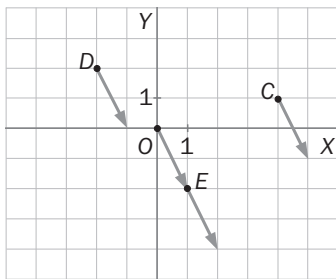
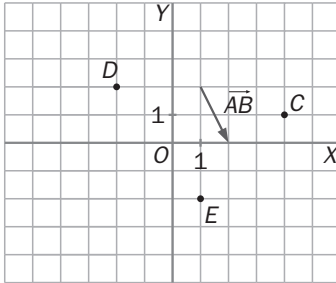
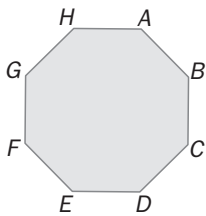


EJERCICIOS PROPUESTOS

9.1 Dibuja cuatro vectores equipolentes al vector  $\overrightarrow{AB}$  de la figura que tengan sus orígenes en los puntos  $O$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$ .



9.2 En la figura siguiente, identifica todos los vectores equipolentes entre sí, cuyos extremos son vértices consecutivos.

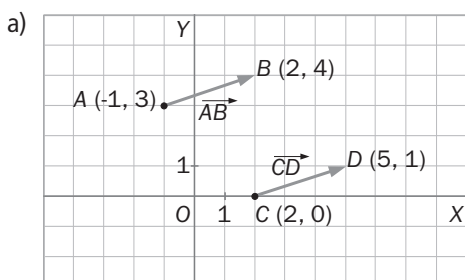


Son equipolentes:  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{FE}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{GF}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  y  $\overrightarrow{HG}$ ,  $\overrightarrow{DE}$  y  $\overrightarrow{AH}$ ,  $\overrightarrow{EF}$  y  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{FG}$  y  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{GH}$  y  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{HA}$  y  $\overrightarrow{ED}$ .

9.3 Dados los puntos  $A(-1, 3)$ ;  $B(2, 4)$ ;  $C(2, 0)$ , y  $D(5, 1)$ :

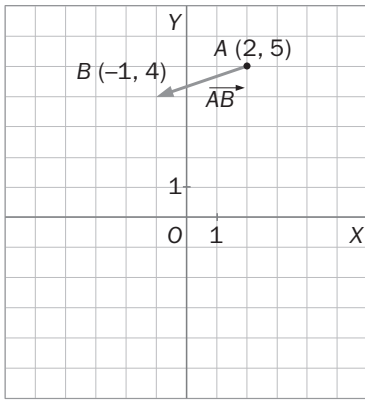
a) Representa los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$ .

b) ¿Son equipolentes  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$ ?



b) Sí que son equipolentes porque tienen igual longitud, dirección y sentido.

9.4 Representa el vector  $\overrightarrow{AB}$  siendo  $A(2, 5)$  y  $B(-1, 4)$ , y halla sus coordenadas y su módulo.



Coordenadas:  $(-1, 4) - (2, 5) = (-3, -1)$

Módulo:  $|\overrightarrow{AB}| = +\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$  unidades

9.5 Calcula el módulo y el argumento de los vectores  $\vec{u} = (2, -3)$ ,  $\vec{v} = (-1, 1)$  y  $\vec{w} = (-1, -2)$ .

$|\vec{u}| = +\sqrt{2^2 + (-3)^2} = +\sqrt{13}$  unidades

Argumento de  $\vec{u}$ :  $\text{tg } \alpha = \frac{-3}{2} = -1,5 \Rightarrow \alpha = -56^\circ 19'$  o  $\alpha = 303^\circ 41'$

$|\vec{v}| = +\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = +\sqrt{2}$  unidades

Argumento de  $\vec{v}$ :  $\text{tg } \alpha = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$

$|\vec{w}| = +\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = +\sqrt{5}$  unidades

Argumento de  $\vec{w}$ :  $\text{tg } \alpha = \frac{-2}{-1} = 2 \Rightarrow \alpha = 243^\circ 26' 6''$

9.6 Dados  $\vec{u} = (-1, 2)$  y  $\vec{v} = (3, 1)$ , calcula:

a)  $\vec{u} + \vec{v}$

b)  $-2\vec{u}$

c)  $4\vec{v}$

d)  $-2\vec{u} + 4\vec{v}$

a)  $\vec{u} + \vec{v} = (-1, 2) + (3, 1) = (2, 3)$

b)  $-2\vec{u} = -2 \cdot (-1, 2) = (2, -4)$

c)  $4\vec{v} = 4 \cdot (3, 1) = (12, 4)$

d)  $-2\vec{u} + 4\vec{v} = (2, -4) + (12, 4) = (14, 0)$

9.7 Halla el módulo y el argumento de los vectores  $\vec{a} + \vec{b}$  y  $\vec{a} - \vec{b}$ , siendo  $\vec{a} = (-1, 4)$  y  $\vec{b} = (2, 0)$ .

$\vec{a} + \vec{b} = (-1, 4) + (2, 0) = (1, 4)$

$|\vec{a} + \vec{b}| = +\sqrt{1^2 + 4^2} = +\sqrt{17}$  unidades. Argumento de  $\vec{a} + \vec{b}$ :  $\text{tg } \alpha = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow \alpha = 75^\circ 57' 50''$

$\vec{a} - \vec{b} = (-1, 4) - (2, 0) = (-3, 4)$

$|\vec{a} - \vec{b}| = +\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$  unidades. Argumento de  $\vec{a} - \vec{b}$ :  $\text{tg } \alpha = \frac{-4}{-3} = 1,33 \Rightarrow \alpha = 53^\circ 7' 48''$

9.8 Los vértices de un cuadrilátero son  $A(3, 7)$ ;  $B(7, 2)$ ;  $C(5, -4)$ , y  $D(-4, 5)$ .

Calcula la medida de los lados.

Halla el punto medio de cada lado.

$$\begin{aligned} \text{a) } \overline{AB} &= (7, 2) - (3, 7) = (4, -5) \Rightarrow d(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41} \text{ unidades} \\ \overline{BC} &= (5, -4) - (7, 2) = (-2, -6) \Rightarrow d(B, C) = |\overline{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ unidades} \\ \overline{CD} &= (5, -4) - (-4, 5) = (9, -9) \Rightarrow d(C, D) = |\overline{CD}| = \sqrt{9^2 + (-9)^2} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \text{ unidades} \\ \overline{DA} &= (-4, 5) - (3, 7) = (-7, -2) \Rightarrow d(D, A) = |\overline{DA}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{53} \text{ unidades} \\ \text{b) } M_{AB} &= \left(\frac{7+3}{2}, \frac{2+7}{2}\right) = \left(5, \frac{9}{2}\right) \\ N_{BC} &= \left(\frac{5+7}{2}, \frac{-4+2}{2}\right) = (6, -1) \\ P_{CD} &= \left(\frac{5-4}{2}, \frac{-4+5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ Q_{DA} &= \left(\frac{-4+3}{2}, \frac{5+7}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, 6\right) \end{aligned}$$

9.9 Determina los puntos medios de cada lado en el triángulo de vértices  $A(2, 0)$ ;  $B(3, 3)$  y  $C(1, 2)$ , y calcula la distancia de cada punto medio al vértice opuesto del triángulo.

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \left(\frac{2+3}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ N_{BC} &= \left(\frac{3+1}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(2, \frac{5}{2}\right) \\ P_{CA} &= \left(\frac{1+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1\right) \\ \overline{M_{AB}C} &= (1, 2) - \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow d(M_{AB}, C) = |\overline{M_{AB}C}| = \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ unidades} \\ \overline{N_{BC}A} &= (2, 0) - \left(2, \frac{5}{2}\right) = \left(0, \frac{-5}{2}\right) \Rightarrow d(N_{BC}, A) = |\overline{N_{BC}A}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \text{ unidades} \\ \overline{P_{CA}B} &= (3, 3) - \left(\frac{3}{2}, 1\right) = \left(\frac{3}{2}, 2\right) \Rightarrow d(P_{CA}, B) = |\overline{P_{CA}B}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2} \text{ unidades} \end{aligned}$$

9.10 Calcula las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas:

a) Paralela a  $\vec{u} = (-1, -2)$  y que pasa por  $A(3, 0)$ .

b) Paralela a  $\vec{u} = (2, -5)$  y que pasa por  $A(-2, 4)$ .

a) La recta pasa por el punto  $A(3, 0)$  y lleva la dirección del vector  $\vec{u} = (-1, -2)$ . Si  $P(x, y)$  es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión  $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$ , resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (3, 0) + t(-1, -2)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (3, 0) + (-t, -2t) = (3 - t, -2t) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbf{R}$$

- b) La recta pasa por el punto  $A(-2, 4)$  y lleva la dirección del vector  $\vec{u} = (2, -5)$ . Si  $P(x, y)$  es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión  $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$ , resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (-2, 4) + t(2, -5)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (-2, 4) + (2t, -5t) = (-2 + 2t, 4 - 5t) \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 5t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbf{R}$$

**9.11 Halla dos puntos y un vector director de la recta de ecuaciones paramétricas son:**  $\begin{cases} x = -3t \\ y = 2 + t \end{cases}$

Puntos:

- Para  $t = 0 \Rightarrow A(0, 2)$
- Para  $t = 1 \Rightarrow B(-3, 3)$

Vector director:  $\vec{u} = (-3, 1)$

**9.12 Halla la ecuación de las siguientes rectas en forma paramétrica, continua y general.**

**a) Recta que pasa por el punto  $A(-1, 2)$  y tiene la dirección del vector  $\vec{u} = (-3, 7)$ .**

**b) Recta que pasa por  $A(3, -3)$  y tiene por vector director  $\vec{u} = (-1, 1)$ .**

- a) Si  $P(x, y)$  es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión  $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$ , resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (-1, 2) + t(-3, 7)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (-1, 2) + (-3t, 7t) = (-1 - 3t, 2 + 7t) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 7t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbf{R}$$

Despejando  $t$  en cada ecuación e igualando, se llega a la ecuación continua:

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{-1 - x}{3} \\ t = \frac{y - 2}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1 - x}{3} = \frac{y - 2}{7}$$

Por último, operando en la ecuación continua se obtiene la ecuación general:

$$-7 - 7x = 3y - 6 \Rightarrow 7x + 3y + 1 = 0$$

- b) Si  $P(x, y)$  es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión  $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$ , resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (3, -3) + t(-1, 1)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (3, -3) + (-t, t) = (3 - t, -3 + t) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -3 + t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbf{R}$$

Despejando  $t$  en cada ecuación e igualando, se llega a la ecuación continua:

$$\left. \begin{array}{l} t = -x + 3 \\ t = y + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow -x + 3 = y + 3$$

Por último, despejando en la ecuación continua se obtiene la ecuación general:

$$x + y = 0$$

**9.13** Calcula las ecuaciones paramétricas, continua y general de la recta que pasa por los puntos  $A(-2, 0)$  y  $B(3, 1)$ .

Primero se determina un vector director,  $\vec{u}$ , a partir de las coordenadas de  $A$  y de  $B$ .

$$\vec{u} = (3, 1) - (-2, 0) = (5, 1)$$

Si  $P(x, y)$  es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión  $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$ , resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (3, 1) + t(5, 1)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (3, 1) + (5t, t) = (3 + 5t, 1 + t) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 1 + t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbf{R}$$

Despejando  $t$  en cada ecuación e igualando, se llega a la ecuación continua:

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{x-3}{5} \\ t = y-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x-3}{5} = y-1$$

Por último, despejando en la ecuación continua se obtiene la ecuación general:

$$x-3 = 5y-5 \Rightarrow x-5y+2 = 0$$

**9.14** Determina, en sus formas paramétricas, continua y general, la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(2, -1)$  y  $B(2, 1)$ .

Primero se determina un vector director,  $\vec{u}$ , a partir de las coordenadas de  $A$  y de  $B$ .

$$\vec{u} = (2, 1) - (2, -1) = (0, 2)$$

Si  $P(x, y)$  es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión  $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$ , resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (2, 1) + t(0, 2)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (2, 1) + (0, 2t) = (2, 1 + 2t) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbf{R}$$

Como  $x = 2$ , la recta es paralela al eje  $OY$ . La ecuación continua no se puede hallar y la general es  $x - 2 = 0$ .

**9.15** Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto  $A(-4, 2)$  y tiene pendiente  $m = 3$ .

A partir de la ecuación punto-pendiente de la recta,  $y - 2 = 3 \cdot (x + 4)$ , se obtiene la ecuación explícita:  $y = 3x + 14$ .

**9.16** Estudia la posición relativa de las rectas:

a)  $r \equiv 3x + 2y - 7 = 0$      $s \equiv 2x - y = 0$

b)  $r' \equiv x - 2y - 3 = 0$      $s' \equiv 3x - 6y + 4 = 0$

a) Se comparan las ecuaciones generales de las dos rectas:  $\frac{2}{2} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow$  las rectas son secantes.

b) Se comparan las ecuaciones generales de las dos rectas:  $\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} \neq \frac{-3}{4} \Rightarrow$  las rectas son paralelas.

9.17 Ahora, los cuatro se colocan alrededor de una mesa con forma de hexágono regular, ocupando los cuatro lados consecutivos. ¿Dónde acabará la caja?

La figura ilustra la situación.

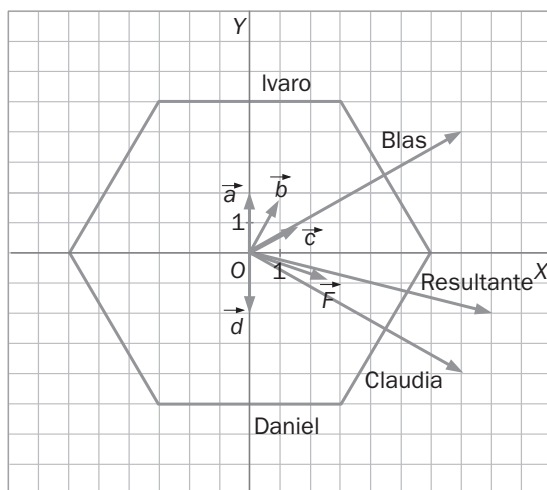
$$\vec{a} = (0, 2)$$

$$\vec{b} = (1, \sqrt{3})$$

$$\vec{c} = \left(\frac{3}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\vec{d} = (0, -2)$$

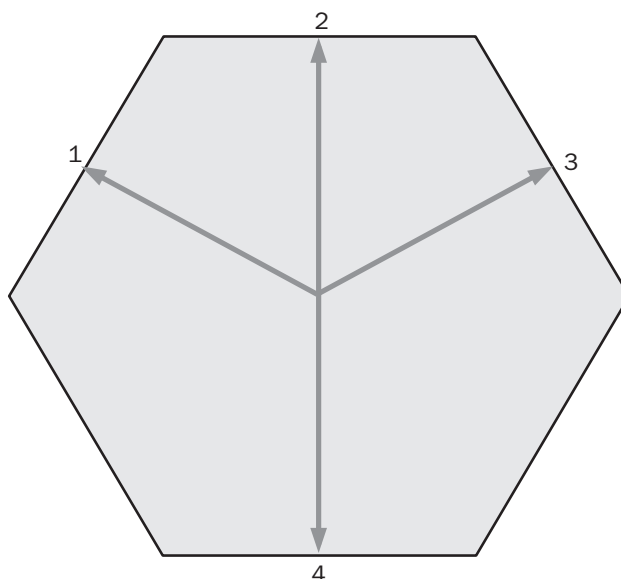
$$\vec{F} = \left(\frac{5}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$



Las fuerzas de Álvaro y Daniel se compensan. Como Blas tira con menos fuerza, la caja acabará en el lado de Claudia.

9.18 En la misma mesa hexagonal se colocan cuatro personas con la misma fuerza, tres en lados consecutivos y otro que deja uno libre a cada lado. ¿Hacia dónde irá la caja?

La figura ilustra la situación.



Las fuerzas de la segunda y de la cuarta persona se compensan.

La resultante es la suma de los vectores correspondientes a las otras dos, que coincide con el vector que va hacia la segunda persona.

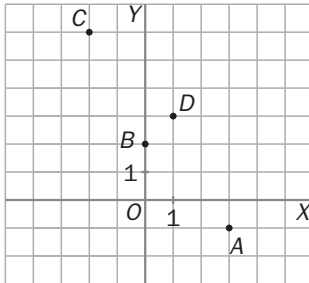
Por tanto, la caja irá hacia la segunda persona.

## ACTIVIDADES

### EJERCICIOS PARA ENTRETENERSE

#### Vectores en el plano

9.19 Calcula las coordenadas de los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$ . ¿Qué relación existe entre ellos?

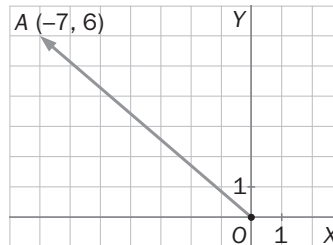


$$\overrightarrow{AB} = (0, 2) - (3, -1) = (-3, 3)$$

$$\overrightarrow{CD} = (1, 3) - (-2, 6) = (3, -3)$$

Por tanto, son vectores opuestos.

9.20 Representa el vector de posición del punto  $A(-7, 6)$ . ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?



Las coordenadas de  $\overrightarrow{OA}$  son las mismas que las de  $A(-7, 6)$ .

9.21 Las coordenadas del vector  $\overrightarrow{AB}$  son  $(5, 3)$ . Siendo  $B(-1, 4)$ , calcula las coordenadas del punto  $A$ .

Sea  $A(a_1, a_2)$ . Entonces:

$$\overrightarrow{AB} = (5, 3) = (-1, 4) - (a_1, a_2) \Rightarrow (a_1, a_2) = (-1, 4) - (5, 3) = (-6, 1)$$

Por tanto,  $A(-6, 1)$

9.22 Calcula el módulo y el argumento de los vectores:

a)  $\vec{u} = (4, 4)$

b)  $\vec{v} = (-1, \sqrt{3})$

c)  $\vec{w} = (-2, 2)$

a)  $|\vec{u}| = +\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$  unidades

Argumento de  $\vec{u}$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

b)  $|\vec{v}| = +\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = +\sqrt{4} = 2$

Argumento de  $\vec{v}$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

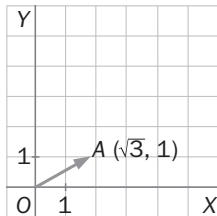
c)  $|\vec{w}| = +\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$  unidades

Argumento de  $\vec{w}$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \alpha = -45^\circ$

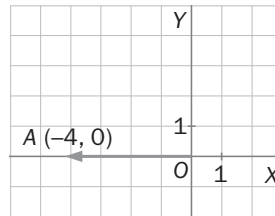
9.23 Para cada caso, dibuja un vector:

- a) De módulo 2 y argumento  $30^\circ$   
 b) De módulo 4 y argumento  $180^\circ$   
 c) De módulo 1 y argumento  $225^\circ$

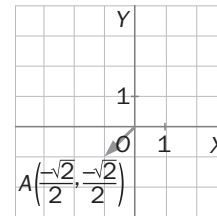
a)  $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$



b)  $\vec{v} = (-4, 0)$



c)  $\vec{w} = \left( \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right)$



9.24 Calcula las coordenadas de un vector cuyo módulo sea igual a 1 y que tenga la misma dirección que  $\vec{u} = (5, 12)$ .

$$|\vec{u}| = \sqrt{25 + 144} = 13$$

El vector buscado es  $\vec{v} = \left( \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right)$ .

### Operaciones con vectores

9.25 Opera:

a)  $(2, -1) - (4, 3)$

b)  $6(-3, 1) + (10, -2)$

c)  $2(-4, 0) - 3(-1, 2)$

a)  $(2, -1) - (4, 3) = (-2, -4)$

b)  $6(-3, 1) + (10, -2) = (-8, 4)$

c)  $2(-4, 0) - 3(-1, 2) = (-5, -6)$

d)  $4(1, -1) + 2(3, 0) = (10, -4)$

e)  $(3, -1) - 5(1, -2) = (-2, 9)$

f)  $(9, 6) - 2 \cdot (4, 1) = (1, 4)$

d)  $4(1, -1) + 2(3, 0)$

e)  $(3, -1) - 5(1, -2)$

f)  $(9, 6) - 2(4, 1)$

9.26 Dados los vectores  $\vec{u} = (5, -3)$ ;  $\vec{v} = (-1, 4)$ , y  $\vec{w} = (2, 2)$ , calcula:

a)  $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w})$

b)  $3\vec{u} - 2(\vec{w} - \vec{v})$

c)  $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$

d)  $5\vec{w} - 3\vec{v} + \vec{u}$

e)  $2(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u}$

f)  $\frac{3}{4}\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

a)  $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = (5, -3) - [(-1, 4) + (2, 2)] = (5, -3) - (1, 6) = (4, -9)$

b)  $3\vec{u} - 2(\vec{w} - \vec{v}) = 3 \cdot (5, -3) - 2 \cdot [(2, 2) - (-1, 4)] = (15, -9) - 2 \cdot (3, -2) = (9, -5)$

c)  $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{2} \cdot [(-1, 4) - (5, -3)] = \left( -3, \frac{7}{2} \right)$

d)  $5\vec{w} - 3\vec{v} + \vec{u} = 5 \cdot (2, 2) - 3 \cdot (-1, 4) + (5, -3) = (10, 10) - (-3, 12) + (5, -3) = (18, -5)$

e)  $2(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u} = 2 \cdot [(2, 2) + (-1, 4)] - (5, -3) = 2 \cdot (1, 6) - (5, -3) = (-3, 15)$

f)  $\frac{3}{4}\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} = \frac{3}{4} \cdot (5, -3) - 2 \cdot (-1, 4) + (2, 2) = \left( \frac{15}{4}, \frac{-9}{4} \right) - (-2, 8) + (2, 2) = \left( \frac{15}{4}, \frac{-9}{4} \right) + (4, -6) = \left( \frac{31}{4}, \frac{-33}{4} \right)$



9.27 Calcula el valor de  $x$  e  $y$  en estas igualdades:

a)  $(5, -9) = 3(x, y) - 2(x, 0)$

b)  $(x, -4) = 2(y, 5) + (3, x)$

c)  $(2y, 0) = (x, y) - 2(x, 5)$

d)  $(3x, -y) = 2(1, -x) + (y, 9)$

a)  $(5, -9) = 3(x, y) - 2(x, 0) \Rightarrow \begin{cases} 5 = 3x - 2x \\ -9 = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$

b)  $(x, -4) = 2(y, 5) + (3, x) \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ -4 = 10 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-17}{2} \\ x = -14 \end{cases}$

c)  $(2y, 0) = (x, y) - 2(x, 5) \Rightarrow \begin{cases} 2y = x - 2x \\ 0 = y - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -20 \\ y = 10 \end{cases}$

d)  $(3x, -y) = 2(1, -x) + (y, 9) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 + y \\ -y = -2x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = -23 \end{cases}$

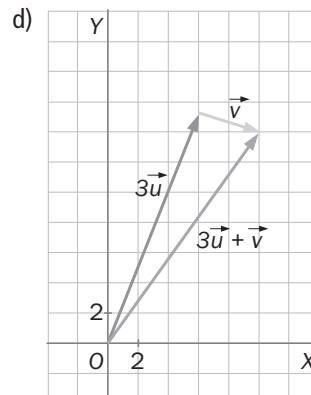
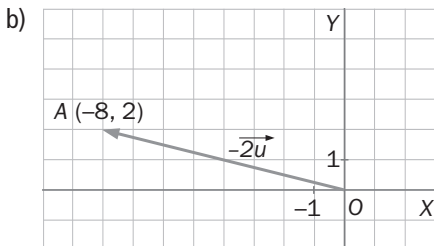
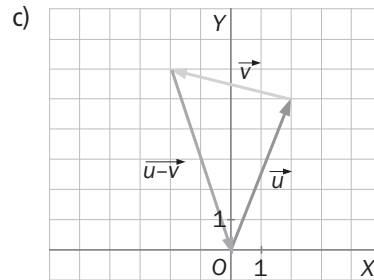
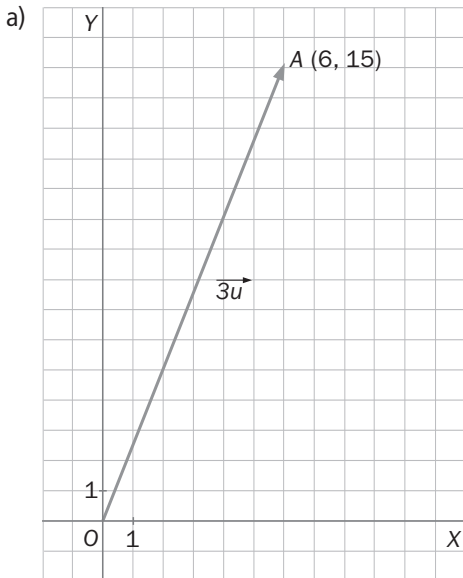
9.28 Dibuja los vectores  $\vec{u}(2, 5)$  y  $\vec{v}(4, -1)$  y, a partir de ellos, calcula gráficamente:

a)  $3\vec{u}$

c)  $\vec{u} - \vec{v}$

b)  $-2\vec{v}$

d)  $3\vec{u} + \vec{v}$



## Distancia entre dos puntos. Punto medio

9.29 **Calcula la distancia entre los puntos:**

a)  $A(3, 1)$  y  $B(2, 6)$

b)  $A(-2, 9)$  y  $B(-1, 7)$

c)  $A(-4, -2)$  y  $B(-1, -5)$

d)  $A(0, 7)$  y  $B(-4, 0)$

a)  $d(A, B) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$  unidades

b)  $d(A, B) = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (7 - 9)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$  unidades

c)  $d(A, B) = \sqrt{(-1 + 4)^2 + (-5 + 2)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$  unidades

d)  $d(A, B) = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (0 - 7)^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$  unidades

9.30 **Clasifica, en función de las longitudes de sus lados, el triángulo de vértices  $ABC$ .**

a)  $A(1, 1)$ ;  $B(4, 6)$ , y  $C(7, 1)$

b)  $A(-8, 0)$ ;  $B(-1, -5)$ , y  $C(-1, 3)$

a)  $d(A, B) = \sqrt{(6 - 1)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$  unidades

$$d(A, C) = \sqrt{(7 - 1)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{36 + 0} = 6 \text{ unidades}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \text{ unidades}$$

Es un triángulo isósceles porque  $d(A, B) = d(A, C) \neq d(B, C)$ .

b)  $d(A, B) = \sqrt{(-1 + 8)^2 + (-5 - 0)^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$  unidades

$$d(A, C) = \sqrt{(-1 + 8)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} \text{ unidades}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(-1 + 1)^2 + (3 + 5)^2} = \sqrt{0 + 64} = 8 \text{ unidades}$$

Es un triángulo escaleno porque  $d(A, B) \neq d(A, C) \neq d(B, C)$ .

9.31 **Calcula las longitudes de las tres medianas del triángulo de vértices  $A(-2, 2)$ ;  $B(2, -1)$ , y  $C(2, 4)$ .**

$$M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot [(-2, 2) + (2, -1)] = \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow d(C, M_{AB}) = \sqrt{(0 - 2)^2 + \left(\frac{1}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ unidades}$$

$$N_{AC} = \frac{1}{2} \cdot [(2, 4) + (-2, 2)] = (0, 3) \Rightarrow d(B, N_{AC}) = \sqrt{(0 + 2)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ unidades}$$

$$P_{BC} = \frac{1}{2} \cdot [(2, -1) + (2, 4)] = \left(2, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow d(A, P_{BC}) = \sqrt{(2 + 2)^2 + \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ unidades}$$

## Ecuaciones de la recta

9.32 **Determina un punto por el que pase y un vector director de cada una de las rectas.**

a)  $\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 4}{5}$

b)  $4x - y = 0$

c)  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$

d)  $(x, y) = (4, 0) + t(2, -6)$

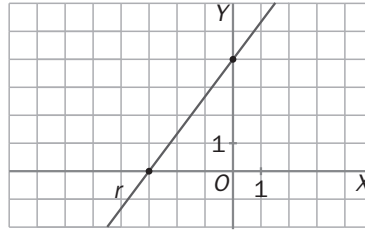
a)  $A(3, -4)$   $\vec{v} = (-2, 5)$

b)  $A(1, 4)$   $\vec{v} = (1, 4)$

c)  $A(2, 5)$   $\vec{v} = (-1, 3)$

d)  $A(4, 0)$   $\vec{v} = (2, -6)$

9.33 Halla todas las formas de la ecuación de la recta de la figura.



Un vector director es  $\overline{AB} = (-3, -4)$ .

Ecuación vectorial:  $(x, y) = (0, 4) + t(-3, -4)$

Ecuaciones paramétricas:  $x = -3t$   
 $y = 4 - 4t$

Ecuación continua:  $\frac{x}{-3} = \frac{y - 4}{-4}$

Ecuación general:  $4x - 3y + 12 = 0$

Ecuación explícita:  $y = \frac{4}{3}x + 4$

Ecuación punto-pendiente:  $y - 4 = \frac{4}{3}(x - 0)$

9.34 Halla la pendiente y la ordenada en el origen de la recta  $3x + 2y - 6 = 0$ .

Se despeja la incógnita  $y$ :

$$y = \frac{-3}{2}x + 3$$

Luego  $m = \frac{-3}{2}$ ,  $n = 3$

9.35 Escribe la ecuación general de la recta que pasa por los puntos  $A(5, 0)$  y  $B(0, 2)$ .

Primero se determina un vector director,  $\vec{u}$ , a partir de las coordenadas de  $A$  y de  $B$ .

$$\vec{u} = (0, 2) - (5, 0) = (-5, 2)$$

La ecuación continua de la recta es:

$$\frac{x - 5}{-5} = \frac{y}{2}$$

Se despeja en la ecuación continua y se obtiene la ecuación general:

$$-2x + 10 = 5y \Rightarrow 2x + 5y - 10 = 0$$

9.36 Calcula la ecuación de la recta en la forma más conveniente para cada uno de los siguientes casos.

a) Recta  $r$  que pasa por el punto  $(0, -3)$  y tiene pendiente 4.

b) Recta  $s$  que tiene la dirección del vector  $(5, 2)$  y pasa por el punto  $(6, 0)$ .

a) La ecuación punto-pendiente:  $y + 3 = 4x$ .

b) La ecuación continua:  $\frac{x - 6}{5} = \frac{y}{2}$ .

9.37 Escribe la ecuación general de la recta que pasa por el punto  $A(-2, -1)$  y su vector director es equipolente al de la recta  $(x, y) = (1, 3) + t(4, 7)$ .

Un vector director de la recta es  $(4, 7)$ . La ecuación continua de la recta es  $\frac{x + 2}{4} = \frac{y + 1}{7}$ .

La ecuación general es  $7x - 4y + 10 = 0$ .

9.38 Expresa en forma continua y paramétrica la ecuación de la recta  $y = 2x + 1$ .

Un punto de la recta es  $A(0, 1)$ , y un vector director es  $\vec{u} = (1, 2)$ .

La ecuación continua de la recta es  $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2}$ .

La ecuación paramétrica de la recta es  $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases} t \in \mathbf{R}$

9.39 Halla la pendiente y un punto por el que pasa cada una de las siguientes rectas. Representálas gráficamente.

a)  $\frac{x+1}{2} = y$

c)  $5x - 2y + 3 = 0$

b)  $\frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{-4}$

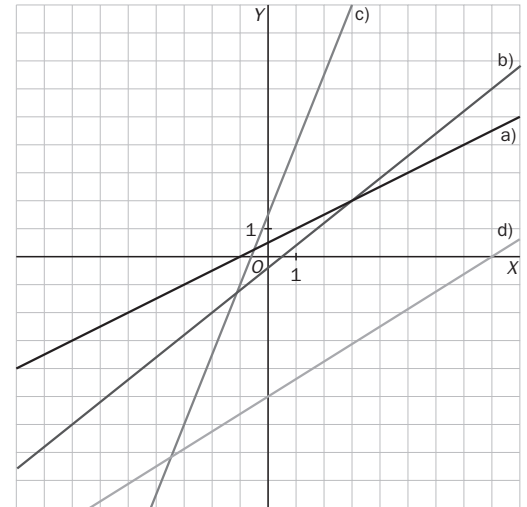
d)  $\frac{x}{8} - \frac{y}{5} = 1$

a)  $A(-1, 0) \quad \vec{v} = (2, 1) \quad m = \frac{1}{2}$

b)  $A(3, 2) \quad \vec{v} = (5, -4) \quad m = \frac{-4}{5}$

c)  $x = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(1, 4)$   
 $\vec{v} = (2, 5) \quad m = \frac{5}{2}$

d)  $A(0, -5) \quad \vec{v} = (8, 5) \quad m = \frac{5}{8}$



9.40 Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto  $A(1, 3)$  y tiene la misma pendiente que la recta  $y = 4x + 9$ .

La pendiente de la recta es 4, y pasa por el punto  $A(1, 3)$ .

La ecuación punto-pendiente es  $y - 3 = 4(x - 1)$ .

9.41 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y, en caso de ser secantes, halla su punto de corte.

a)  $r \equiv 2x - 5y + 7 = 0 \quad s \equiv x - 2y - 2 = 0$     c)  $r \equiv x - 5y + 3 = 0 \quad s \equiv 3x - 15y + 8 = 0$

b)  $r \equiv 6x + 4y - 12 = 0 \quad s \equiv 3x + 2y - 6 = 0$     d)  $r \equiv x + y - 5 = 0 \quad s \equiv 3x - 2y = 0$

a)  $\frac{2}{1} \neq \frac{-5}{-2} \Rightarrow$  Son secantes.

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 7 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x - 5y + 7 = 0 \\ -2x + 4y + 4 = 0 \\ \hline -y + 11 = 0 \Rightarrow y = 11 \\ x = 2 \cdot 11 + 2 = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Punto de corte } (24, 11) \end{array} \right\}$$

b)  $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{-12}{-6} \Rightarrow$  Son coincidentes.

c)  $\frac{1}{3} = \frac{-5}{-15} \neq \frac{3}{8} \Rightarrow$  Son paralelas.

d)  $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{3} \neq \frac{1}{-2} \Rightarrow$  Son secantes.

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x + y - 5 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y - 10 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \\ \hline 5x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ y = 5 - 2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Punto de corte } (2, 3) \end{array} \right\}$$

9.42 Halla el punto de corte de las rectas  $r$  y  $s$ , y, a partir del resultado obtenido, indica la posición relativa de ambas rectas.

a)  $r \equiv 2x - 3y + 2 = 0$

$s \equiv x - y + 1 = 0$

b)  $r \equiv y = x - 3$

$s \equiv 2x - 2y - 6 = 0$

a) 
$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y + 2 &= 0 \\ x - y + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow 2(y - 1) - 3y + 2 = 0 \Rightarrow 2y - 2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -1$$

El punto de corte es  $(-1, 0)$ . Son rectas secantes.

b) 
$$\left. \begin{aligned} y &= x - 3 \\ 2x - 2y - 6 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x - 2(x - 3) - 6 = 0 \Rightarrow 2x - 2x + 6 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Las rectas tienen todos sus puntos comunes. Son rectas coincidentes.

9.43 Determina la posición relativa de las rectas  $r \equiv y = x - 3$  y  $s$ , determinada por los puntos  $A(7, 5)$  y  $B(-4, 1)$ .

La recta  $s$  pasa por el punto  $A(7, 5)$ , y un vector director es  $\vec{u} = (-4, 1) - (7, 5) = (-11, -4)$ . La ecuación en forma continua de la recta  $s$  es:  $\frac{x - 7}{-11} = \frac{y - 5}{-4}$ . Se opera y despeja:  $4x - 11y + 27 = 0$ .

La ecuación  $s$  es:  $-x + y + 3 = 0$ .

Como  $\frac{-1}{4} \neq \frac{1}{-11}$ , son rectas secantes.

9.44 Estudia la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$  sabiendo que  $r$  pasa por el punto  $(3, -6)$  y tiene por vector director  $\vec{u}(-2, -4)$ , y  $s$  pasa por el punto  $(6, 0)$  y su pendiente es 2.

La ecuación continua de la recta  $r$  es:  $\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 6}{-4}$ . Se opera y se despeja:  $2x - y - 12 = 0$ .

La ecuación punto-pendiente de la recta  $s$  es:  $y = 2 \cdot (x - 6)$ . Se opera y se despeja:  $2x - y - 12 = 0$ .

Como  $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} = \frac{-12}{-12}$ , las rectas son coincidentes.

9.45 Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto  $A(-2, 4)$  y es paralela a la que tiene por ecuación  $7x - 14y + 3 = 0$ .

Despejando en la recta  $7x - 14y + 3 = 0$  se obtiene  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{14}$ . La pendiente de esta recta es  $\frac{1}{2}$ .

Como la recta buscada es paralela a la recta  $7x - 14y + 3 = 0$ , tendrá pendiente  $\frac{1}{2}$ . Por tanto, la ecuación punto-pendiente de la nueva recta es  $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 2)$ .

9.46 Halla la ecuación de la recta que pasa por  $A(3, 1)$  y por el punto medio del segmento  $CD$ , siendo  $C(-2, -4)$  y  $D(-1, 6)$ .

El punto medio del segmento  $CD$  es  $M_{cd} = \frac{1}{2} \cdot [(-2 - 1), (-4 + 6)] = \left(\frac{-3}{2}, 1\right)$ .

Un vector director de la recta que pasa por  $A$  y por  $M_{cd}$  es  $\vec{u} = \left(\frac{-3}{2}, 1\right) - (3, 1) = \left(\frac{-9}{2}, 0\right)$ . Como vector de la recta buscada, tomamos uno proporcional a  $\left(\frac{-9}{2}, 0\right)$ . Tomamos como vector director  $(9, 0)$ .

Por tanto, la recta buscada es una recta con vector director  $\vec{u} = (9, 0)$  y que pasa por el punto  $A(3, 1)$ .

La ecuación paramétrica de la recta es 
$$\begin{aligned} x &= 3 + 9t \\ y &= 1 \end{aligned}$$

9.47 Dada la recta  $r: 4x + y - 1 = 0$ , escribe la ecuación de otra recta  $s$ :

a) Paralela a  $r$ .

b) Secante con  $r$ .

a) Por ser paralela a la recta  $r$ , su vector director será proporcional al vector director de  $r$ . Un vector director de la recta  $r$  es  $\vec{u} = (-1, 4)$ . Por tanto, la recta que pasa por un punto cualquiera, por ejemplo,  $(0, 0)$ , y tiene vector director  $\vec{u}$  es paralela a la recta  $r: 4x + y = 0$ .

b) La recta  $r$  pasa por el punto  $A(0, 1)$ . Por tanto, cualquier recta que pase por este punto es secante a  $r$ . Por ejemplo, la recta  $x + y - 1 = 0$ .

9.48 Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de  $r: 8x - 5y + 2 = 0$  y  $s: 2x + y - 4 = 0$ , y por el punto  $A(0, 3)$ .

$$\left. \begin{array}{l} 8x - 5y + 2 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8x - 5y + 2 = 0 \\ 8x + 4y - 16 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1. \text{ El punto de corte es } B(1, 2).$$

Buscamos la ecuación de la recta que pasa por  $A(0, 3)$  y  $B(1, 2)$ .

Primero se determina un vector director,  $\vec{u}$ , a partir de las coordenadas de  $A$  y de  $B$ .

$$\vec{u} = (1, 2) - (0, 3) = (1, -1)$$

La ecuación continua de la recta es  $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1}$ . Operando se obtiene la ecuación general:  $x + y - 3 = 0$ .

9.49 Estudia si las rectas

$$r: 3x + y - 5 = 0$$

$$s: 2x - y = 0$$

$$t: x + 4y - 9 = 0$$

se cortan en un mismo punto  $y$ , en caso afirmativo, calcula sus coordenadas.

Se halla primero el punto de corte de dos de ellas:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y - 5 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

El punto de corte de  $r$  y  $s$  es  $(1, 2)$ .

Ahora se comprueba si ese punto pertenece a  $t$ :  $1 + 4 \cdot 2 - 9 = 0$ .

Por tanto, las tres rectas se cortan en el mismo punto:  $(1, 2)$ .

#### CUESTIONES PARA ACLARARSE

9.50 Siendo  $A(1, 4)$  y  $B(0, 6)$ , ¿será el vector fijo  $\overrightarrow{AB}$  es un representante del vector libre  $\vec{u} = (-1, 2)$ ?

$\overrightarrow{AB} = (0, 6) - (1, 4) = (-1, 2)$ . Sí lo es, porque tienen las mismas coordenadas.

9.51 ¿Son equipolentes dos vectores opuestos? Razona tu respuesta.

No, porque tienen distinto sentido.

9.52 La dirección de una recta es la del vector  $\vec{u} = (4, 2)$ . ¿Puede ser  $\vec{v}(-2, -1)$  un vector director de esa recta?

Sí, porque son vectores proporcionales.

9.53 a) Razona si se puede determinar la ecuación de una recta sabiendo que pasa por el punto  $A(0, 6)$  y que su ordenada en el origen es 6.

b) ¿Y la de una recta que pasa por el punto  $A$  y por el origen de coordenadas?

a) No, porque la ordenada en el origen sea 6 quiere decir que pasa por el punto de primera coordenada 0 y de segunda coordenada 6, que es el punto  $A$ , y, por tanto, solo se sabe un punto de la recta, y para que quede determinada se necesita, al menos, otro punto.

b) En este caso sí es posible determinarla porque se conocen dos puntos por los que pasa.

9.54 La recta  $r$  pasa por  $(5, -1)$  y tiene la dirección del vector  $\vec{u} = (6, 2)$ . La ecuación de la recta  $s$  es  $\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-4}$ . ¿Cuál es la posición relativa de  $r$  y  $s$ ?

La ecuación continua de la recta  $r$  es  $\frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{2}$ . Operando se obtiene la ecuación general  $2x - 6y - 16 = 0$ .

Operando en la ecuación continua de la recta  $s$  se obtiene la ecuación general de la recta  $s$   $4x + 3y - 17 = 0$ .

Como  $\frac{2}{4} \neq \frac{-6}{3}$ , las rectas son secantes.

9.55 Explica cuál puede ser la posición relativa de dos rectas que tienen la misma pendiente.

Si tienen la misma pendiente, pueden ser paralelas (si no tienen ningún punto común) o coincidentes (si tienen todos los puntos comunes).

9.56 Sin realizar cálculos, indica cuáles de los siguientes vectores tienen su argumento comprendido entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$ .

a)  $\vec{u} = (3, -4)$

b)  $\vec{v} = (-1, 9)$

c)  $\vec{w} = (-2, -2)$

Para que su argumento esté comprendido entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$ , la primera coordenada del vector ha de ser negativa, y la segunda, positiva, ya que su representación gráfica debe quedar en el segundo cuadrante.

El único vector es el del apartado b.

9.57 Relaciona en tu cuaderno las rectas dadas por las siguientes ecuaciones con los elementos que les corresponden.

$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-4}$	$n = \frac{5}{8}$
$y + 1 = 3x$	$A(5, 2)$
$3x + 8y - 5 = 0$	$\vec{u} = (1, 5)$
$y = 5x + 4$	$m = 3$

$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-4}$  con  $A(5, 2)$ ,  $y + 1 = 3x$  con  $m = 3$ ,  $3x + 8y - 5 = 0$  con  $n = \frac{5}{8}$  e  $y = 5x + 4$  con  $\vec{u} = (1, 5)$

9.58 ¿Cuál es la posición relativa de dos rectas

a) que tienen la misma dirección y un punto común?

b) con distinta dirección?

c) que en su ecuación punto-pendiente tienen la misma pendiente y el punto distinto?

a) Tienen todos sus puntos comunes. Son coincidentes.

b) Secantes.

c) Si no tienen un punto común y su dirección es la misma, son paralelas.

9.59 Si  $M$  es el punto medio del segmento de extremos  $A$  y  $B$ , ¿cuáles de los siguientes pares de vectores son equipolentes?

a)  $\vec{AB}$  y  $\vec{MB}$

c)  $\vec{AM}$  y  $\vec{BM}$

b)  $\vec{AM}$  y  $\vec{MB}$

d)  $\vec{BM}$  y  $\vec{MA}$

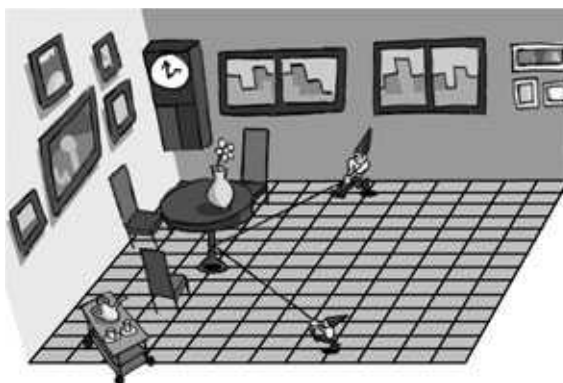
a) No son equipolentes porque no tienen el mismo módulo.

b) Sí son equipolentes: tienen igual dirección, sentido y módulo.

c) No son equipolentes porque tienen distinto sentido.

d) Sí son equipolentes: tienen igual módulo, dirección y sentido.

- 9.60 Para arrastrar una mesa muy pesada de tablero circular y con una pata en el centro, se atan dos cuerdas y se tira de ellas como muestra la figura.



Si se utilizase una única cuerda para obtener el mismo resultado que con las dos anteriores, ¿qué fuerza debería aplicarse?

La fuerza que se ejerce sobre cada una de las cuerdas tiene el mismo módulo, dirección y sentido que los vectores  $\vec{a} = (3, 6)$  y  $\vec{b} = (5, -6)$ .

La cuerda se obtendría como resultado de sumar las otras dos.

$$\vec{a} + \vec{b} = (3, 6) + (5, -6) = (8, 0).$$

- 9.61 Una maqueta de un barco de vela es empujada por la corriente del agua de un estanque que ejerce una fuerza  $f_a = (10, 8)$  (N). A su vez, el viento sopla con una fuerza  $f_v = (-3, -1)$  (N).

¿De qué dirección y sentido es la fuerza resultante? ¿Cuál es su módulo?

El barco se desplaza según el resultado de sumar a la fuerza de la corriente la del viento:

$$(10, 8) + (-3, -1) = (7, 7)$$

El barco se desplaza en el mismo sentido que la fuerza de la corriente.

$$\text{Su módulo es: } \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}.$$

- 9.62 En un radar se observa el vuelo de dos aviones. Uno de ellos se encuentra en el punto de coordenadas  $(5, 3)$  y se desplaza siguiendo la dirección del vector  $\vec{u} = (-4, 7)$ . La trayectoria del segundo queda determinada por la recta de ecuación  $7x + 4y + 83 = 0$ .

Si continuaran su vuelo de forma indefinida, ¿chocarían en algún momento?

$$\text{Trayectoria del primer avión: } \frac{x - 5}{-4} = \frac{y - 3}{7} \Rightarrow 7x + 4y - 47 = 0$$

$$\text{Trayectoria del segundo avión: } 7x + 4y + 83 = 0$$

$$\text{La posición relativa de los dos es: } \frac{7}{7} = \frac{4}{4} \neq \frac{-47}{83}.$$

Las trayectorias son paralelas. Por tanto, no chocarían en ningún momento.

- 9.63 Una cigüeña tiene su nido situado sobre una torre a 50 metros de altura. Ella está sobre el suelo a 100 metros de distancia de la torre.

a) Si subiera hasta el nido en línea recta, ¿cuál sería la ecuación de la trayectoria seguida? ¿Y cuál la pendiente de la misma?

b) ¿A qué distancia del nido se encuentra la cigüeña?

a) La posición del nido respecto a esos ejes es  $(0, 50)$ , y la de la cigüeña sobre el suelo,  $(100, 0)$ .

$$\text{Ecuación de la trayectoria: } \frac{x}{100} = \frac{y - 50}{-50} \Rightarrow m = \frac{-50}{100} = -\frac{1}{2}$$

b) Distancia entre el nido y la cigüeña:  $\sqrt{100^2 + 50^2} = \sqrt{12500} = 50\sqrt{5}$  metros



9.64 Al dibujar una mesa de billar a escala, los vértices de la misma han quedado situados en los puntos de coordenadas  $O(0, 0)$ ;  $A(0, 6)$ , y  $C(12, 0)$ .

a) Halla las coordenadas del cuarto vértice,  $B$ .

b) Si una bola se sitúa en la mitad del lado  $AB$  y se pretende que llegue a la mitad del lado  $BC$ , ¿qué distancia recorrerá?

c) ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria?

a) Como la mesa es rectangular, al situar los puntos en el plano se observa que  $B(12, 6)$ .

b) El punto medio del lado  $AB$  es  $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot [(12, 6) + (0, 6)] = (6, 6)$ .

El punto medio del lado  $BC$  es  $N_{BC} = \frac{1}{2} \cdot [(12, 6) + (12, 0)] = (12, 3)$ .

$d(M_{AB}, N_{BC}) = \sqrt{(12 - 6)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{45}$  unidades recorrerá.

c) El vector director es  $\vec{v} = \overrightarrow{M_{AB}N_{BC}} = (12, 3) - (6, 6) = (6, -3)$ .

La ecuación de la trayectoria es la recta  $x + 2y - 18 = 0$ .

9.65 Para regar los árboles de un jardín se van a colocar unas tuberías que comuniquen unos con otros.

Si dos de esos árboles están situados en puntos de coordenadas  $A(4, 6)$  y  $B(9, 8)$  y otro de ellos en el punto  $C(0, 6)$ , ¿sería posible conseguir que una tubería recta pase por los tres a la vez?

Recta que une los puntos  $A$  y  $B$ :  $\frac{x - 4}{9 - 4} = \frac{y - 6}{8 - 6} \Rightarrow \frac{x - 4}{5} = \frac{y - 6}{2}$ .

Se comprueba si el punto  $C$  pertenece a esa recta:  $\frac{0 - 4}{5} = \frac{6 - 6}{2} \Rightarrow \frac{0 - 4}{5} \neq \frac{6 - 6}{2}$ .

No se podría colocar una tubería recta que pasara por los tres árboles a la vez.

9.66 Un barco lanza un mensaje de socorro. Su posición viene dada por el punto  $A(1460, 765)$ . Dos barcos situados en  $B(3525, 2490)$  y  $C(585, 3500)$  acuden en su ayuda.

Si los dos navegan a la misma velocidad y en línea recta hacia  $A$ , ¿cuál llegará primero?

Llegará primero el que esté más cerca de  $A$ .

$d(A, B) = \sqrt{(3525 - 1460)^2 + (2490 - 765)^2} = \sqrt{7239850} = 2690,70$  unidades

$d(A, C) = \sqrt{(585 - 1460)^2 + (3500 - 765)^2} = \sqrt{8295161} = 2880,13$  unidades

Llegará antes el barco que está en la posición  $B$ .

9.67 Para hacer un túnel, se ha iniciado la excavación desde dos puntos distintos.

Dibujada sobre un papel cuadrículado, una de las máquinas parte del punto  $A(130, 245)$  y sigue la trayectoria determinada por el vector  $(2, -6)$ . La otra ha partido del punto  $B(-70, 1445)$  y ha continuado siguiendo la dirección de una recta de pendiente  $-3$ .

¿Han seguido las dos máquinas la misma dirección? ¿Se juntarán en algún punto intermedio? Determina las coordenadas del punto.

La trayectoria de la primera máquina:  $\frac{x - 130}{2} = \frac{y - 245}{-6} \Rightarrow 3x + y - 635 = 0$

La trayectoria de la segunda máquina:  $y - 1445 = -3 \cdot (x + 70) \Rightarrow 3x + y - 1235 = 0$

La dirección es la misma puesto que las dos tienen la misma pendiente,  $-3$ . No se juntarán puesto que son paralelas.

## REFUERZO

### Vectores en el plano. Operaciones y aplicaciones

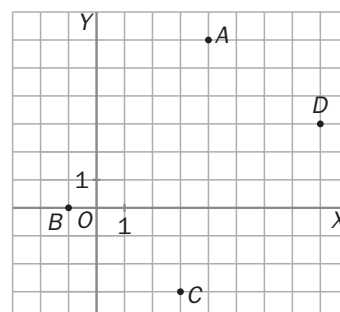
9.68 Dados los puntos  $A, B, C$  y  $D$  de la figura, calcula los vectores  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{AD}$ .

¿Cuáles de ellos son equipolentes?

$A = (4, 6)$ ;  $B = (-1, 0)$ ;  $C = (3, -3)$ ;  $D = (8, 3)$

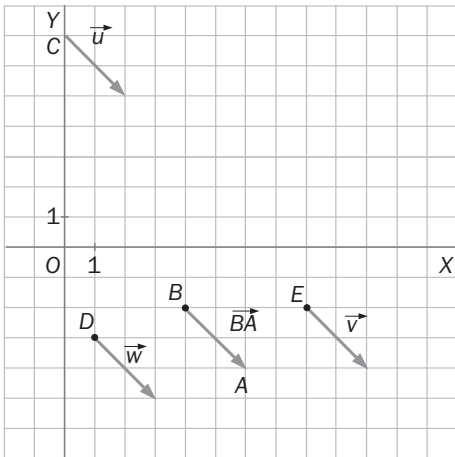
$\overrightarrow{BA} = (5, 6)$   $\overrightarrow{BC} = (4, -3)$   $\overrightarrow{CD} = (5, 6)$   $\overrightarrow{AD} = (4, -3)$

Son equipolentes  $\overrightarrow{BA}$  y  $\overrightarrow{CD}$ , y también  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{AD}$ .



9.69 Dibuja el vector  $\overline{BA}$ , con  $A(6, -4)$ . Dibuja después tres vectores equipolentes a él que tengan su origen en los puntos  $C(0, 7)$ ;  $D(1, -3)$ , y  $E(8, -2)$ .

¿Cuáles son las coordenadas de estos nuevos vectores?



$$\overline{BA} = (6, -4) - (4, -2) = (2, -2)$$

$$\vec{u} = (2, 5) - (0, 7) = (2, -2)$$

$$\vec{w} = (3, -5) - (1, -3) = (2, -2)$$

$$\vec{v} = (10, -4) - (8, -2) = (2, -2)$$

### AMPLIACIÓN

9.70 Halla el módulo y el argumento de:

a)  $\vec{u} = (-9, 6)$

b)  $\vec{v} = (-2, 8)$

c)  $\vec{w} = (-7, -1)$

a)  $|\vec{u}| = +\sqrt{(-9)^2 + 6^2} = +\sqrt{117}$  unidades

Argumento de  $\vec{u}$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{-9} = -1,5 \Rightarrow \alpha = 146^\circ 18' 36''$

b)  $|\vec{v}| = +\sqrt{2^2 + 8^2} = +\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$  unidades

Argumento de  $\vec{v}$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{-2} = -4 \Rightarrow \alpha = 104^\circ 2' 11''$

c)  $|\vec{w}| = +\sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = +\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$  unidades

Argumento de  $\vec{w}$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7} \Rightarrow \alpha = 188^\circ 7' 48''$

9.71 Halla la distancia entre los puntos  $A(4, 9)$  y  $B(-2, 1)$ .

$$d(A, B) = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - 9)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ unidades}$$

9.72 Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos  $A(2, -5)$  y  $B(4, 1)$ .

$$M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot [(2, -5) + (4, 1)] = (3, -2)$$

9.73 Calcula:

a)  $(5, 9) + 2(-4, 8) - (6, 0)$

b)  $3(-4, 7) - (2, 6) + 5(1, -3)$

c)  $(7, 11) - [(4, 9) + (-3, 1)]$

d)  $(-6, 8) + 3[(5, -2) + (4, 7)]$

a)  $(5, 9) + 2(-4, 8) - (6, 0) = (5, 9) + (-8, 16) - (6, 0) = (-9, 25)$

b)  $3(-4, 7) - (2, 6) + 5(1, -3) = (-12, 21) - (2, 6) + (5, -15) = (-9, 0)$

c)  $(7, 11) - [(4, 9) + (-3, 1)] = (7, 11) - (1, 10) = (6, 1)$

d)  $(-6, 8) + 3[(5, -2) + (4, 7)] = (-6, 8) + 3 \cdot (9, 5) = (-6, 8) + (27, 15) = (21, 23)$

9.74 Calcula  $5\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u}$ , siendo  $\vec{u}(8, 3)$ ;  $\vec{v}(-1, -2)$ , y  $\vec{w}(0, 4)$ .

$$5\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u} = 5(-1, -2) - \frac{1}{2}(0, 4) + (8, 3) = (3, -9)$$

### Recta. Posiciones relativas

9.75 Obtén un punto, un vector director y la pendiente de la recta de ecuaciones paramétricas:  $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5t \end{cases}$ .

$$A(-1, 0); \vec{v} = (2, 5); m = \frac{5}{2}$$

9.76 Escribe, en todas las formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por el punto  $A(3, 1)$  y tiene la dirección del vector  $\vec{u} = (5, 2)$ .

$$\text{Vectorial: } (x, y) = (3, 1) + t(5, 2)$$

$$\text{Paramétrica: } \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

$$\text{Continua: } \frac{x - 3}{5} = \frac{y - 1}{2}$$

$$\text{General: } 2x - 5y - 1 = 0$$

$$\text{Punto-pendiente: } y - 1 = \frac{2}{5} \cdot (x - 3)$$

$$\text{Explícita: } y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$$

9.77 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos  $A(-3, 6)$  y  $B(4, 1)$ .

La ecuación continua de la recta es  $\frac{x + 3}{4 + 3} = \frac{y - 6}{1 - 6}$ . Operando y despejando, se obtiene la ecuación general de la recta  $5x + 7y - 27 = 0$ .

9.78 Comprueba si el punto  $B(4, -6)$  pertenece a alguna de estas rectas.

a)  $y = 9 - 3x$

b)  $5x + 3y - 2 = 0$

a)  $-6 = 9 - 3 \cdot 4 \Rightarrow -6 = -3$ . No pertenece.

b)  $5 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ . Sí pertenece.

9.79 ¿Son secantes las rectas  $r: 4x - 5y - 2 = 0$  y  $s: y = 2x - 4$ ? En caso afirmativo, calcula su punto de corte.

Se escribe la recta  $s$  en forma general:  $2x - y - 4 = 0$ .

$\frac{4}{2} \neq \frac{-5}{-1}$ . Por tanto, son secantes.

$$\left. \begin{cases} 4x - 5y - 2 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \right\} \Rightarrow 4x - 5 \cdot (2x - 4) - 2 = 0 \Rightarrow 4x - 10x + 18 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2$$

Se cortan en el punto  $(3, 2)$ .

9.80 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

a)  $r: 4x - 6y + 10 = 0$

b)  $r: 2x + 3y + 6 = 0$

$s: 2x - 3y + 4 = 0$

$s: 6x + 9y + 18 = 0$

a)  $\frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} \neq \frac{10}{4} \Rightarrow$  Son paralelas.

b)  $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18} \Rightarrow$  Son coincidentes.

- 9.81 Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto  $P(0, 2)$  y tiene la misma pendiente que  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3}$ .

¿Cuál es la posición relativa de las dos rectas?

La pendiente de la recta es  $m = \frac{3}{-1} = -3$ . Por tanto, la ecuación de la recta buscada es  $y - 2 = -3x$ .

Como las rectas tienen igual dirección y carecen de puntos comunes, son paralelas.

#### AMPLIACIÓN

- 9.82 Halla  $x$  en el vector  $\vec{u} = (x, 8)$  sabiendo que su módulo es 10.

$$10 = \sqrt{x^2 + 8^2} \Rightarrow x^2 = 100 - 64 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$$

Entonces,  $\vec{u} = (6, 8)$  o  $\vec{u} = (-6, 8)$

- 9.83 Determina, mediante vectores, si el triángulo de vértices  $A(-4, -2)$ ;  $B(0, 1)$ , y  $C(3, 2)$  es rectángulo.

Primero se calculan los vectores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{AC}$  de los lados y sus argumentos:

$$\overrightarrow{AB} = (4, 3) \quad \overrightarrow{BC} = (3, 1) \quad \overrightarrow{AC} = (7, 4)$$

Calculamos los argumentos de los vectores:

$$\text{Argumento de } \overrightarrow{AB}: \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow \alpha = 36^\circ 52' 12''$$

$$\text{Argumento de } \overrightarrow{BC}: \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18^\circ 26' 6''$$

$$\text{Argumento de } \overrightarrow{AC}: \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{7} \Rightarrow \alpha = 29^\circ 44' 42''$$

El ángulo en el vértice  $A$  es la diferencia entre el argumento del vector  $\overrightarrow{AB}$  y el de  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\widehat{A} = 36^\circ 52' 12'' - 29^\circ 44' 42'' = 7^\circ 7' 30''$$

El ángulo en el vértice  $B$  es el suplementario de la diferencia entre el argumento del vector  $AB$  y el del vector  $BC$ :

$$\widehat{B} = 180^\circ - 36^\circ 52' 12'' - 18^\circ 26' 6'' = 124^\circ 41' 42''$$

Para hallar el ángulo en el vértice  $C$ , solo hay que restar a  $180^\circ$  los otros dos ángulos:

$$\widehat{C} = 180^\circ - 7^\circ 7' 30'' - 124^\circ 41' 42'' = 48^\circ 10' 48''$$

Como no hay ningún ángulo recto, el triángulo no es rectángulo.

- 9.84 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto  $P(5, -4)$  y forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje de abscisas.

La pendiente es  $m = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Por tanto, la ecuación punto-pendiente es  $y + 4 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 5)$ .

Operando se obtiene la ecuación general  $\sqrt{3}x - 3y - (12 + 5\sqrt{3}) = 0$ .

- 9.85 Calcula la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto en el que  $6x + 9y - 12 = 0$  corta al eje de abscisas y es paralela a  $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ .

Para calcular el punto de corte con el eje de abscisas se tiene que  $y = 0$ . Entonces, si  $y = 0$ ,  $6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$ .

La recta pedida pasa por el punto  $(2, 0)$ .

La pendiente debe ser igual que la de  $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow m = \frac{-3}{4}$ . La recta es  $y = \frac{-3}{4} \cdot (x - 2)$ .

9.86 Los lados de un triángulo vienen dados por las rectas de ecuaciones  $3x - y - 6 = 0$ ,  $y = 0$  y  $3x + y - 18 = 0$ .

a) Halla sus vértices.

b) Clasifica el triángulo en función de sus lados.

c) Halla las ecuaciones de las rectas determinadas por sus medianas.

a) Para calcular sus vértices se resuelven los sistemas formados por las rectas dos a dos:

$$\begin{cases} 3x - y - 6 = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 6 \end{matrix} \quad \begin{cases} 3x - y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 0 \end{matrix} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 6 \\ y = 0 \end{matrix}$$

Los vértices son  $A(4, 6)$ ,  $B(2, 0)$  y  $C(6, 0)$ .

b)  $d(A, B) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40}$   $d(A, C) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40}$

$d(C, B) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{16} = 4$

Es un triángulo isósceles porque tiene dos lados iguales y uno desigual.

c)  $M_{AB} = \left( \frac{4 + 2}{2}, \frac{6 + 0}{2} \right) = (3, 3)$

$M_{BC} = \left( \frac{2 + 6}{2}, \frac{0 + 0}{2} \right) = (4, 0)$

$M_{CA} = \left( \frac{6 + 4}{2}, \frac{0 + 6}{2} \right) = (5, 3)$

$\frac{x - 3}{6 - 3} = \frac{y - 3}{0 - 3} \Rightarrow \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 3}{-3} \Rightarrow x + y - 6 = 0$   $\frac{x - 4}{4 - 4} = \frac{y}{6 - 0} \Rightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$

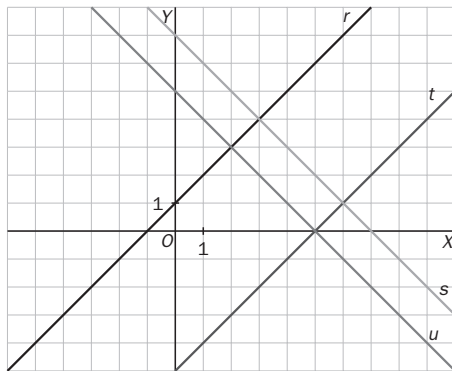
$\frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{3} \Rightarrow x - y - 2 = 0$

9.87 Sabiendo que las rectas  $r: x - y + 1 = 0$ ,  $s: x + y - 7 = 0$ ,  $t: x - y - 5 = 0$  y  $u: x + y - 5 = 0$  forman un cuadrilátero.

a) Calcula la medida de sus lados.

b) Comprueba si las diagonales se cortan en su punto medio.

a) Al dibujar las rectas se observa cuáles son los puntos de corte de cada dos de ellas que hay que obtener para calcular los vértices pedidos.



Hay que resolver los sistemas formados por las rectas  $r$  y  $s$ , obteniéndose el punto  $A(3, 4)$ ;  $s$  y  $t$ , calculando el punto  $B(6, 1)$ ;  $t$  y  $u$ , obteniendo el punto  $C(5, 0)$ , y  $r$  y  $u$ , con el punto  $D(2, 3)$ .

$d(A, B) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$d(B, C) = \sqrt{(5 - 6)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{2}$

$d(C, D) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$d(A, D) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{2}$

b) Ecuación de la diagonal  $AC$ :  $\frac{x - 3}{5 - 3} = \frac{y - 4}{0 - 4} \Rightarrow 2x + y - 10 = 0$

Ecuación de la diagonal  $BD$ :  $\frac{x - 6}{2 - 6} = \frac{y - 1}{3 - 1} \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$

Punto de corte de las dos diagonales:  $\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 2 \cdot (10 - 2x) - 8 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4$

Las diagonales se cortan en el punto  $P(4, -2)$ .

El punto medio de la diagonal  $\overline{AC}$  es  $M_{AC} = \frac{1}{2} \cdot [(3, 4) + (5, 0)] = (4, 2)$ .

El punto medio de la diagonal  $\overline{BD}$  es  $N_{BD} = \frac{1}{2} \cdot [(6, 1) + (2, 3)] = (4, 2)$ .

Por tanto, las diagonales se cortan en su punto medio.

9.88 Reforestación.

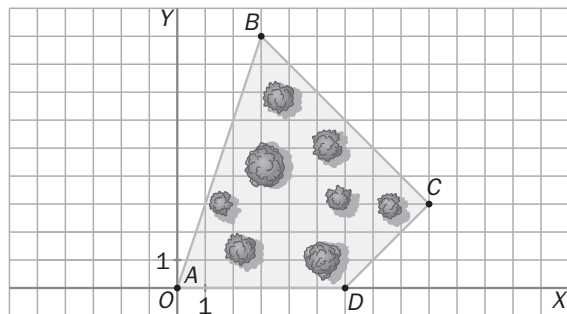
Se quieren plantar una serie de árboles en los límites de una finca. Para ello se ha realizado un esquema y se ha adoptado un sistema de referencia, tal y como aparece en la figura.

Los vértices de la finca son los puntos:

$A(0, 0)$ ,  $B(3, 9)$ ,  $C(9, 3)$ ,  $D(6, 0)$

- En los vértices se colocarán cuatro pinos.
- Entre los vértices  $A$  y  $B$  deben plantarse dos abetos.
- Entre los vértices  $B$  y  $C$  deben plantarse dos nogales.
- Entre los vértices  $C$  y  $D$  y entre los  $D$  y  $A$  se instalarán dos y cinco setos, respectivamente.

Con la ayuda de la referencia que se ha tomado, indica las posiciones exactas de los abetos, nogales y setos que se quieren plantar.



• Abetos:  $\overline{AB} = (3, 9) \Rightarrow \frac{1}{3}\overline{AB} = (1, 3)$ . Se debe colocar un abeto en el punto  $(0, 0) + (1, 3) = (1, 3)$ , y otro en  $(1, 3) + (1, 3) = (2, 6)$ .

• Nogales:  $\overline{BC} = (6, -6) \Rightarrow \frac{1}{3}\overline{BC} = (2, -2)$ . Se debe colocar un nogal en  $(3, 9) + (2, -2) = (5, 7)$  y otro en  $(5, 7) + (2, -2) = (7, 5)$ .

• Setos:

□  $\overline{CD} = (-3, -3) \Rightarrow \frac{1}{3}\overline{CD} = (-1, -1)$ . Se debe colocar un seto en el punto  $(9, 3) + (-1, -1) = (8, 2)$  y otro en el punto  $(8, 2) + (-1, -1) = (7, 1)$ .

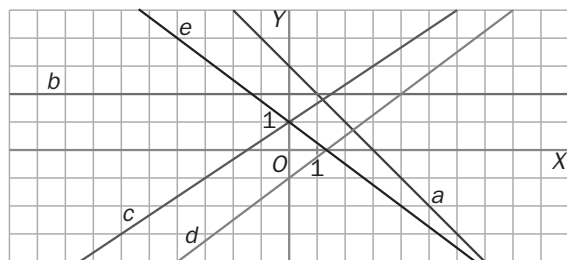
□  $\overline{AD} = (6, 0) \Rightarrow \frac{1}{6}\overline{AD} = (1, 0)$ . Se deben colocar cinco setos en los puntos  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(4, 0)$  y  $(5, 0)$ .

9.89 Puzzle desordenado

En el siguiente gráfico aparecen cinco rectas. La tabla indica las características de estas cinco rectas, pero las casillas están desordenadas.

Reordena el puzzle de forma que cada recta se corresponda con sus características.

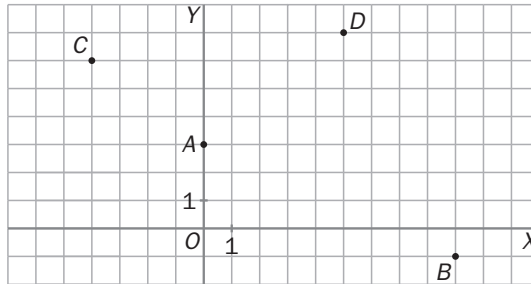
Recta	Ecuación	Pendiente	Ordenada en el origen
a	$y = 2$	0	3
b	$y = \frac{2}{3}x + 1$	-1	1
c	$y = \frac{3}{4}x - 1$	$\frac{2}{3}$	-1
d	$y = \frac{-3}{4}x + 1$	$\frac{-3}{4}$	1
e	$y = -x + 3$	$\frac{3}{4}$	2



Recta	Ecuación	Pendiente	Ordenada en el origen
a	$y = -x + 3$	-1	3
b	$y = 2$	0	2
c	$y = \frac{2}{3}x + 1$	$\frac{2}{3}$	1
d	$y = \frac{3}{4}x - 1$	$\frac{3}{4}$	-1
e	$y = \frac{-3}{4}x + 1$	$\frac{-3}{4}$	1

**AUTOEVALUACIÓN**

**9.A1** Calcula las coordenadas y el módulo de los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$ .



a)  $\overrightarrow{AB} = (9, -1) - (0, 3) = (9, -4)$ .  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9^2 + (-4)^2} = \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97}$

b)  $\overrightarrow{CD} = (5, 7) - (-4, 6) = (9, 1)$ .  $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{81 + 1} = \sqrt{82}$

**9.A2** Calcula:

a)  $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1)$

b)  $5[(7, -2) + (-8, 1)]$

c)  $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)]$

a)  $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1) = (18, 6) + (5, -4) - (12, 6) = (11, -4)$

b)  $5[(7, -2) + (-8, 1)] = 5 \cdot (-1, -1) = (-5, -5)$

c)  $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)] = (2, 3) - [(6, 1) - (-12, -8)] = (2, 3) - (18, 9) = (-16, -6)$

**9.A3** Obtén el módulo y el argumento de los vectores:

a)  $\vec{u} = (7, 2)$

c)  $\vec{w} = (-9, -6)$

b)  $\vec{v} = (0, 4)$

d)  $\vec{x} = (-8, 0)$

a)  $|\vec{u}| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$

Argumento de  $\vec{u}$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{7} = 0,75 \Rightarrow \alpha = 15^\circ 56' 43''$

b)  $|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$

Argumento de  $\vec{v}$ :  $\alpha = 90^\circ$

c)  $|\vec{w}| = \sqrt{(-9)^2 + (-6)^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117}$

Argumento de  $\vec{w}$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 213^\circ 41' 25''$

d)  $|\vec{x}| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$

Argumento de  $\vec{x}$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{0}{-8} = 0 \Rightarrow \alpha = 180^\circ$

**9.A4** Halla la distancia entre los puntos  $A(5, -9)$  y  $B(7, 2)$ .

$$d(A, B) = \sqrt{(7 - 5)^2 + (2 + 9)^2} = \sqrt{4 + 121} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

**9.A5** Calcula las coordenadas del punto medio del segmento  $AB$  siendo  $A(4, 0)$  y  $B(-2, 6)$ .

El punto medio del segmento  $AB$  es  $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot [(-2, 6) + (4, 0)] = (1, 3)$ .

9.A6 Escribe todas las formas posibles de la ecuación de la recta:

a) Que pasa por el punto  $P(4, 1)$  y tiene la dirección del vector  $\vec{u} = (-2, 5)$ .

b) Que pasa por los puntos  $A(9, 4)$  y  $B(8, 1)$ .

a) Vectorial:  $(x, y) = (4, 1) + t(-2, 5)$

$$\text{Paramétricas: } \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$$

$$\text{Continua: } \frac{x - 4}{-2} = \frac{y - 1}{5}$$

$$\text{General: } 5x + 2y - 22 = 0$$

$$\text{Punto-pendiente: } y - 1 = \frac{-5}{2} \cdot (x - 4)$$

$$\text{Explícita: } y = \frac{-5}{2}x + 11$$

b) Vector dirección  $\overline{AB} = (-1, -3)$

$$\text{Vectorial: } (x, y) = (9, 4) + t(-1, -3)$$

$$\text{Paramétricas: } \begin{cases} x = 9 - t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$$

$$\text{Continua: } \frac{x - 9}{-1} = \frac{y - 4}{-3}$$

$$\text{General: } 3x - y - 23 = 0$$

$$\text{Punto-pendiente: } y - 4 = 3 \cdot (x - 9)$$

$$\text{Explícita: } y = 3x - 23$$

9.A7 Comprueba si la recta  $6x + 4y = 0$  pasa por el punto  $(3, -3)$ .

$$6 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \neq 0 \Rightarrow 18 - 12 \neq 0 \Rightarrow \text{No pasa por el punto.}$$

9.A8 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene el mismo vector

$$\text{que } r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$$

Un vector director de la recta es  $\vec{u}(1, 5)$ . La ecuación general de la recta es  $y = 5x$ .

9.A9 Estudia la posición relativa de las rectas:

$$\text{a) } r: 3x - y + 6 = 0$$

$$s: 3x - 4y + 2 = 0$$

$$\text{b) } r: 4x + 6y + 12 = 0$$

$$s: 2x + 3y + 9 = 0$$

a) Como  $\frac{3}{3} \neq \frac{-1}{-4}$ , las rectas son secantes.

b) Como  $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} \neq \frac{12}{9}$ , las rectas son paralelas.

## M A T E M Á T I C A S

### Sumas y más sumas

Fíjate en las siguientes sumas.

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} = 2,5$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2,67$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2,71$$

Calcula las tres sumas que continúan la serie.

¿Cuál crees que es el resultado si se suman infinitos términos?

Los siguientes términos serán:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2,716$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2,71805$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2,71825$$

Construiremos la siguiente tabla:

Término	1	2	3	4	5	6	...	$n$
$\Sigma$	1	2	2,5	2,666			...	$e$

Es la definición del número  $e$ .