - 3y + k = 0$.

Como la recta pasa por *A*, entonces $2 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 + k = 0 \Rightarrow k = 10$.

La ecuación de la recta perpendicular a *r* pasando por (–2, 2) es: $2x - 3y + 10 = 0$

34. Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto *A*(–2, 4) y es paralela a la que tiene por ecuación $7x - 14y + 3 = 0$.

Las rectas paralelas a *r*: $7x - 14y + 3 = 0$ son de la forma $7x - 14y + k = 0$.

Como la recta pasa por *A*, entonces $7 \cdot (-2) - 14 \cdot 4 + k = 0 \Rightarrow k = 70$.

La ecuación de la recta paralelas a *r* pasando por *A* es: $7x - 14y + 70 = 0$

Despejando *y* se obtiene su ecuación explícita: $y = \dfrac{7x}{14} + \dfrac{70}{14}$. Es decir, $y = \dfrac{x}{2} + 5$

35. Comprueba si las rectas *r* y *s* son perpendiculares.

a) $r: \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y = -6$ y $s: \frac{5}{6}x - \frac{3}{5}y = -8$

b) $r: \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = 0$ y $s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 - \frac{9}{8}t \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - \frac{1}{2}t \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 10t \end{cases}$

a) Un vector director de la recta *r* es $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{2}\right)$ y uno de la recta *s* es $\vec{w} = \left(\frac{3}{5}, \frac{5}{6}\right)$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{5}{6}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{9}{25} + \frac{5}{12} = \frac{233}{300} \neq 0 \Rightarrow \text{Las rectas no son perpendiculares.}$$

b) Un vector director de la recta *r* es $\vec{v} = \left(\frac{-1}{4}, \frac{2}{3}\right)$ y uno de la recta *s* es $\vec{w} = \left(-3, \frac{-9}{8}\right)$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\frac{-1}{4}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-3, \frac{-9}{8}\right) = \frac{-1}{4} \cdot (-3) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-9}{8}\right) = \frac{3}{4} - \frac{18}{24} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \text{Las rectas son perpendiculares.}$$

c) Un vector director de la recta *r* es $\vec{v} = \left(5, \frac{-1}{2}\right)$ y uno de la recta *s* es $\vec{w} = (1, 10)$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(5, \frac{-1}{2}\right) \cdot (1{,}10) = 5 \cdot 1 + \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot 10 = 5 - 5 = 0 \Rightarrow \text{Las rectas son perpendiculares.}$$

36. Decide en cuáles de los siguientes triángulos casos los puntos *A*, *B* y *C* están alineados y en cuáles forman un triángulo.

a) ***A*(–1, –5), *B*(0, –3), *C*(–2, –7)**

b) ***A*(1, –2), *B*(0, 1), *C*(–2, 7)**

c) ***A*(1, 2), *B*(2, 7), *C*(–1, 3)**

Para que *A*, *B* y *C* estén alineados debe verificarse que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean proporcionales. Por tanto:

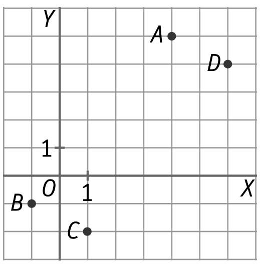
a) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0+1, -3+5) = (1, 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-2+1, -7+5) = (-1, -2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} = \frac{2}{-2} \Rightarrow$ *A*, *B* y *C* están alineados y, por tanto, no forman un triángulo.

b) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0-1, 1+2) = (-1, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (-2-1, 7+2) = (-3, 9) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{-3} = \frac{3}{9} \Rightarrow$ *A*, *B* y *C* están alineados y, por tanto, no forman un triángulo.

c) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2-1, 7-2) = (1, 5) \\ \overrightarrow{AC} = (-1-1, 3-2) = (-2, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq \frac{5}{1} \Rightarrow$ *A*, *B* y *C* no están alineados y, por tanto, forman un triángulo.

37. Actividad resuelta.

38. Dados los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$. ¿Cuáles de ellos son equipolentes?



$\overrightarrow{BA}$ = (4 + 1, 5 +1) = (5, 6)

$\overrightarrow{CD}$ = (6 – 1, 4 + 2) = (5, 6)

$\overrightarrow{BC}$ = (1 + 1, –2 + 1) = (2, –1)

$\overrightarrow{AD}$ = (6 – 4, 4 – 5) = (2, –1)

Son equipolentes $\overrightarrow{BA}$ con $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BC}$ con $\overrightarrow{AD}$.

39. **Calcula las coordenadas del punto *A* y el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ = (5, 3) si el punto *B* es (–1, 4).**

A = (–1 – 5, 4 – 3) = (–6, 1) y $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$

40. **Calcula la distancia entre los puntos.**

a) ***A*(4, –2) y *B*(0, 9)**

b) ***C*(–1, 10) y *D*(8, –5)**

a) $d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(0-4)^2+(9+2)^2} = \sqrt{137}$

b) $d(C, D) = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(8+1)^2+(-5-10)^2} = \sqrt{306} = 3\sqrt{34}$

41. **Calcula los puntos *P*, *Q*, *R* y *S* que dividen el segmento de extremos *A*(–2, 6) y *B*(13, –4) en cinco partes iguales.**

Si se considera el vector $\overrightarrow{AB}$ = (13 + 2, –4 – 6) = (15, –10), se observa que: $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{15}{5}, \frac{-10}{5}\right) = (3, -2)$ y, por tanto:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ = (–2, 6) + (3, –2) = (1, 4) $\Rightarrow$ P(1, 4)

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AP}$ = (–2, 6) + 2(3, –2) = (4, 2) $\Rightarrow$ Q(4, 2)

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{AP}$ = (–2, 6) + 3(3, –2) = (7, 0) $\Rightarrow$ R(7, 0)

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{AP}$ = (–2, 6) + 4(3, –2) = (10, –2) $\Rightarrow$ S(10, –2)

42. **Actividad resuelta.**

43. **Calcula el valor o los valores de *m* para que *A*, *B* y *C* estén alineados.**

a) ***A*(5, 0), *B*(2, 4), *C*(*m*, 8)**

b) ***A*(–2, 2), *B*(*m*, *m* – 1), *C*(0, –6)**

c) ***A*(4, –5), *B*(*m*, –4), *C*(2, –*m*)**

Para que *A*, *B* y *C* estén alineados debe verificarse que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean proporcionales. Por tanto:

a) $\overrightarrow{AB}$ = (–3, 4) y $\overrightarrow{AC}$ = (m – 5, 8)

$$\frac{m-5}{-3} = \frac{8}{4} \Rightarrow \frac{m-5}{-3} = 2 \Rightarrow m-5 = -6 \Rightarrow m = -1$$

b) $\overrightarrow{AB}$ = (m + 2, m – 3) y $\overrightarrow{AC}$ = (2, –8)

$$\frac{2}{m+2} = \frac{-8}{m-3} \Rightarrow 2m-6 = -8m-16 \Rightarrow 10m = -10 \Rightarrow m = -1$$

c) $\overrightarrow{AB}$ = (m – 4, 1) y $\overrightarrow{AC}$ = (–2, –m + 5)

$$\frac{-2}{m-4} = \frac{-m+5}{1} \Rightarrow -2 = (m-4)(-m+5) \Rightarrow -2 = -m^2+9m-20 \Rightarrow m^2-9m+18 = 0 \Rightarrow m = \frac{9\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{9\pm 3}{2} = \begin{cases} 6 \\ 3 \end{cases}$$

44. **Realiza estas operaciones con vectores.**

a) **(2, –1) – (4, 3)**

b) **6(–3, 1) + (10, –2)**

c) **2(–4, 0) – 3(–1, 2)**

d) **4(1, –1) + 2(3, 0)**

e) **(3, –1) – 5(1, –2)**

f) **(9, 6) – 2(4, 1)**

a) (2, –1) – (4, 3) = (–2, –4)

b) 6(–3, 1) + (10, –2) = (–8, 4)

c) 2(–4, 0) – 3(–1, 2) = (–5, –6)

d) 4(1, –1) + 2(3, 0) = (10, –4)

e) (3, –1) – 5(1, –2) = (–2, 9)

f) (9, 6) – 2(4, 1) = (1, 4)

45. **Dados los vectores $\vec{u}$ = (5, –3), $\vec{v}$ = (–1, 4) y $\vec{w}$ = (2, 2), calcula.**

a) $\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})$

b) $3\vec{u}-2(\vec{w}-\vec{v})$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v}-\vec{u})$

d) $5\vec{w}-3\vec{v}+\vec{u}$

e) $2(\vec{w}+\vec{v})-\vec{u}$

f) $\frac{3}{4}\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$

a) $\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})$ = (5, –3) – (1, 6) = (4, –9)

b) $3\vec{u}-2(\vec{w}-\vec{v})$ = (15, –9) – (6, –4) = (9, –5)

c) $\frac{1}{2}(\vec{v}-\vec{u}) = \frac{1}{2}(-6,7)=\left(-3,\frac{7}{2}\right)$

d) $5\vec{w}-3\vec{v}+\vec{u}$ = (10, 10) – (–3, 12) + (5, –3) = (18, –5)

e) $2(\vec{w}+\vec{v})-\vec{u}$ = 2(1, 6) – (5, –3) = (–3, 15)

f) $\frac{3}{4}\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w} = \left(\frac{15}{4},-\frac{9}{4}\right)$ – (–2, 8) + (2, 2) = $\left(\frac{31}{4},-\frac{33}{4}\right)$

46. **Calcula el valor de *x* e *y* en cada caso.**

a) **(5, –9) =3(*x*, *y*) – 2(*x*, 0)**

b) **(*x*, –4) =2(*y*, 5) + (3, *x*)**

c) **(2*y*, 0) =(*x*, *y*) – 2(*x*, 5)**

d) **(3*x*, –*y*) =2(1, –*x*) + (*y*, 9)**

a) $\begin{cases}5=3x-2x\\-9=3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=-3\end{cases}$

b) $\begin{cases}x=2y+3\\-4=10+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-14=2y+3\\x=-14\end{cases}\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{-17}{2}\\x=-14\end{cases}$

c) $\begin{cases}2y=x-2x\\0=y-10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2y\\y=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-20\\y=10\end{cases}$

d) $\begin{cases}3x=2+y\\-y=-2x+9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x-2\\y=2x-9\end{cases}\Rightarrow x=-7\Rightarrow y=-23$

47. **Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices *A*(2, 1), *B*(2, 5) y *C*(–2, 3).**

Los puntos medios de los lados del triángulo son:

$M_{AB}\left(\frac{2+2}{2},\frac{5+1}{2}\right)$ = (2, 3) $M_{BC}\left(\frac{2-2}{2},\frac{5+3}{2}\right)$ = (0, 4) $M_{AC}\left(\frac{2-2}{2},\frac{1+3}{2}\right)$ = (0, 2)

48. **Estudia si los vectores $\vec{u}$ = (2, –4), $\vec{v}$ = (3, 1) y $\vec{w}$ = (11, –15) son linealmente dependientes.**

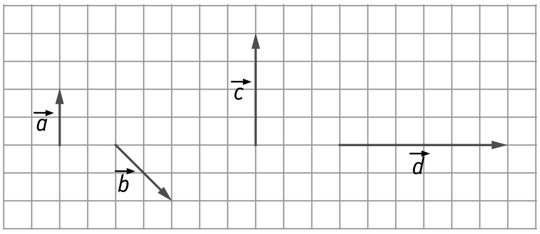
Los vectores son linealmente dependientes porque (11, –15) = 4(2, –4) + (3, 1). Es decir, $\vec{w}=4\vec{u}+\vec{v}$.

49. **Escribe $\vec{a}$ = (–7, –9) como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ = (4, –3) y $\vec{v}$ = (5, 1).**

Para que sea combinación lineal deben existir dos números reales, λ y μ, tales que $\vec{a}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$.

(–7, –9) = λ(4, –3) + μ(5, 1) $\Rightarrow\begin{cases}-7=4\lambda+5\mu\\-9=-3\lambda+\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-7=4\lambda+5\mu\\45=15\lambda-5\mu\end{cases}\Rightarrow 38=19\lambda\Rightarrow\lambda=2\Rightarrow\mu=-3\Rightarrow\vec{a}=2\vec{u}-3\vec{v}$.

50. **Expresa los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.**



$\vec{a}$ = (0, 2), $\vec{b}$ = (2, –2), $\vec{c}$ = (0, 4) y $\vec{d}$ = (6, 0).

(0, 4) = λ(0, 2) + μ(2, –2) $\Rightarrow\begin{cases}\mu=0\\\lambda=2\end{cases}\Rightarrow\vec{c}=2\vec{a}+0\vec{b}$

(6, 0) = λ(0, 2) + μ(2, –2) $\Rightarrow\begin{cases}\mu=3\\\lambda=3\end{cases}\Rightarrow\vec{d}=3\vec{a}+3\vec{b}$

51. **Actividad resuelta.**

52. **Calcula el punto simétrico de:**

a) **$A(-3, 7)$ respecto del punto $P(0, -3)$.**

b) **$A(3, 1)$ respecto del punto $P(2, 2)$.**

c) **$A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ respecto del punto $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.**

Llamamos $A'(a, b)$ al simétrico de A respecto P.

a) $0 = \frac{-3+a}{2}, -3 = \frac{7+b}{2} \Rightarrow a = 3, b = -13 \Rightarrow A'(3, -13)$

b) $2 = \frac{3+a}{2}, 2 = \frac{1+b}{2} \Rightarrow a = 1, b = 3 \Rightarrow A'(1, 3)$

c) $-\frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}+a}{2}, \frac{1}{2} = \frac{1+b}{2} \Rightarrow a = -\frac{17}{6}, b = 0 \Rightarrow A'\left(-\frac{17}{6}, 0\right)$

53. **Dados $\vec{u} = (5, 8)$, $\vec{v} = (-2, 6)$ y $\vec{w} = (-1, -3)$, calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w}$

c) $\vec{v} \cdot \vec{w}$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \cdot (-2) + 8 \cdot 6 = -10 + 48 = 38$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 5 \cdot (-1) + 8 \cdot (-3) = -5 - 24 = -29$

c) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (-2) \cdot (-1) + 6 \cdot (-3) = 2 - 18 = -16$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (5, 8) \cdot (-3, 3) = 5 \cdot (-3) + 8 \cdot 3 = -15 + 24 = 9$

54. **Conocidos los vectores $\vec{u} = (-6, 8)$ y $\vec{v} = (1, 7)$, realiza las siguientes operaciones.**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $(-2\vec{u}) \cdot \vec{v}$

c) $|\vec{u} - 3\vec{v}|$

d) $|2\vec{v} - 3\vec{u}|$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-6) \cdot 1 + 8 \cdot 7 = -6 + 56 = 50$

b) $(-2\vec{u}) \cdot \vec{v} = 12 \cdot 1 + (-16) \cdot 7 = 12 - 112 = -100$

c) $|\vec{u} - 3\vec{v}| = |(-9, -13)| = \sqrt{(-9)^2 + (-13)^2} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$

d) $|2\vec{v} - 3\vec{u}| = |(18, -10)| = \sqrt{18^2 + (-10)^2} = \sqrt{424} = 2\sqrt{106}$

55. **Estudia si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares entre sí.**

a) **$\vec{u} = (6, 9)$ y $\vec{v} = (-3, 2)$**

b) **$\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{v} = (-8, -4)$**

c) **$\vec{u} = (-3, 6)$ y $\vec{v} = (10, 5)$**

d) **$\vec{u} = (-1, -2)$ y $\vec{v} = (4, 2)$**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \cdot (-3) + 9 \cdot 2 = -18 + 18 = 0 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares entre sí.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-8) + 4 \cdot (-4) = -16 - 16 = -32 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no son perpendiculares entre sí.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3) \cdot 10 + 6 \cdot 5 = -30 + 30 = 0 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares entre sí.

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = -4 - 4 = -8 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no son perpendiculares entre sí.

56. Calcula el ángulo que forman los vectores.

a) $\vec{u}$ **= (–2, –4) y** $\vec{v}$ **= (2, –1)**

b) $\vec{u}$ **= (3, 9) y** $\vec{v}$ **= (2, –1)**

c) $\vec{u} = \left(2, \sqrt{3}\right)$ **y** $\vec{v} = \left(\sqrt{3}, 1\right)$

a) $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{-2\cdot 2+(-4)\cdot(-1)}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \alpha = \text{arccos } 0 = 90^{\circ}$

b) $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{3\cdot 2+9\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+9^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \dfrac{-3}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{5}} = -0{,}14\ 142 \Rightarrow \alpha = \text{arccos } -0{,}14\ 142 = 98^{\circ}\ 7'\ 44''$

c) $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 1}{\sqrt{2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{4}} = 0{,}98\ 198 \Rightarrow \alpha = \text{arccos } 0{,}98198 = 10^{\circ}\ 53'\ 37''$

57. Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **sabiendo que** $\left|\vec{u}\right| = 2$**,** $\left|\vec{v}\right| = 1$ **y que** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{3}$**.**

$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arccos } \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 30^{\circ}$

58. Comprueba si son perpendiculares los vectores $\vec{u}$ **= (6, 15) y** $\vec{v}$ **= (5, –2).**

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 6\cdot 5 + 15\cdot(-2) = 30 - 30 = 0 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares entre sí.

59. Halla el valor de *a* para que los vectores $\vec{u}$ **= (*a*, 3) y** $\vec{v}$ **= (–1, 5) sean perpendiculares.**

$\vec{u}\cdot\vec{v} = a\cdot(-1) + 3\cdot 5 = -a + 15 = 0 \Rightarrow a = 15$

60. Calcula el valor de *a* para que los vectores $\vec{u}$ **= (4, 3) y** $\vec{v}$ **= (a, 1) formen un ángulo de 45º.**

$\cos 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{4a+3}{5\sqrt{a^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 8a+6 = 5\sqrt{2a^2+2} \Rightarrow 64a^2 + 96a + 36 = 50a^2 + 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow 14a^2 + 96a - 14 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-96\pm 100}{28} = \begin{cases} -7 \\ \dfrac{4}{28} = \dfrac{1}{7} \end{cases}$

61. Determina mediante vectores si el triángulo de vértices *A*(–4, –2), *B*(0, 1) y *C*(3, 2) es rectángulo.

Consideramos los vectores $\overrightarrow{BA}$ = (–4, –3) y $\overrightarrow{BC}$ = (3, 1).

$\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{(-4)\cdot 3+(-3)\cdot 1}{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{-15}{5\sqrt{10}} = -0{,}948\ 68 \Rightarrow \alpha = 161^{\circ}\ 33'\ 52'' \Rightarrow$ Triángulo obtusángulo.

62. Clasifica los siguientes triángulos según sus lados y según sus ángulos.

a) ***A*(3, 4), *B*(4, –1), *C*(–1, –2)**

b) ***A*(–1, –2), *B*(3, 4), *C*(6, –2)**

a) $\overrightarrow{AB} = (1, -5)$, $\overrightarrow{AC} = (-4, -6)$ y $\overrightarrow{BC} = (-5, -1)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$ $\Rightarrow$ Triángulo isósceles.

$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{1\cdot(-5) + (-5)\cdot(-1)}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}\cdot\sqrt{(-5)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{26}\sqrt{26}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^{\circ} \Rightarrow$ Triángulo rectángulo.

b) $\overrightarrow{AB} = (4, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (7, 0)$ y $\overrightarrow{BC} = (3, -6)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{7^2 + 0^2} = 7$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$ $\Rightarrow$ Triángulo escaleno.

$\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{-4\cdot 3 - 6\cdot(-6)}{\sqrt{3^2 + 6^2}\cdot\sqrt{4^2 + (-6)^2}} = \dfrac{24}{\sqrt{45}\sqrt{52}} = 0{,}496 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}496 = 60^{\circ}\ 15'\ 51''$

$\cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{3\cdot 7 + (-6)\cdot 0}{\sqrt{3^2 + (-6)^2}\cdot\sqrt{7^2 + 0^2}} = \dfrac{21}{7\sqrt{45}} = 0{,}447 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}447 = 63^{\circ}\ 26'\ 55''$

$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{4\cdot 7 + 6\cdot 0}{\sqrt{4^2 + 6^2}\cdot\sqrt{7^2 + 0^2}} = \dfrac{28}{7\sqrt{52}} = 0{,}555 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}555 = 56^{\circ}\ 17'\ 21''$

El triángulo es acutángulo.

63. Comprueba si el punto *B*(4, –6) pertenece a alguna de las rectas siguientes.

a) $y = 9 - 3x$

b) $5x + 3y - 2 = 0$

a) $9 - 3\cdot 4 = 9 - 12 = -3 \Rightarrow$ El punto *B* no pertenece a la recta.

b) $5\cdot 4 + 3\cdot(-6) - 2 = 20 - 18 - 2 = 0 \Rightarrow$ El punto *B* pertenece a la recta.

64. Determina el vector director, un vector normal y un punto de las siguientes rectas.

a) $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+4}{5}$

b) $(x, y) = (4, 0) + t(2, -6)$

c) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$

d) $4x - y = 0$

a) $P(3, -4)$, $\vec{v} = (-2, 5)$ y $\vec{n} = (5, 2)$

b) $P(4, 0)$, $\vec{v} = (2, -6)$ y $\vec{n} = (6, 2)$

c) $P(2, 5)$, $\vec{v} = (-1, 3)$ y $\vec{n} = (3, 1)$

d) $P(0, 0)$, $\vec{v} = (1, 4)$ y $\vec{n} = (4, -1)$

65. Obtén un punto, un vector director y la pendiente de la recta de ecuaciones paramétricas: *r*: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5t \end{cases}$

Un punto $P(-1, 0)$, un vector director $\vec{v} = (2, 5)$ y la pendiente $m = 2{,}5$.

66. Escribe de todas las formas posibles la ecuación de las siguientes rectas.

a) Pasa por el punto *A*(3, 1) y tiene la dirección del vector $\vec{u}$ = (5, –2).

b) Pasa por el punto *A*(–2, 2) y su pendiente es *m* = –3.

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (3, 1) + t(5, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-1}{-2}$

Ecuación general: $2x + 5y - 11 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{-2x}{5} + \dfrac{11}{5}$

Ecuación punto – pendiente: $y - 1 = \dfrac{-2}{5}(x - 3)$

b) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-2, 2) + t(1, -3)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua: $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{-3}$

Ecuación general: $3x + y + 4 = 0$

Ecuación explícita: $y = -3x - 4$

Ecuación punto – pendiente: $y - 2 = -3(x + 2)$

67. Escribe de todas las formas posibles la ecuación de las rectas.

a) $r: 3x - 2y = -10$

b) $r: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+1}{2}$

c) $r: y = -2x + 3$

d) $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$

a) La pendiente es $m = \dfrac{3}{2}$ y un punto por el que pasa (0, 5).

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 5) + t(2, 3)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-5}{3}$

Ecuación general: $3x - 2y + 10 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{3x}{2} + 5$

Ecuación punto – pendiente: $y - 5 = \dfrac{3}{2}x$

b) Un vector director $\vec{v}$ = (4, 2) y un punto por el que pasa (3, –1).

Ecuación vectorial: $(x, y) = (3, -1) + t(4, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+1}{2}$

Ecuación general: $2x - 4y - 10 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{2x}{4} - \dfrac{10}{4}$

Ecuación punto – pendiente: $y + 1 = \dfrac{2}{4}(x - 3)$

c) La pendiente es $m = -2$ y un punto por el que pasa (0, 3).

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 3) + t(1, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{-2}$

Ecuación general: $2x + y - 3 = 0$

Ecuación explícita: $y = -2x + 3$

Ecuación punto – pendiente: $y - 3 = -2x$

d) Un vector director $\vec{v}$ = (2, –3) y un punto por el que pasa (2, –1).

Ecuación vectorial: $(x, y) = (2, -1) + t(2, -3)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-3}$

Ecuación general: $3x + 2y - 4 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{-3x}{2} + 2$

Ecuación punto – pendiente: $y + 1 = \dfrac{-3}{2}(x - 2)$

68. Halla la pendiente y un punto por el que pasa cada una de las siguientes rectas y represéntalas gráficamente.

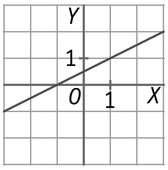
a) $\dfrac{x+1}{2}=y$

b) $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-2}{-4}$

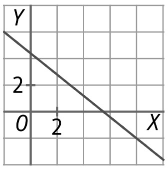
c) $5x-2y+3=0$

d) $\dfrac{x}{8}-\dfrac{y}{5}=1$

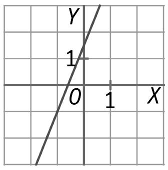
a) Punto $P(-1, 0)$ y pendiente $m=\dfrac{1}{2}$



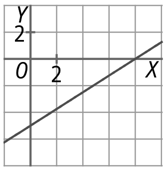
b) Punto $P(3, 2)$ y pendiente $m=\dfrac{-4}{5}$



c) Punto $P(1, 4)$ y pendiente $m=\dfrac{5}{2}$



d) Punto $P(8, 0)$ y pendiente $m=\dfrac{5}{8}$



69. ¿Son secantes las rectas *r*: 4*x* – 5*y* – 2 = 0 y *s*: *y* = 2*x* – 4? En caso afirmativo, calcula su punto de corte.

Las formas generales de las rectas *r* y *s* son: *r*: $4x-5y-2=0$ y *s*: $2x-y-4=0$.

Se estudian los coeficientes de *x* e *y*: $\dfrac{4}{2}\neq\dfrac{-5}{-1}$ $\Rightarrow$ Las rectas son secantes, es decir, se cortan en un punto *P*.

Para calcular el punto de corte *P* se resuelve el sistema:

$$\begin{cases}4x-5y-2=0\\ y=2x-4\end{cases}\Rightarrow 4x-5(2x-4)-2=0\Rightarrow 4x-10x+20-2=0\Rightarrow -6x=-18\Rightarrow x=3\Rightarrow y=2\ \Rightarrow P(3, 2)$$

70. Estudia la posición relativa de estos pares de rectas.

a) ***r*: 4*x* – 6*y* + 10 = 0 y *s*: 2*x* – 3*y* + 4 = 0**

b) ***r*: 2*x* + 3*y* + 6 = 0 y *s*: 6*x* + 9*y* + 18 = 0**

a) $\dfrac{4}{2}=\dfrac{-6}{-3}\neq\dfrac{10}{4}$ $\Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

b) $\dfrac{2}{6}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{6}{18}$ $\Rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

71. Estudia la posición relativa de estos pares de rectas y, si son secantes, halla su punto de corte.

a) ***r*: 2*x* – 5*y* + 7 = 0 y *s*: *x* – 2*y* – 2 = 0**

b) ***r*: 6*x* + 4*y* – 12 = 0 y *s*: 3*x* + 2*y* – 6 = 0**

c) ***r*: *x* – 5*y* + 3 = 0 y *s*: 3*x* – 15*y* + 8 = 0**

a) $\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{-5}{-2}$ $\Rightarrow$ Las rectas son secantes. Para calcular el punto de corte *P* se resuelve el sistema:

$$\begin{cases}2x-5y+7=0\\ x-2y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-5y+7=0\\ x=2y+2\end{cases}\Rightarrow 4y+4-5y+7=0\Rightarrow y=11\Rightarrow x=24\Rightarrow$$ El punto de corte es $P(24, 11)$.

b) $\dfrac{6}{3}=\dfrac{4}{2}=\dfrac{-12}{-6}$ $\Rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

c) $\dfrac{1}{3}=\dfrac{-5}{-15}\neq\dfrac{3}{8}$ $\Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

72. Calcula la ecuación general de las rectas que contienen a los lados del triángulo de vértices *A*(–2, 3), *B*(1, –1) y *C*(2, –2).

Ecuación de la recta que pasa por *A* y *B*:

$$\frac{x+2}{1+2}=\frac{y-3}{-1-3}\Rightarrow\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-4}\Rightarrow -4x-8=3y-9\Rightarrow 4x+3y=1$$

Ecuación de la recta que pasa por *B* y *C*:

$$\frac{x-1}{1-2}=\frac{y+1}{-1+2}\Rightarrow\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}\Rightarrow x-1=-y-1\Rightarrow x+y=0$$

Ecuación de la recta que pasa por *A* y *C*:

$$\frac{x+2}{2+2}=\frac{y-3}{-2-3}\Rightarrow\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{-5}\Rightarrow -5x-10=4y-12\Rightarrow 5x+4y=2$$

73. Actividad resuelta.

74. Calcula la ecuación general de la recta r si cumple las siguientes condiciones.

a) Pasa por *A*(–2, –4) y forma un ángulo de 45º con la parte positiva del eje *X*.

b) Pasa por el origen de coordenadas y forma un ángulo de 60º con la parte positiva del eje *X*.

a) Como la recta forma un ángulo de 45º con la parte positiva del eje *X*, su pendiente será m = tg 45º = 1.

Utilizando la ecuación punto – pendiente: $y + 4 = x + 2 \Rightarrow x - y - 2 = 0$.

b) Como la recta forma un ángulo de 60º con la parte positiva del eje *X*, su pendiente será m = tg 60º = $\sqrt{3}$.

Utilizando la ecuación punto – pendiente: $y = \sqrt{3}\,x \Rightarrow \sqrt{3}\,x - y = 0$.

75. Actividad resuelta.

76. Dados los puntos *A*(2, 3), *B*(–4, –1) y *C*(0, 2):

a) Calcula las ecuaciones de todas las rectas que pasan por dos de los puntos anteriores.

b) Calcula la paralela a la que contiene a *A* y a *B* y que pasa por *C*.

c) Calcula la perpendicular a la que contiene a *A* y a *B* y que pasa por *C*.

a) Ecuación de la recta que pasa por *A* y *B*:

$$\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y-3}{-1-3}\Rightarrow\frac{x-2}{-6}=\frac{y-3}{-4}\Rightarrow -4x+8=-6y+18\Rightarrow 4x-6y=-10\Rightarrow 2x-3y+5=0$$

Ecuación de la recta que pasa por *B* y *C*:

$$\frac{x-0}{-4-0}=\frac{y-2}{-1-2}\Rightarrow\frac{x}{-4}=\frac{y-2}{-3}\Rightarrow -3x=-4y+8\Rightarrow 3x-4y+8=0$$

Ecuación de la recta que pasa por *A* y *C*:

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-2}{3-2}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}\Rightarrow x=2y-4\Rightarrow x-2y+4=0$$

b) Las rectas paralelas a $2x - 3y + 5 = 0$ son de la forma $2x - 3y + k = 0$.

Como la recta pasa por *C*, entonces $2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + k = 0 \Rightarrow k = 6$.

La ecuación de la recta paralela a la que contiene a *A* y a *B* y que pasa por *C* es: $2x - 3y + 6 = 0$

c) Las rectas perpendiculares a $2x - 3y + 5 = 0$ son de la forma $3x + 2y + k = 0$.

Como la recta pasa por *C*, entonces $3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + k = 0 \Rightarrow k = 4$.

La ecuación de la recta perpendicular a la que contiene a A y a B y que pasa por C es: $3x + 2y + 4 = 0$

77. **Halla la ecuación de la recta perpendicular a la que pasa por los puntos *A*(–2, 3) y *B*(–1, –1) y que pasa por el origen de coordenadas.**

Se calcula la ecuación de la recta que pasa por *A* y *B*:

$$\frac{x+2}{-2+1}=\frac{y-3}{3+1}\Rightarrow\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{4}\Rightarrow 4x+8=-y+3\Rightarrow 4x+y+5=0$$

Las rectas perpendiculares a $4x + y + 5 = 0$ son de la forma $-x + 4y + k = 0$.

Como la recta pasa por el origen de coordenadas, entonces $-0 + 4 \cdot 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0$.

La ecuación de la recta perpendicular es: $-x + 4y = 0$

78. **Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto *A*(0, 3) y por el punto de corte de *r*: $8x - 5y + 2 = 0$ y *s*: $2x + y - 4 = 0$.**

Para calcular el punto de corte, *P*, de las rectas *r* y *s* se resuelve el sistema:

$$\begin{cases}8x-5y+2=0\\2x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x-5y=-2\\10x+5y=20\end{cases}\Rightarrow 18x=18\Rightarrow x=1\Rightarrow y=2\Rightarrow \text{El punto de corte de } r \text{ y } s \text{ es } P(1, 2).$$

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por *A*(0, 3) y *P*(1, 2):

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-3}{2-3}\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}\Rightarrow -x=y-3\Rightarrow x+y-3=0$$

79. **Halla la mediatriz del segmento de extremos *A* y *B* en los siguientes casos.**

a) ***A*(–2, 4) y *B*(2, –4)**

b) ***A*(1, 4) y *B*(–2, 3)**

a) Calculamos la ecuación de la recta *r* que pasa por *A* y *B*:

$$\frac{x+2}{-2-2}=\frac{y-4}{4+4}\Rightarrow\frac{x+2}{-4}=\frac{y-4}{8}\Rightarrow 8x+16=-4y+16\Rightarrow 8x+4y=0\Rightarrow 2x+y=0$$

Hallamos el punto medio, *M*, del segmento de extremos *A* y *B*: $M\left(\frac{-2+2}{2},\frac{4-4}{2}\right)=(0,0)$

Las rectas perpendiculares a $2x + y = 0$ son de la forma $-x + 2y + k = 0$.

Como la recta perpendicular a *r* pasa por $M = (0, 0)$, entonces $-0 + 2 \cdot 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0$.

La mediatriz del segmento de extremos *A* y *B* es: $-x + 2y = 0$

b) Calculamos la ecuación de la recta *r* que pasa por *A* y *B*:

$$\frac{x-1}{1+2}=\frac{y-4}{4-3}\Rightarrow\frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{1}\Rightarrow x-1=3y-12\Rightarrow x-3y+11=0$$

Hallamos el punto medio, *M*, del segmento de extremos *A* y *B*: $M\left(\frac{1-2}{2},\frac{4+3}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2},\frac{7}{2}\right)$

Las rectas perpendiculares a $x - 3y + 11 = 0$ son de la forma $3x + y + k = 0$.

Como la recta perpendicular a *r* pasa por $M\left(\frac{-1}{2},\frac{7}{2}\right)$, entonces $3\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)+\frac{7}{2}+k=0 \Rightarrow k = -2$.

La mediatriz del segmento de extremos *A* y *B* es: $3x + y - 2 = 0$

80. Halla las medianas y el baricentro del triángulo de vértices *A*(–3, 2), *B*(1, 6) y *C*(5, 0).

Las medianas de un triángulo son las rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. El baricentro es el punto donde se cortan las medianas.

Calculamos los puntos medios de los lados del triángulo:

$M\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$ = (–1, 4), $N\left(\frac{1+5}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$ = (3, 3) y $P\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$ = (1, 1)

Hallamos las ecuaciones de las medianas:

m_{AN}: $\frac{x+3}{-3-3} = \frac{y-2}{2-3} \Rightarrow \frac{x+3}{-6} = \frac{y-2}{-1} \Rightarrow -x-3 = -6y+12 \Rightarrow x-6y+15 = 0$

m_{CM}: $\frac{x-5}{5+1} = \frac{y-0}{0-4} \Rightarrow \frac{x-5}{6} = \frac{y}{-4} \Rightarrow -4x+20 = 6y \Rightarrow 4x+6y-20 = 0 \Rightarrow 2x+3y-10 = 0$

m_{BP}: $x = 1$

Se calcula el baricentro resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de dos medianas:

$\begin{cases} x-6y+15=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow 1-6y+15=0 \Rightarrow y = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \Rightarrow$ El punto baricentro es el punto $G\left(1, \frac{8}{3}\right)$.

81. Se consideran las rectas *r*: *y* = *x* – 3 y *s*, determinada por los puntos *A*(7, 5) y *B*(–4, 1). ¿Cuál es su posición relativa?

Calculamos la ecuación de la recta *s* que pasa por *A*(7, 5) y *B*(–4, 1):

$\frac{x-7}{11} = \frac{y-5}{4} \Rightarrow 4x-28 = 11y-55 \Rightarrow 4x-11y+27 = 0$

Las formas generales de las rectas *r* y *s* son: *r*: $x - y - 3 = 0$ y *s*: $4x - 11y + 27 = 0$

Se estudian los coeficientes de *x* e *y*: $\frac{1}{4} \neq \frac{-1}{-11} \Rightarrow$ Las rectas son secantes, es decir, se cortan en un punto.

82. Los lados de un triángulo de vienen dados por las rectas 3*x* – *y* – 6 = 0, 3*x* + *y* – 18 = 0 e *y*= 0.

a) Halla las coordenadas de los vértices.

b) Clasifica el triángulo en función de sus lados.

c) Halla las ecuaciones de las medianas.

d) Halla el baricentro del triángulo.

a) Calculamos el vértice *A*, intersección de las rectas $3x - y - 6 = 0$ y $3x + y - 18 = 0$:

$\begin{cases} 3x-y-6=0 \\ 3x+y-18=0 \end{cases} \Rightarrow 6x-24=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=6 \Rightarrow$ Vértice *A* = (4, 6).

Calculamos el vértice *B*, intersección de las rectas $3x - y - 6 = 0$ e $y = 0 \Rightarrow$ Vértice *B* = (2, 0).
Calculamos el vértice *C*, intersección de las rectas $3x + y - 18 = 0$ e $y = 0 \Rightarrow$ Vértice *C* = (6, 0).

b) $\overrightarrow{AB}$ = (–2, –6), $\overrightarrow{AC}$ = (2, –6) y $\overrightarrow{BC}$ = (4, 0)

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2+(-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2+0^2} = 4$

El triángulo es isósceles.

c) Calculamos los puntos medios de los lados del triángulo:

$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$ = (3, 3), $N\left(\frac{2+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ = (4, 0) y $P\left(\frac{4+6}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$ = (5, 3)

Hallamos las ecuaciones de las medianas:

m_{AN}: $x = 4$

m_{CM}: $\frac{x-6}{6-3} = \frac{y-0}{0-3} \Rightarrow \frac{x-6}{3} = \frac{y}{-3} \Rightarrow x-6 = -y \Rightarrow x+y-6 = 0$

m_{BP}: $\frac{x-2}{2-5} = \frac{y-0}{0-3} \Rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-0}{-3} \Rightarrow x-2 = y \Rightarrow x-y-2 = 0$

d) Se calcula el baricentro resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de dos medianas:

$\begin{cases} x-y-2=0 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow 4-y-2=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow$ El punto baricentro es el punto *G* (4, 2).

83. Un triángulo tiene dos vértices en *A*(0, 0) y *B*(2, 0). Halla las coordenadas del tercer vértice sabiendo que es equilátero.

Llamamos *C*(*a*, *b*) al tercer vértice. Como el triángulo es equilátero *d*(*A*, *B*) = *d*(*B*, *C*) = *d*(*A*, *C*).

d(*A*, *B*) = $\sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2}$ = 2, *d*(*B*, *C*) = $\sqrt{(2-a)^2+b^2}$ y *d*(*A*, *C*) = $\sqrt{a^2+b^2}$.

Para hallar las coordenadas del vértice *C*, se resuelve el sistema:

$$\begin{cases}\sqrt{(2-a)^2+b^2}=2\\ \sqrt{a^2+b^2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2-a)^2+b^2=4\\ a^2+b^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4a^2+a^2=0\\ -a^2-b^2=-4\end{cases}\Rightarrow -4a=-4\Rightarrow a=1$$

Si a = 1 $\Rightarrow$ b= $\pm\sqrt{3}$

Por tanto, $C\left(1,\sqrt{3}\right)$ o $C\left(1,-\sqrt{3}\right)$

84. Siendo $\vec{u}$ = (4, *x*), halla el valor de *x* en cada una de las siguientes situaciones.

a) El módulo de $\vec{u}$ vale $\sqrt{20}$ unidades.

b) Si $\vec{v}$ = (3, –5) es tal que el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ es igual a 2.

a) $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{4^2+x^2}=\sqrt{20}$ $\Rightarrow$ 16 + x^2 = 20 $\Rightarrow$ x^2 = 4 $\Rightarrow$ x = ± 2

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 4 · 3 + x · (–5) = 12 – 5x = 2 $\Rightarrow$ x = 2

85. Determina un vector cuyo módulo valga $\sqrt{10}$ unidades lineales y que forme un ángulo de 30º con la horizontal.

Llamamos $\vec{v}$ = (*a*, *b*) al vector.

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}\\ \tan 30º=\dfrac{b}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=10\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{b}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=10\\ b=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}\end{cases}\Rightarrow a^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2=10\Rightarrow 9a^2+3a^2=90\Rightarrow a^2=\dfrac{15}{2}\Rightarrow a=\pm\dfrac{\sqrt{30}}{2}$$

Si $a=\dfrac{\sqrt{30}}{2}\Rightarrow b=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ y si $a=-\dfrac{\sqrt{30}}{2}\Rightarrow b=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. Por tanto, $\vec{v}\left(\dfrac{\sqrt{30}}{2},\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ o $\vec{v}\left(-\dfrac{\sqrt{30}}{2},-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

86. Las rectas *r*: *x* – *y* + 1 = 0, *s*: *x* + *y* – 7 = 0, *t*: *x* – *y* – 5 = 0 y *u*: *x* + *y* – 5 = 0 determinan un cuadrilátero.

a) Calcula la medida de los lados y de los ángulos interiores.

b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

Las rectas *r* y *t* son paralelas, al igual que las rectas *s* y *u*. Por tanto, el cuadrilátero es un paralelogramo de vértices *A*, *B*, *C* y *D*, determinados por la intersección de las rectas *r* y *s*, *r* y *u*, *t* y *u* y *s* y *t*, respectivamente.

Resolviendo los correspondientes sistemas lineales obtenemos: *A*(3, 4), *B*(2, 3), *C*(5, 0) y *D*(6, 1).

a) Calculamos la medida de sus lados:

d(*A*, *B*) = $\sqrt{(2-3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}$ *d*(*B*, *C*) = $\sqrt{(2-5)^2+(3-0)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

d(*C*, *D*) = $\sqrt{(5-6)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$ *d*(*D*, *A*) = $\sqrt{(6-3)^2+(1-4)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Por ser un paralelogramo, los ángulos interiores suman 360º y, los ángulos opuestos, son iguales.

cos $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ = cos ((–1, –1), (3, –3)) = $\dfrac{-1\cdot 3+(-1)\cdot(-3)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}}=\dfrac{0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}}$ = 0 $\Rightarrow$ $\widehat{A}$ = 90º $\Rightarrow$ $\widehat{D}$ = $\widehat{B}$ = $\widehat{C}$ =90º

b) El cuadrilátero, al tener lados paralelos e iguales 2 a 2 y ángulos que miden 90º, es un rectángulo.

87. **Actividad resuelta.**

88. **Calcula el punto simétrico de:**

a) ***A*(3, –4) respecto de la recta *r*: 2*x* + *y* = 3.** **b)** $\boldsymbol{A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)}$ **respecto de la recta *r*:** $\boldsymbol{\frac{1}{2}x + y = 0}$ **.**

a) Calculamos la perpendicular a *r* pasando por *A*. Las rectas perpendiculares a *r* son de la forma –*x* + 2*y* + *k* = 0.

Como la recta perpendicular a *r* pasa por *A*, entonces –3 + 2 · (–4) + *k* = 0 $\Rightarrow$ *k* = 11.

La recta que pasa por *A* y *A´* es *s*: –*x* + 2*y* + 11 = 0

Se calcula el punto *M* intersección de *r* y *s*:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -2x + 4y = -22 \end{cases} \Rightarrow 5y = -19 \Rightarrow y = \frac{-19}{5} \Rightarrow x = \frac{17}{5} \Rightarrow M\left(\frac{17}{5}, \frac{-19}{5}\right)$$

Como *M* debe ser el punto medio del segmento de extremos *A* y *A´*, despejando:

$$\frac{17}{5} = \frac{3+a}{2} \Rightarrow a = \frac{19}{5}, \frac{-19}{5} = \frac{-4+b}{2} \Rightarrow b = \frac{-18}{5} \Rightarrow A'\left(\frac{19}{5}, \frac{-18}{5}\right)$$

b) Calculamos la perpendicular a *r* pasando por *A*. Las rectas son de la forma –*x* + $\frac{1}{2}$*y* + *k* = 0.

Como la recta perpendicular a *r* pasa por *A*, entonces $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$.

La recta que pasa por *A* y *A´* es *s*: $-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{8} = 0$

Se calcula el punto *M* intersección de *r*: *x* + 2*y* = 0 y *s*: –8*x* + 4*y* + 1 = 0

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -8x + 4y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ -8x + 4y = -1 \end{cases} \Rightarrow -10x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{10} \Rightarrow y = \frac{-1}{20} \Rightarrow M\left(\frac{1}{10}, \frac{-1}{20}\right)$$

Como *M* debe ser el punto medio del segmento de extremos *A* y *A´*, despejando:

$$\frac{1}{10} = \frac{\frac{1}{2}+a}{2} \Rightarrow a = \frac{-3}{10}, \frac{-1}{20} = \frac{\frac{3}{4}+b}{2} \Rightarrow b = \frac{-17}{20} \Rightarrow A'\left(\frac{-3}{10}, \frac{-17}{20}\right)$$

89. **Calcula el triángulo simétrico del que tiene como vértices *A*(–2, 0), *B*(1, 4) y *C*(2, –2) respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.**

Calculamos los puntos *A´*, *B´* y *C´*, simétricos de *A*, *B* y *C* respectivamente, respecto a la recta *r*: *y* = *x*.

A´: La recta perpendicular a *r* pasando por *A* es *s*: *x* + *y* = –2. El punto *M*, intersección de *r* y *s*, es *M*(–1, –1).

Como *M* debe ser el punto medio del segmento de extremos *A* y *A´*, entonces *A´*(0, –2).

B´: La recta perpendicular a *r* pasando por *B* es *t*: *x* + *y* = 5. El punto *N*, intersección de *r* y *t*, es $N\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Como *N* debe ser el punto medio del segmento de extremos *B* y *B´*, entonces *B´*(4, 1).

C´: La recta perpendicular a *r* pasando por *C* es s: –*x* – *y* = 0. El punto *P*, intersección de *r* y *s*, es *M*(0, 0).

Como *P* debe ser el punto medio del segmento de extremos *C* y *C´*, entonces P´(–2, 2).

90. **Se va a implantar un sistema de riego automático en una rosaleda. Si dos de los rosales están situados en los puntos *A*(4, 6) y *B*(9, 8), y un tercero, en el punto *C*(0, 6), ¿es posible conseguir que una tubería recta pase por los tres a la vez?**

Para que *A*, *B* y *C* estén alineados debe verificarse que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean proporcionales. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(9-4,8-6)=(5,2)\\ \overrightarrow{AC}=(0-4,6-6)=(-4,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-4}{5}\neq\frac{0}{2}\Rightarrow \text{ Los puntos } A, B \text{ y } C \text{ no están alineados.}$$

No es posible conseguir que una tubería recta pase por los tres rosales a la vez.

91. **Un barco lanza un mensaje de socorro indicando su posición: *A*(1460, 765). Dos barcos situados en *B*(3525, 2490) y *C*(585, 3500) acuden en su ayuda. Si los dos navegan a la misma velocidad y en línea recta hacia *A*, ¿cuál llegará primero?**

Calculamos las distancias de *A* a *B* y de *A* a *C*.

$d(A, B) = \sqrt{(1460-3525)^2+(765-2490)^2}=\sqrt{7\,239\,850}=2690{,}70$ unidades

$d(A, C) = \sqrt{(1460-585)^2+(765-3500)^2}=\sqrt{8\,245\,850}=2871{,}56$ unidades

Llegará primero el barco situado en el punto *B*.

92. **Con un solo golpe sobre la bola *A*, se debe golpear primero a la bola *B* y después a la bola *C*. Si se consideran dos lados de la mesa como ejes de coordenadas, las coordenadas de las bolas son *A*(20, 28), *B*(5, 10) y *C*(12, 36). ¿Con qué ángulo, respecto de la trayectoria seguida por *A* cuando golpea a *B*, debe salir la bola para golpear a la bola *C*?**

Calculamos el ángulo, α, formado por los vectores $\overrightarrow{BA}$ = (15, 18) y $\overrightarrow{BC}$ = (7, 26).

$$\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{15\cdot 7+18\cdot 26}{\sqrt{15^2+18^2}\cdot\sqrt{7^2+26^2}}=\frac{573}{\sqrt{549}\cdot\sqrt{725}}=0{,}9082\Rightarrow \alpha=\text{arccos }0{,}9082=24^{\circ}\,44'\,32''$$

93. **Un rayo de luz incide en el espejo con una trayectoria rectilínea determinada por los puntos *A*(–2, 4) y *B*(3, 2), siendo *B* el punto de contacto con el espejo y *A* el punto de origen. Al reflejarse, la pendiente de la recta que describe su trayectoria es $\frac{2}{5}$.**

a) **Escribe las ecuaciones de las rectas que determinan los rayos incidente y reflejado.**

b) **Halla un vector director de cada una de ellas y el ángulo que forman.**

c) **La posición del espejo forma el mismo ángulo con el rayo incidente y el reflejado. Encuentra la ecuación de la recta que la define.**

a) La recta *r* del rayo incidente pasa por *A* y *B*: $\dfrac{x-3}{3+2}=\dfrac{y-2}{2-4}\Rightarrow 2x+5y-16=0$

La recta *s* del rayo reflejado tiene pendiente $\frac{2}{5}$ y pasa por *B*: $y-2=\frac{2}{5}(x-3)\Rightarrow 2x-5y+4=0$

b) Un vector director de *r* es $\vec{v}$ = (5, –2) y uno de la recta *s* es $\vec{w}$ = (5, 2).

$$\cos\left(\vec{v},\vec{w}\right)=\frac{5\cdot 5+(-2)\cdot 2}{\sqrt{5^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{21}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}}=0{,}724\Rightarrow \alpha=43^{\circ}\,37'$$

c) Sea $\vec{u}$ = (*a*, *b*) el vector director de la recta que determina la posición del espejo.

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{5a-2b}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{29}}\\ \cos\left(\vec{u},\vec{w}\right)=\dfrac{5a+2b}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{29}}\end{array}\right.\Rightarrow 5a-2b=5a+2b\Rightarrow 4b=0\Rightarrow b=0$$

El vector director de la recta del espejo será $\vec{u}$ = (*a*, 0); es decir, será una recta con pendiente 0. Como la recta que contiene al espejo pasa por *B*(3, 2), entonces será *y* = 2.

94. Una altura de un triángulo es el segmento que tiene por extremo uno de los vértices y es perpendicular al lado opuesto. El ortocentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres alturas. Dado el triángulo de vértices *A*(3, 1), *B*(2, –2) y *C*(–2, 2):

a) Halla las ecuaciones de sus tres alturas.

b) Calcula el ortocentro *H* resolviendo el sistema formado por dos de sus alturas.

c) Comprueba que *H* pertenece a las tres alturas.

a) Un vector director de la recta *r* que pasa por *A* y *B* es $\vec{v_1}$ = (1, 3). Por tanto, cualquier recta perpendicular a *r* tendrá vector director $\vec{w_1}$ = (3, –1). La altura, *a*, correspondiente al vértice *C* es la recta que, pasando por *C*, tiene vector director (3, –1).

a: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} \Rightarrow -x-2 = 3y-6 \Rightarrow x+3y = 4$

Un vector director de la recta *s* que pasa por *B* y *C* es $\vec{v_2}$ = (4, –4). Por tanto, cualquier recta perpendicular a *s* tendrá vector director $\vec{w_2}$ = (4, 4). La altura, *b*, correspondiente al vértice *A* es la recta que, pasando por *A*, tiene vector director (4, 4).

b: $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{4} \Rightarrow x-3 = y-1 \Rightarrow x-y = 2$

Un vector director de la recta *t* que pasa por *A* y *C* es $\vec{v_3}$ = (5, –1). Por tanto, cualquier recta perpendicular a *s* tendrá vector director $\vec{w_3}$ = (1, 5). La altura, *c*, correspondiente al vértice *B* es la recta que, pasando por *B*, tiene vector director (1, 5).

c: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{5} \Rightarrow 5x-10 = y+2 \Rightarrow 5x-y = 12$

b) Se calcula el ortocentro resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de dos alturas:

$\begin{cases} x+3y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow 4y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow$ El ortocentro es el punto $H\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

c) $\frac{5}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$, $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ y $5\cdot\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = \frac{24}{2} = 12$

H satisface la ecuación de las tres alturas. Por tanto, *H* pertenece a las tres alturas.

95. Considera dos puntos *B* y *C* en un plano. Sea *S* el conjunto de todos los puntos *A* de ese plano para los que el área del triángulo *ABC* es 1. ¿Qué es *S*?

A. Dos rectas paralelas **B. Una circunferencia** **C. Un segmento** **D. Dos puntos**

Consideramos como base del triángulo el segmento *AB*, y llamamos *d* a la distancia de *A* a *B*. El área del triángulo *ABC* es $1 = \frac{d\cdot h}{2}$, donde *h* es la altura correspondiente al lado *AB*. Por tanto, $h = \frac{2}{d}$. Luego, todos los puntos *C* que disten $\frac{2}{d}$ unidades de la recta que pasa por *A* y *B*, serán el tercer vértice de un triángulo *ABC* de área 1.

Esto puntos están en las dos rectas paralelas a la recta que pasa por *A* y *B*, y que distan $\frac{2}{d}$ de ella.

La respuesta correcta es la A.

96. **Si m y b son números reales y $mb > 0$, la recta de ecuación $y = mx + b$ no puede contener al punto:**

A. (0, 2011) **B. (20, 10)** **C. (20, –10)** **D. (2011, 0)**

Supongamos que la recta contiene al punto (2011, 0).

Por tanto, $0 = 2011m + b \Rightarrow b = -2011m$. Luego $mb = m(-2011m) = -2011m^2 < 0$, pero $mb > 0$.

Por tanto la recta no puede contener al punto (2011, 0).

La respuesta correcta es la D.

97. **El área del triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = -x$ e $y = 6$ es:**

A. 48 **B. 36** **C. 24** **D. 18**

Calculamos los puntos de corte de las rectas:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0, \begin{cases} y = x \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 6, \begin{cases} y = -x \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow -x = 6 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow y = 6$$

Los vértices del triángulo son $A(0, 0)$, $B(6, 6)$ y $C(-6, 6)$.

Consideramos como base del triángulo el segmento BC: $d(B, C) = \sqrt{(6+6)^2 + (6-6)^2} = 12$.

Para hallar la altura del triángulo, correspondiente a la base BC, hallamos la recta perpendicular al segmento BC pasando por A. La recta BC es $y = 6$. Por tanto, la recta perpendicular a $y = 6$ pasando por A es $x = 0$.

El punto de corte de $x = 0$ con $y = 6$ es $D(0, 6)$. Por tanto, la altura del triángulo será $d(A, D) = 6$.

El área del triángulo es $\dfrac{12 \cdot 6}{2} = 36$.

La respuesta correcta es la B.

98. **Una recta r divide en dos trozos de igual área al rectángulo de vértices (–2, 0), (0, 0), (0, 4) y (–2, 4) y al rectángulo de vértices (1, 0), (5, 0), (1, 12) y (5, 12). ¿Cuál es la pendiente de esta recta?**

A. –4 **B. –1** **C. 0** **D. 1**

Si una recta divide a un rectángulo en dos trozos de igual área, tiene que pasar por su centro.
Así pues, la recta dada pasará por (–1, 2) y por (3, 6), por lo que su pendiente será 1.
La respuesta correcta es la D.

Encuentra el error

99. **Andrea ha realizado uno de los ejercicios propuestos por su profesor:**
Calcula la recta que tiene como vector normal $\vec{u} = (5, -2)$ y que pasa por el punto $A(-2, 4)$.

Esta es su respuesta: $2x + 5y + k = 0 \Rightarrow -4 + 20 + k = 0 \Rightarrow k = -16$. La recta es $2x + 5y = 16$.

¿Dónde está el error?

Andrea ha confundido el vector normal de la recta con el vector director de la misma.
Si una recta tiene vector normal (5, –2) entonces la recta es de la forma $5x - 2y + k = 0$.
Como la recta pasa por el punto (–2, 4) entonces $5 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 + k = 0 \Rightarrow k = 18$.
La recta es $5x - 2y + 18 = 0$.

PONTE A PRUEBA

Situación del punto limpio

Actividad resuelta.

Superficie de un huerto

Un huerto de hortalizas tiene forma de triángulo y quiere conocerse su área. Los vértices están situados en los puntos *O*(0, 0), *A*(5, 0) y *B*(6, 5).

1. **La distancia menor entre sus vértices es:**

A. ***d*(*O*, *A*)** **B.** ***d*(*O*, *B*)** **C.** ***d*(*A*, *B*)** **D.** **Ninguna**

$d(O, A) = \sqrt{(5-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{25} = 5$, $d(O, B) = \sqrt{(6-0)^2+(5-0)^2} = \sqrt{61}$ y $d(A, B) = \sqrt{(6-5)^2+(5-0)^2} = \sqrt{26}$

La respuesta correcta es la A.

2. **Halla la ecuación de la perpendicular *r* al eje *X* que pasa por *B*.**

Como la recta *r* es perpendicular al eje *X* es de la forma $x = k$. Como pasa por *B*, entonces $x = 6$.

3. **¿Cuáles son las coordenadas del punto *H* donde *r* corta al eje *X*?**

Las coordenadas del punto *H* son (6, 0).

4. **¿Cuál es la distancia que separa a *B* de *H*?**

A. **3 u** **B.** **4 u** **C.** **5 u** **D.** **6 u**

$d\,(B, H) = \sqrt{(6-6)^2+(5-0)^2} = \sqrt{25} = 5\text{ u}$

La respuesta correcta es la C.

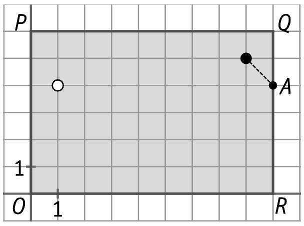
5. **Calcula el área del huerto.**

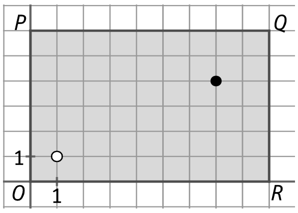
$$A = \frac{d(O,A)\cdot d(\mathrm{B,H})}{2} = \frac{5\cdot 5}{2} = 12{,}5\text{ u}^2$$

La trayectoria adecuada

Cualquier jugador de billar debe recordar el principio de reflexión: cuando una bola golpea un lado de la mesa, el ángulo que forma su trayectoria con el lado al llegar es igual al ángulo que forma con él al rebotar.

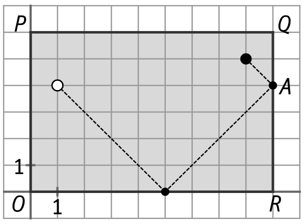
Observa estas dos situaciones:

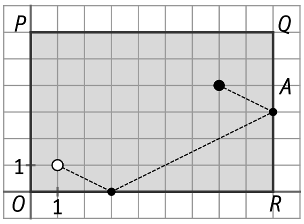




El objetivo es golpear la bola negra y lograr que choque con la bola blanca, pero rebotando previamente en los lados *QR* y *RO* de la mesa de billar. Por ejemplo, se ha marcado el punto *A* que es donde la bola negra debe rebotar en el lado *QR*.

1. **Utiliza el sistema de referencia para calcular la trayectoria adecuada a cada situación.**





2. **Indica las coordenadas de los puntos de rebote y los ángulos correspondientes en cada caso.**

1ª situación: *A*(9, 4) y *B*(5, 0)

Ángulo en *QR*: $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR}\right) = \dfrac{-4\cdot 0 + 4\cdot 4}{4\sqrt{32}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45^{\circ}$

Ángulo en *OR*: $\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR}\right) = \dfrac{4\cdot 4 + 4\cdot 0}{4\sqrt{32}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45^{\circ}$

2ª situación: *A*(9, 3) y *B*(3, 0)

Ángulo en *QR*: $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR}\right) = \dfrac{-6\cdot 0 + (-3)\cdot(-3)}{3\sqrt{45}} = \dfrac{9}{3\sqrt{45}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} = 0{,}4472 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}4472 = 63^{\circ}\ 26'\ 9''$

Ángulo en *OR*: $\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR}\right) = \dfrac{6\cdot 6 + 3\cdot 0}{6\sqrt{45}} = \dfrac{36}{6\sqrt{45}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} = 0{,}8944 \Rightarrow \beta = \arccos 0{,}8944 = 26^{\circ}\ 34'\ 7''$

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula el vector resultante en cada caso.

a) 3 · (6, 2) + (5, –4) – 6 · (2, 1)

b) 5 · [(7, –2) + (–8, 1)]

c) (2, 3) – [(6, 1) – 4 · (–3, –2)]

a) 3 · (6, 2) + (5, –4) – 6 · (2, 1) = (18, 6) + (5, –4) – (12, 6) = (11, –4)

b) 5 · [(7, –2) + (–8, 1)] = 5 · (–1, –1) = (–5, –5)

c) (2, 3) – [(6, 1) – 4 · (–3, –2)] = (2, 3) – [(6, 1) – (–12, –8)] = (2, 3) – (18, 9) = (–16, –6)

2. Calcula las coordenadas del extremo *Q* en los siguientes casos.

a) El vector $\overrightarrow{PQ}$ es (5, 3) y *P*(–1, 2).

b) El vector $\overrightarrow{PQ}$ es (–2, 6) y *P*(–2, –4).

a) *Q* = (–1, 2) + (5, 3) = (4, 5)

b) *Q* = (–2, –4) + (–2, 6) = (–4, 2)

3. Estudia si son perpendiculares los vectores e indica el ángulo que forman.

a) $\vec{u}$ = (–2, 8) y $\vec{v}$ = (4, 1).

b) $\vec{u}$ = (–3, 7) y $\vec{v}$ = (2, –1).

c) $\vec{u}$ = (–1, 6) y $\vec{v}$ = (3, 1).

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\cdot 4 + 8\cdot 1 = -8 + 8 = 0 \Rightarrow$ Los vectores son perpendiculares y, por tanto, forman un ángulo de 90º.

b) $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{-3\cdot 2 + 7\cdot(-1)}{\sqrt{(-3)^2+7^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \dfrac{-13}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{5}} = -0{,}7634 \Rightarrow \alpha = \text{arccos } -0{,}7634 = 139º\ 45'\ 53''$

c) $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{-1\cdot 3 + 6\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2+6^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{10}} = 0{,}1559 \Rightarrow \alpha = \text{arccos } 0{,}1559 = 81º\ 1'\ 52''$

4. Comprueba si las siguientes rectas pasan por el punto (3, –3).

a) 6*x* – 4*y* = 6

b) $\begin{cases} x = 9 + 2t \\ y = -4 - \dfrac{1}{3}t \end{cases}$

Escribe un vector de dirección y otro normal de cada una de las dos rectas.

a) 6 · 3 – 4 · (–3) = 18 + 12 = 30 ≠ 6 ⇒ La recta no pasa por el punto (3, –3).

Un vector de dirección de la recta es $\vec{v}$ = (4, 6) y otro normal $\vec{n}$ = (6, –4).

b) La recta pasa por el punto porque si *t* = –3 ⇒ *x* = 3 e *y* = –3.

Un vector de dirección de la recta es $\vec{v} = \left(2, \dfrac{-1}{3}\right)$ y otro normal $\vec{n} = \left(\dfrac{1}{3}, 2\right)$.

5. Escribe todas las formas posibles de la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(9, 4) y *B*(8, 1).

La recta pasa por *A*(9, 4) y *B*(8, 1). Por tanto, un vector director es $\vec{v}$ (1, 3).

Ecuación vectorial: (*x*, *y*) = (9, 4) + *t*(1, 3)

Ecuación general: 3*x* – *y* – 23 = 0

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 9 + t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

Ecuación explícita: *y* = 3x – 23

Ecuación continua: $\dfrac{x-9}{1} = \dfrac{y-4}{3}$

Ecuación punto – pendiente: *y* – 4 = 3(*x* – 9)

6. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el origen de coordenadas y:

a) Es paralela a la recta *r*: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$

b) Es perpendicular a la recta *s*: –2x + 4y – $\frac{3}{5}$ = 0

a) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x + 1 \\ t = \dfrac{y-3}{5} \end{cases} \Rightarrow x + 1 = \dfrac{y-3}{5} \Rightarrow 5x + 5 = y - 3 \Rightarrow 5x - y + 8 = 0$

Las rectas paralelas a *r*: $5x - y + 8 = 0$ son de la forma $5x - y + k = 0$.

Como la recta pasa por el origen de coordenadas, entonces $5 \cdot 0 - 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0$.

La ecuación de la recta es: $5x - y = 0$

b) Las rectas perpendiculares a *s*: $-2x + 4y - \frac{3}{5} = 0$ son de la forma $4x + 2y + k = 0$.

Como la recta pasa por el origen de coordenadas, entonces $4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0$.

La ecuación de la recta perpendicular a *s* pasando por el origen de coordenadas es: $4x + 2y = 0$

7. Estudia la posición relativa de las rectas:

a) *r*: 3*x* – *y* + 6 = 0 y *s*: 3*x* – 4*y* + 2 = 0

b) *r*: 4*x* + 6*y* + 12 = 0 y *s*: 2*x* + 3*y* + 9 = 0

En el caso de que sean secantes, indica las coordenadas de su punto de intersección.

a) $\frac{3}{3} \neq \frac{-1}{-4} \Rightarrow$ Las rectas son secantes.

Para calcular el punto de corte *P* se resuelve el sistema:

$\begin{cases} 3x - y + 6 = 0 \\ 3x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 6 = 0 \\ -3x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y + 4 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-4}{3} \Rightarrow x = \dfrac{-22}{9} \Rightarrow$ El punto de corte es $P\left(\dfrac{-22}{9}, \dfrac{-4}{3}\right)$.

d) $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} \neq \frac{12}{9} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

8. Dado el triángulo de vértices conocidos *A*(5, –9), *B*(–2, –1) y *C*(7, 2):

a) Calcula las coordenadas de los puntos medios de sus lados.

b) Halla la medida de sus lados y del ángulo $\hat{A}$.

c) Calcula la ecuación de la mediana que parte del vértice $\hat{A}$.

a) Llamamos *M* al punto medio de *AB*, *N* al punto medio de *BC* y *P* al punto medio de *AC*.

$M\left(\dfrac{5-2}{2}, \dfrac{-9-1}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, -5\right)$, $N\left(\dfrac{-2+7}{2}, \dfrac{-1+2}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ y $P\left(\dfrac{5+7}{2}, \dfrac{-9+2}{2}\right) = \left(6, \dfrac{-7}{2}\right)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-7, 8)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 11)$ y $\overrightarrow{BC} = (9, 3)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 8^2} = \sqrt{113}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125}$ y $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{-7 \cdot 2 + 8 \cdot 11}{\sqrt{(-7)^2 + 8^2} \cdot \sqrt{2^2 + 11^2}} = \dfrac{74}{\sqrt{113} \cdot \sqrt{125}} = 0{,}6226 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}6226 = 51^\circ\ 29'\ 38''$

c) La mediana, m_{AN}, es la recta que pasa por *A* y por el punto medio, *N*, del lado *BC*.

m_{AN}: $\dfrac{x-5}{5-\frac{5}{2}} = \dfrac{y+9}{-9-\frac{1}{2}} \Rightarrow \dfrac{x-5}{\frac{5}{2}} = \dfrac{y+9}{\frac{-19}{2}} \Rightarrow -19x + 95 = 5y + 45 \Rightarrow 19x + 5y = 50$