EJERCICIOS PROPUESTOS

11.1 Estudia y representa la siguiente función cuadrática: $f(x) = 2x^2 - x + 2$.

Es una parábola con las ramas hacia arriba, pues $a > 0$.

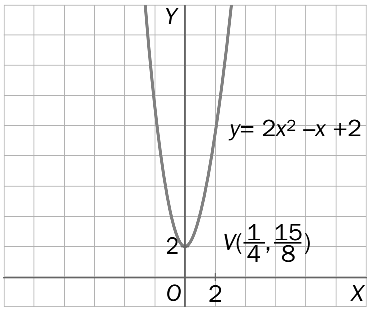
El vértice es el punto $V\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{8}\right)$.

El eje de la parábola es la recta $x = \frac{1}{4}$.

Corte con el eje OY: $A(0, 2)$.

Corte con el eje OX: $2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{4}$. No tiene solución.

Luego la parábola no corta el eje OX.



11.2 Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = 2x^2 + x - 6$.

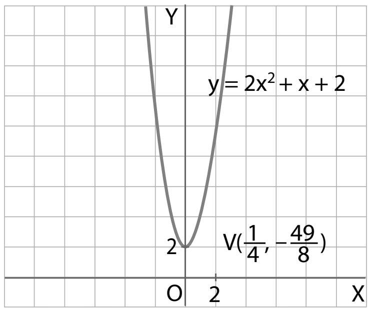
Es una parábola con las ramas hacia arriba, pues $a > 0$.

El vértice es el punto $V\left(\frac{-1}{4}, \frac{-49}{8}\right)$.

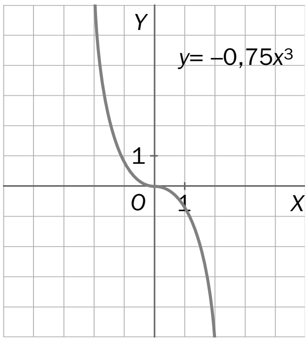
El eje de la parábola es la recta $x = \frac{-1}{4}$.

Corte con el eje OY: $A(0, -6)$

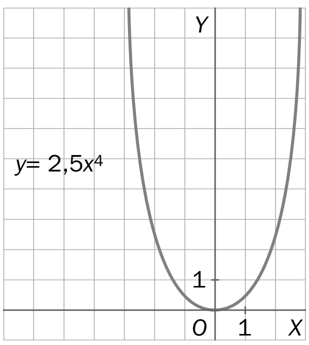
Corte con el eje OX: $x = \frac{-1 \pm 7}{4} \Rightarrow A(-2, 0)$ y $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$



11.3 Representa gráficamente la siguiente función potencial: $y = -0{,}75x^3$.

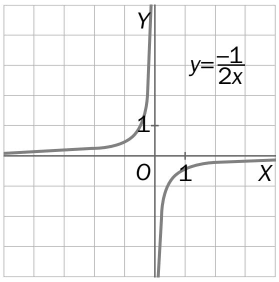


11.4 Representa gráficamente la siguiente función y explica las diferencias existentes con la función del ejercicio anterior: $y = 2{,}5x^4$.



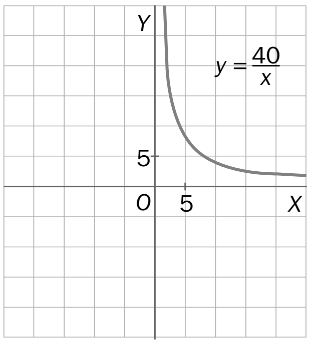
	$y = -0{,}75x^3$	$y = 2{,}5x^4$
Dominio	**R**	**R**
Recorrido	**R**	$\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
Simetría	Respecto de (0, 0)	Respecto al eje OY
Continuidad	En todo el dominio	En todo el dominio
Crecimiento	Creciente en todo el dominio	Creciente para $x > 0$ Decreciente para $x < 0$
Pasa por los puntos	$(1; -0{,}75)$; $(0, 0)$; $(-1; -0{,}75)$	$(1; 2{,}5)$; $(0, 0)$; $(-1; 2{,}5)$

11.5 Representa gráficamente la siguiente función de proporcionalidad inversa: $f(x) = \frac{-1}{2x}$.



11.6 Un estanque tarda en llenarse 5 horas con los 8 grifos que tiene. ¿Cuál es la función que expresa la relación entre el número de grifos, *x*, con el tiempo, *y*, que emplea el estanque en llenarse? Represéntala gráficamente.

La función es $y = \frac{40}{x}$.

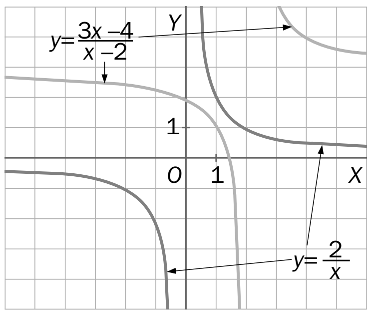


11.7 Halla el dominio de la siguiente función y represéntala gráficamente a partir de la traslación de funciones.

Su dominio es $\mathbf{R} - \{2\}$.

Operando: $f(x) = \frac{3x - 4}{x - 2} = \frac{x - 2 + x - 2 + x - 2 + 2}{x - 2} = 3 + \frac{2}{x - 2}$.

Se trata de una traslación vertical de 3 unidades hacia arriba y una traslación horizontal de 2 unidades hacia la derecha de la función: $f(x) = \frac{2}{x}$.



11.8 De las siguientes funciones, di cuáles son racionales, halla el dominio de cada una y represéntalas gráficamente.

a) $y = 5x^2 + 1$

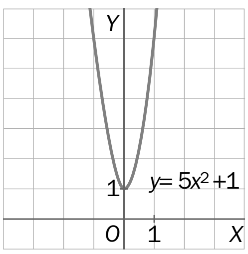
b) $y = \frac{4}{x + 1}$

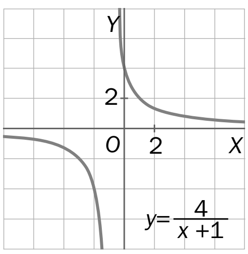
c) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

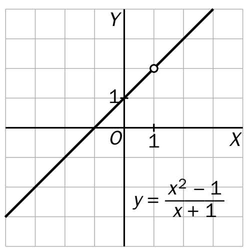
a) Dom $y = \mathbf{R}$

b) Dom $y = \mathbf{R} - \{-1\}$

c) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \Rightarrow$ Dom $y = \mathbf{R} - \{+1\}$







11.9 Con 1000 metros de alambre, deseamos construir un cercado de forma rectangular que tenga la máxima área posible. ¿Cuáles serán sus dimensiones?

Sea b la base del rectángulo y h su altura, tenemos $1000 = 2b + 2h$. Simplificando, $500 = b + h$. Despejando una de las variables se obtiene: $b = 500 - h$.

El área del rectángulo que se quiere maximizar es: $S = b \cdot h$.

Sustituyendo el valor de b en esta última expresión: $S = h \cdot (500 - h) = -h^2 + 500h$.

Se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a < 0$. Si se calculan las coordenadas del vértice, se obtiene el valor de h que hace su superficie máxima.

$h_{\text{máx}} = \dfrac{-500}{-2} = 250$ m; $\qquad S_{\text{máx}} = -250^2 + 500 \cdot 250 = 62\,500$ m^2

Sustituyendo h en la expresión de b, resulta $b_{\text{máx}} = 500 - 250 = 250$ m.

Por tanto, para obtener un cercado rectangular de superficie máxima con 1000 m de alambre, la base y la altura deben medir 250 m cada una.

11.10 Una empresa que fabrica hornos microondas obtiene unos beneficios por su venta dados por la siguiente función:

$$f(x) = 350x - 0{,}1x^2 - 20\,000$$

¿Cuántos hornos deben fabricarse para que el beneficio sea máximo?

Se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a = -0{,}1 < 0$. Si se calculan las coordenadas del vértice, se obtiene el valor de x que hace los beneficios máximos.

$x_{\text{máx}} = \dfrac{-350}{-0{,}2} = 1750$ hornos. Por tanto, deben fabricarse 1750 hornos para que el beneficio sea máximo.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11.11 Supongamos que un defensa que mide 1,80 metros hubiera intentado detener el lanzamiento. Si no tuviera tiempo de saltar, ¿a qué distancia del lanzador debería haber estado para interceptarlo? Para hacer los cálculos, supón que el balón pasa si va con una altura de 1,80 metros más o menos.

Hay que calcular los valores de x para los que la altura es de 1,80 metros.

$$1{,}8 = \frac{-1}{160}x^2 + \frac{11}{40}x \Rightarrow \frac{-1}{160}x^2 + \frac{11}{40}x - 1{,}8 = 0 \Rightarrow x^2 - 44x + 288 = 0$$

$$x = \frac{-44 \pm \sqrt{1936 - 1152}}{2} = \frac{-44 \pm 28}{2} = \begin{cases} 8 \\ 36 \end{cases}$$

El defensa debía estar a menos de 8 metros del delantero o a menos de 4 metros de la portería.

11.12 Un lanzador de jabalina participa en un campeonato. En el lanzamiento, la jabalina sale desde una altura de 1,80 metros. Alcanza una altura de 3,20 metros a los 10 metros de distancia y de 5 metros a los 40 metros de distancia del lanzador. ¿Cuánto medirá el lanzamiento?

En este caso, los puntos a utilizar son (0; 1,8), (10; 3,2) y (40, 5). Hay que hallar la distancia recorrida, buscando el punto en el que la altura sea 0. La ecuación de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Sustituyendo los puntos se obtiene:

$$1{,}8 = 0 \cdot a + 0 \cdot b + c \Rightarrow c = 1{,}8$$

$$3{,}2 = 100a + 10b + 1{,}8 \Rightarrow 100a + 10b = 1{,}4$$

$$5 = 1600a + 40b + 1{,}8 \Rightarrow 1600a + 40b = 3{,}2$$

La solución del sistema es: $a = \dfrac{-1}{500} = -0{,}002,\ b = \dfrac{4}{25} = 0{,}16;\ c = 1{,}8.$

La ecuación de la parábola es: $y = -0{,}002x^2 + 0{,}16x + 1{,}8$.

Se buscan los valores de $x > 0$, para los que $y = 0$.

$$-0{,}002x^2 + 0{,}16x + 1{,}8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -10 \\ 90 \end{cases}$$

La distancia recorrida es de 90 metros.

A C T I V I D A D E S

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

Funciones cuadráticas

11.13 Indica cuáles de las siguientes funciones son cuadráticas.

a) $y = 3x + 5$ **b)** $y = x^2 - 4x$ **c)** $y = 6 + x^2$ **d)** $y = 2x + 5x^2 - x^3$

Son cuadráticas las funciones de los apartados b y c.

11.14 Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes parábolas.

a) $y = x^2 - 3x + 2$ **b)** $y = 5x^2 + 10$ **c)** $y = 9 - 6x + x^2$ **d)** $y = 2x^2 - 8$

a) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow A(1, 0)$ y $B(2, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow C(0, 2)$

b) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow$ No lo corta.

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow (0, 10)$

c) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3 \Rightarrow A(3, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow B(0, 9)$

d) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow C(0, -8)$

11.15 Indica, sin dibujarlas, cuáles de las siguientes parábolas son abiertas hacia arriba y cuáles hacia abajo.

a) $y = -3x^2 + 9x + 2$ **b)** $y = 5 - x + x^2$ **c)** $y = 2x^2 - x + 1$ **d)** $y = 8 - 4x^2$

Hacia arriba, la gráfica de b y de c. Hacia abajo, la gráfica de a y de d.

11.16 Calcula el vértice de las siguientes parábolas y luego represéntalas gráficamente.

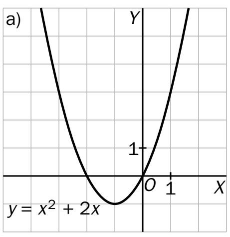
a) $y = x^2 + 2x$ **b)** $y = 1 - x^2$ **c)** $y = x^2 - x - 12$ **d)** $y = -2x^2 + 6x + 20$

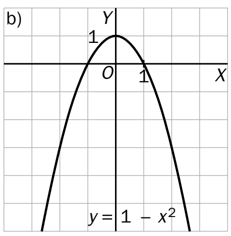
a) $x = -\dfrac{2}{2 \cdot 1} = -1$; $y = -1 \Rightarrow V(-1, -1)$

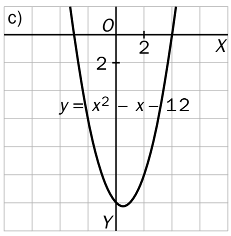
b) $x = -\dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$; $y = 1 \Rightarrow V(0, 1)$

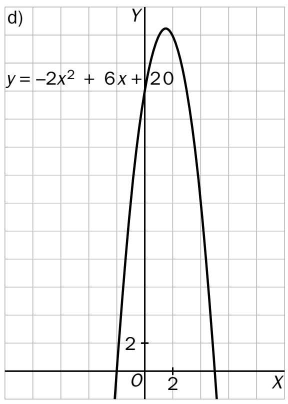
c) $x = -\dfrac{-1}{2 \cdot 1} = \dfrac{1}{2}$; $y = -\dfrac{49}{4} \Rightarrow V\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$

d) $x = -\dfrac{6}{2 \cdot (-2)} = \dfrac{3}{2}$; $y = \dfrac{49}{2} \Rightarrow V\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{2}\right)$









11.17 De las siguientes parábolas, ¿cuáles tienen su vértice sobre el eje de ordenadas? ¿Cuál es, en ese caso, su eje de simetría?

a) $y = x^2 - 2x$ **b)** $y = -7x^2$ **c)** $y = \frac{1}{4}x^2 - 6x$ **d)** $y = 3x^2 + 5$

a) $x = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1;\ y = -1 \Rightarrow V(1, -1)$

c) $x = 6 : \frac{2}{4} = \frac{24}{2} = 12;\ y = \frac{1}{4}12^2 - 6 \cdot 12 = -36 \Rightarrow V(12, -36)$

b) $x = -\frac{0}{2 \cdot (-7)} = 0;\ y = 0 \Rightarrow V(0, 0)$

d) $x = 0;\ y = 5 \Rightarrow V(0, 5)$

Tienen su vértice en el eje de ordenadas las parábolas de los apartados b y d. En estos casos, su eje de simetría es el eje de ordenadas.

11.18 Halla el vértice y el eje de simetría de las siguientes funciones.

a) $y = x^2 + 8x + 1$ **c)** $y = -x^2 + 2x + 2$ **e)** $y = -x^2 + 1$

b) $y = 2x^2 - 4x - 3$ **d)** $y = x^2 + 6x$ **f)** $y = 3x^2 - 5$

a) $x = \frac{-8}{2 \cdot 1} = -4;\ y = -15 \Rightarrow V(-4, -15)$. Eje: $x = -4$

b) $x = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1;\ y = -5 \Rightarrow V(1, -5)$. Eje: $x = 1$

c) $x = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1;\ y = 3 \Rightarrow V(1, 3)$. Eje: $x = 1$

d) $x = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3;\ y = -9 \Rightarrow V(-3, -9)$. Eje: $x = -3$

e) $x = -\frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0;\ y = 1 \Rightarrow V(0, 1)$. Eje: $x = 0$

f) $x = -\frac{0}{2 \cdot 3} = 0;\ y = -5 \Rightarrow V(0, -5)$. Eje: $x = 0$

11.19 Para cada una de las siguientes parábolas, indica si su vértice es un máximo o un mínimo.

a) $y = 6 - 3x + 2x^2$ **c)** $y = \frac{1}{6}x^2 - x + 1$ **e)** $y = 7x^2 - 9x + 3$

b) $y = 4x + 5x^2$ **d)** $y = \frac{5}{4} + x - 8x^2$ **f)** $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}$

Será un máximo en aquellas parábolas en las que $a < 0$. Es decir, en las de los apartados d y f.

Será un mínimo en aquellas parábolas en las que $a > 0$. Es decir, en las de los apartados a, b, c y e.

11.20 La gráfica de una función cuadrática corta el eje *OX* en los puntos (−4, 0) y (1, 0). Calcula la abscisa del vértice de esa parábola.

La ecuación de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Esta parábola pasa por los puntos (−4, 0) y (1, 0).

Sustituyendo los puntos se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} 0 = 16a - 4b + c \Rightarrow c = -16a + 4b \\ 0 = a + b + c \end{array}\right\} b = 3a \text{ y } c = -4a$$

La ecuación de la parábola queda así: $y = ax^2 + 3ax - 4a$. Y, por tanto, la abscisa del vértice es: $x = \frac{-3a}{2a} = \frac{-3}{2}$.

11.21 Para cada apartado, escribe la expresión algebraica de una función cuadrática que cumpla las condiciones descritas.

a) Pasa por el origen de coordenadas. **c) Corta el eje de abscisas en (2, 0) y (6, 0).**

b) Tiene las ramas abiertas hacia abajo. **d) No corta el eje de abscisas.**

a) $y = x^2 + x$

c) $y = (x - 2)(x - 6) = x^2 - 8x + 12$

b) $y = -x^2 + 5x + 1$

d) $y = x^2 + 3$

Funciones potenciales

11.22 Identifica cuáles de las siguientes funciones son potenciales.

a) $y = 2x$ **b)** $y = \frac{3}{8}x^5$ **c)** $y = -7 \cdot 5^x$ **d)** $y = -2x^{12}$ **e)** $y = \frac{6}{x^3}$ **f)** $y = 4x^6$

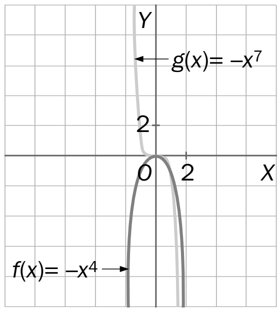
Las funciones de los apartados a, b, d y f.

11.23 A partir de la gráfica de las funciones potenciales que conoces, representa $f(x) = -x^4$ y $g(x) = -x^7$.

a) ¿Qué relación tienen sus gráficas con las de las funciones potenciales conocidas?

b) Calcula su dominio y recorrido.

c) ¿Qué tipo de simetría presentan?



a) Son opuestas a $y = x^4$ y a $y = x^7$, respectivamente.

b) Dom $f(x)$ = Dom $g(x)$ = **R**

Rec $f(x) = \mathbf{R}^-$. Rec $g(x)$ = **R**

c) $f(x)$ es par, y $g(x)$ es impar.

11.24 Para las funciones $f(x) = 8x^3$ y $g(x) = 0{,}5x^3$:

a) Construye una tabla de valores.

b) Represéntalas gráficamente.

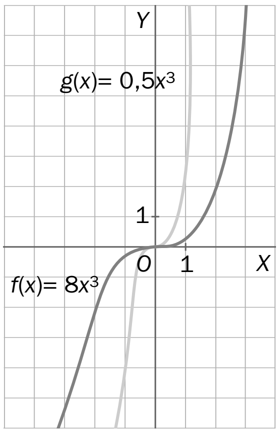
c) Realiza un estudio completo indicando dominio y recorrido, simetría, continuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, y puntos de corte con los ejes.

a)

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−64	−8	0	8	64

x	−2	−1	0	1	2
$g(x)$	−4	−0,5	0	0,5	4

b)



c) Dom $f(x)$ = Dom $g(x)$ = Rec $f(x)$ = Rec $g(x)$ = **R**.

Son continuas y simétricas respecto del origen.

Ambas son crecientes en todo su dominio.

No tienen máximos ni mínimos porque es creciente en todo su dominio.

Corta los ejes en (0, 0).

11.25 Para cada caso, escribe la fórmula de una función potencial que:

a) Sea simétrica respecto del origen.

b) Pase por los puntos (1, 4) y (−1, 4).

c) Pase por los puntos $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

d) Sea creciente para $x < 0$ y decreciente para $x > 0$.

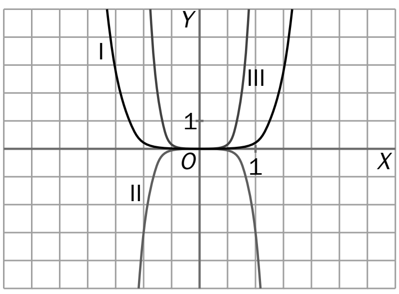
a) $y = x^9$ b) $y = 4x^2$ c) $y = \frac{1}{2}x^3$ d) $y = -x^6$

11.26 Asocia cada función con la gráfica que le corresponde.

a) $f(x) = -3x^6$

b) $g(x) = 10x^6$

c) $h(x) = \frac{1}{4}x^6$



II con a; III con b; I con c.

11.27 Representa gráficamente las siguientes funciones por traslación de $y = x^4$.

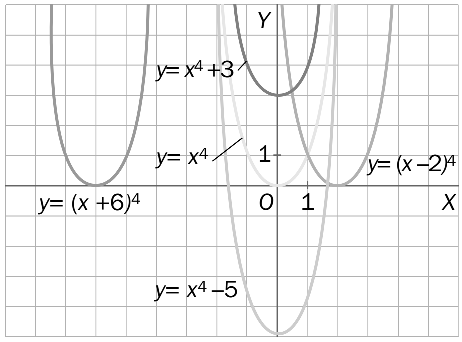
a) $y = x^4 + 3$ **b) $y = x^4 - 5$** **c) $y = (x - 2)^4$** **d) $y = (x + 6)^4$**

a) Trasladar $y = x^4$ tres unidades hacia arriba.

b) Trasladar $y = x^4$ cinco unidades hacia abajo.

c) Trasladar $y = x^4$ dos unidades hacia la derecha.

d) Trasladar $y = x^4$ seis unidades hacia la izquierda.



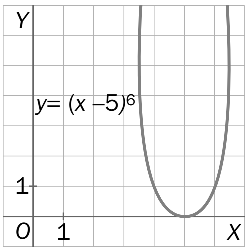
11.28 Dibuja la función $f(x) = (x - 5)^6$.

a) Calcula su dominio y su recorrido.

b) ¿Es simétrica? ¿Y continua?

c) ¿Cuáles son sus puntos de corte con los ejes?

d) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Tiene máximos y/o mínimos?



a) Su dominio es $\mathbf{R}$, y su recorrido, $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$.

b) Es simétrica respecto a $x = 5$. Sí es continua.

c) Corta el eje *OX* en (5, 0) y el eje *OY* en (0, 15625).

d) Es decreciente en $(-\infty, 5)$ y creciente en $(5, +\infty)$.
Tiene un mínimo en (5, 0).

Funciones de proporcionalidad inversa

11.29 Identifica de entre las siguientes funciones las que sean de proporcionalidad inversa.

a) $f(x) = \dfrac{-5}{x}$ **b) $g(x) = \dfrac{4x}{x + 1}$** **c) $h(x) = \dfrac{7}{2x}$**

Son funciones de proporcionalidad inversa las de los apartados a y c.

11.30 Escribe la expresión algebraica de dos funciones de proporcionalidad inversa, una creciente y otra decreciente.

Creciente: $y = \dfrac{-2}{x}$ Decreciente $y = \dfrac{3}{x}$

11.31 Completa la siguiente tabla de valores y realiza los ejercicios propuestos.

x	1	2	3	4	6
y	36		12		6

a) ¿Qué tipo de relación existe entre las variables?

b) Escribe la expresión algebraica que indica cómo se obtiene y a partir de x.

c) Construye, para esa función, una tabla de valores negativos de x.

d) Representa gráficamente dicha función.

Tabla: 18 (en la segunda columna) y 9 (en la cuarta columna)

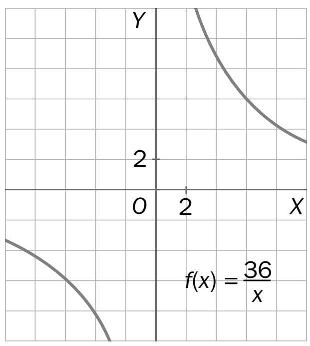
a) Existe una relación de proporcionalidad inversa.

b) $y = \dfrac{36}{x}$

c)

x	−1	−2	−3	−4	−6
y	−36	−18	−12	−9	−6

d)



11.32 Observa la función $f(x) = \dfrac{6}{11x}$

a) ¿Es una función de proporcionalidad inversa?

b) Halla su dominio.

c) ¿Es creciente o decreciente?

d) ¿Existe algún valor de x en el que no sea continua?

a) Sí, $k = \dfrac{6}{11}$ b) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{0\}$ c) Es decreciente. d) Sí, $x = 0$

11.33 A partir de su expresión algebraica, indica si las siguientes funciones de proporcionalidad inversa son crecientes o decrecientes.

a) $y = \dfrac{-8}{x}$ b) $y = \dfrac{7}{2x}$ c) $y = \dfrac{1}{3x}$ d) $y = \dfrac{-2}{5x}$

Son decrecientes las funciones de los apartados b y c, y crecientes las de los apartados a y d.

Funciones racionales

11.34 Halla el dominio de las funciones siguientes.

a) $y = \dfrac{2x + 4}{3x - 6}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 2}{1 - x^2}$ c) $y = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 16}$ d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

a) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{2\}$.

b) $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

c) $x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4 \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{4\}$

d) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{0\}$

11.35 ¿Cuáles de las siguientes funciones son racionales?

a) $y = \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{6}$ b) $y = \dfrac{4x - 2}{2x + 6}$ c) $y = \dfrac{x}{x^3 + 9}$

Son racionales las funciones de los apartados b y c.

11.36 Escribe, para cada caso, la expresión algebraica de una función racional que se obtenga:

a) A partir de una traslación horizontal de la función $f(x) = \dfrac{4}{x}$.

b) A partir de una traslación vertical de la función $g(x) = \dfrac{1}{5x}$.

c) A partir de una traslación horizontal y vertical de la función $h(x) = -\dfrac{2}{9x}$.

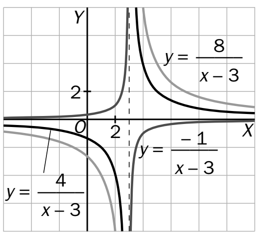
a) $y = \dfrac{4}{x - 1}$ b) $y = \dfrac{1}{5x} + 1$ c) $y = -\dfrac{2}{9\,(x+1)} - 4$

11.37 Dibuja, en los mismos ejes, la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{4}{x - 3}$

b) $g(x) = \dfrac{-1}{x - 3}$

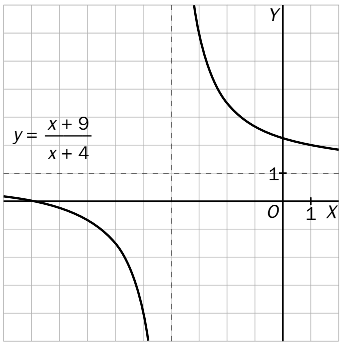
c) $h(x) = \dfrac{8}{x - 3}$

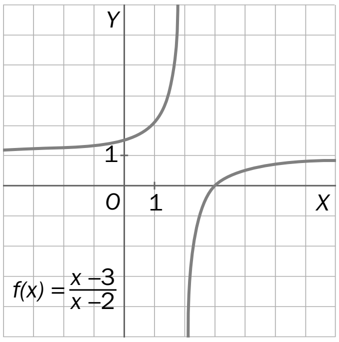


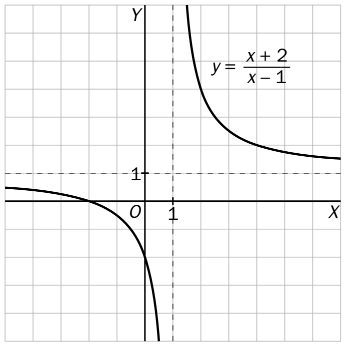
11.38 Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa mediante traslaciones horizontales y verticales.

a) $f(x) = \dfrac{x + 9}{x + 4}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x - 3}{x - 2}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

a) $f(x) = \dfrac{x + 4 + 5}{x + 4} = 1 + \dfrac{5}{x + 4}$ b) $g(x) = \dfrac{x - 2 - 1}{x - 2} = 1 + \dfrac{-1}{x - 2}$ c) $h(x) = \dfrac{x - 1 + 3}{x - 1} = 1 + \dfrac{3}{x - 1}$







CUESTIONES PARA ACLARARSE

11.39 Si el vértice de una parábola es el punto (−6, 10), ¿cuál es su eje de simetría?

Su eje de simetría es la recta $x = -6$.

11.40 Escribe la expresión algebraica de una función potencial simétrica respecto al eje de ordenadas y que no pase por el origen.

Por ejemplo, $y = x^4 + 1$

11.41 La función $f(x) = \dfrac{k}{x}$:

a) ¿En qué puntos corta los ejes de coordenadas? **b) ¿Tiene máximos y/o mínimos?**

a) No corta los ejes.

b) No tiene máximos ni mínimos.

11.42 Estudia el crecimiento de la función $f(x) = ax^n$, con n impar:

a) Para $a > 0$ **b) Para $a < 0$**

a) Creciente

b) Decreciente

11.43 Explica si puede haber alguna función racional cuyo dominio sean todos los números reales. En caso afirmativo, escribe un ejemplo.

Sí. Por ejemplo, $y = \dfrac{2x + 4}{x^2 + 1}$

11.44 Una función potencial impar pasa por el origen y por el punto (1, 6).

a) ¿Por qué otro punto pasa? **b) ¿Cuál podría ser su expresión algebraica?**

a) Por el punto (−1, −6)

b) $y = 6x^n$, siendo n cualquier número impar.

11.45 Dos parábolas cortan el eje de abscisas en los puntos (5, 0) y (8, 0). Razona si son iguales o pueden ser distintas.

La ecuación de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Esta parábola debe pasar por los puntos (5, 0) y (8, 0).

Sustituyendo los puntos se obtiene: $\begin{cases} 0 = 25a + 5b + c \\ 0 = 64a + 8b + c \end{cases}$

Restando ambas ecuaciones, despejando y simplificando se obtiene: $b = -13a$, y, por tanto, $c = 40a$. La ecuación es: $y = ax^2 - 13ax + 40a$ (a es un número real). Cualquier parábola de esta forma pasará por los puntos (5, 0) y (8, 0).

11.46 Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = ax^n$, con $a < 0$ y n par. ¿Es $x = 0$ un máximo o un mínimo? En caso afirmativo, indica si es absoluto o relativo.

Es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$. El punto $(0, 0)$ es un máximo absoluto.

PROBLEMAS PARA APLICAR

11.47 Una pelota, tras ser golpeada por un tenista, sigue una trayectoria dada por la expresión $f(t) = 8t - t^2$, siendo t el tiempo (en segundos) transcurrido desde el golpe, y $f(t)$, la altura (en metros) a la que se encuentra la pelota.

a) ¿A qué tipo de gráfica corresponde esta trayectoria?

b) ¿Cuándo alcanza la pelota su máxima altura?

c) ¿Cuál es esa altura máxima conseguida?

d) ¿En qué momento cae la pelota a la pista?

a) Se corresponde con una parábola.

b) Como se trata de una parábola con las ramas hacia abajo, pues $a = -1 < 0$, alcanza su máximo en el vértice.

Vértice: $t = -\dfrac{8}{2 \cdot (-1)} = 4$. La pelota alcanza su altura máxima a los 4 segundos.

c) $f(4) = 32 - 16 = 16$. La altura máxima conseguida es de 16 metros.

d) La pelota cae a la pista en el segundo t, para el cual $f(t) = 0$.

$8t - t^2 = 0 \Rightarrow t(8 - t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 8$. Vuelve al suelo a los 8 segundos de ser lanzada.

11.48 Un invernadero visto de frente presenta la forma de la gráfica de la función $f(x) = 2x - \dfrac{1}{4}x^2$.

a) ¿A qué tipo de gráfica corresponde esa forma?

b) Calcula la altura máxima del invernadero.

a) La gráfica se corresponde con una parábola.

b) Como se trata de una parábola con las ramas hacia abajo, pues $a = -\dfrac{1}{4} < 0$, alcanza su máximo en el vértice.

$x = 4$. La máxima altura es de 4 metros.

11.49 Para transportar una mercancía, se han elaborado cajas con forma de cubo.

a) Expresa la capacidad de cada caja en función de su lado. ¿Qué tipo de función es?

b) ¿Existe alguna medida del lado que haga máximo el volumen?

a) Si llamamos x al lado del cubo, se tiene que $V = x^3$. Se trata de una función potencial.

b) Como se trata de una función continua y creciente en todo su dominio, no tiene máximos ni mínimos, por lo que no existe ninguna medida que haga máximo el volumen.

11.50 Teniendo en cuenta que los móviles funcionan en la banda de frecuencias UHF (de muy alta frecuencia) entre los 800 y los 2000 MHz (1 MHz = 10^6 kHz), y que la relación entre la frecuencia y la longitud de onda viene dada por la siguiente tabla:

Frecuencia (kHz)	10^5	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$
Longitud de onda (m)	3000	1500	1000

a) ¿Qué tipo de relación existe entre ambas variables?

b) ¿Qué expresión algebraica permite obtener la longitud de onda, conocida la frecuencia?

c) ¿Entre qué valores de la longitud de onda se encuentra el alcance de un móvil?

a) Ambas variables son inversamente proporcionales.

b) $10^5 \cdot 3000 = 300\,000\,000 \Rightarrow f(x) = \dfrac{300\,000\,000}{x}$

c) 800 MHz = 800 000 kHz, y 2000 MHz = 2 000 000 kHz.

$f(800\,000) = \dfrac{300\,000\,000}{800\,000} = 375$ metros $f(2\,000\,000) = \dfrac{300\,000\,000}{2\,000\,000} = 150$ metros

La longitud de onda se encuentra entre 150 y 375 metros.

11.51 **Si aprietas un balón entre tus manos, comprobarás que, al disminuir su volumen, *V*, te cuesta cada vez más apretarlo. Esto es porque aumenta la presión, *P*, del aire en su interior.**

La presión del aire en el balón se incrementa de forma inversamente proporcional al volumen, es decir, se cumple que $P \cdot V = k$, donde *k* es una constante positiva.

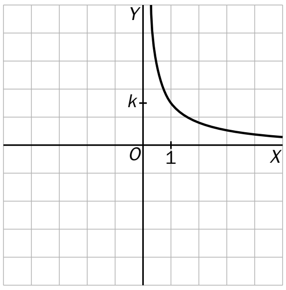
a) ¿De qué tipo es la función *P*(*V*)?

b) Represéntala gráficamente.

c) ¿Corta la gráfica a los ejes de coordenadas?

a) Se trata de una función de proporcionalidad inversa.

b)



c) No corta a los ejes.

11.52 **Durante el tiempo en que ha estado en marcha una empresa, los beneficios obtenidos (expresados en miles de euros) a lo largo del tiempo *t* (indicado en años) vienen dados por la fórmula:**

$$B(t) = -t^2 + 12t$$

a) ¿Durante cuántos años ha tenido la empresa beneficios?

b) ¿Cuándo obtuvo el máximo beneficio?

c) Representa gráficamente la función *B*(*t*).

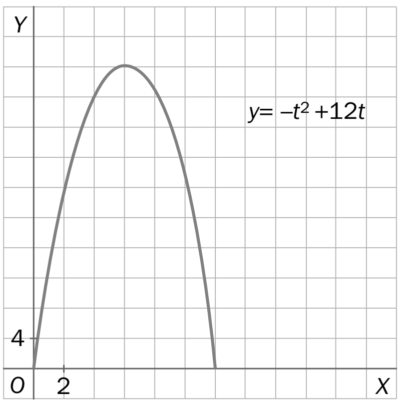
d) Indica cómo han cambiado los beneficios a lo largo del tiempo.

a) Dom $f(x) = (0, +\infty)$

b) Como la función que indica los beneficios a lo largo del tiempo es cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a = -1 < 0$, alcanza su máximo en el vértice: $x = -\dfrac{12}{2 \cdot (-1)} = 6$.

Su máximo beneficio se alcanzó en el sexto año.

c)



d) Los beneficios crecieron, desde que se puso la empresa en marcha, hasta el sexto año. En este año se alcanzaron los máximos beneficios de la empresa. A partir del sexto año, los beneficios fueron decreciendo hasta el duodécimo año. En ese año, los beneficios fueron nulos. A partir del duodécimo año, la empresa tuvo pérdidas. Por lo que se supone que la empresa cerró.

11.53 Los alumnos de 4.° ESO van a vallar una zona del patio del centro escolar para habilitarla como mercadillo de libros. Para uno de los lados del recinto se aprovechará una de las paredes del centro.

Se dispone de 12 metros de cercado. ¿Cuánto deben medir los lados del rectángulo para que ocupe la máxima superficie?

Sean b y h las dimensiones del rectángulo. Se tiene que $12 = b + 2h$.

Despejando una de las variables, se obtiene: $b = 12 - 2h$.

El área del rectángulo que se quiere maximizar es: $S = b \cdot h$.

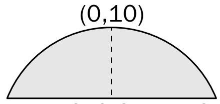
Sustituyendo el valor de b en esta última expresión, se obtiene: $S = h \cdot (12 - 2h) = 12h - 2h^2$.

Como se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a = -2 < 0$, alcanza su máximo en el vértice: $h_{\text{máx}} = \dfrac{-12}{-4} = 3$ metros.

Sustituyendo h en la expresión de b, resulta $b_{\text{máx}} = 12 - 6 = 6$ m. Por tanto, para obtener el cercado rectangular de superficie máxima con 12 m de valla, y aprovechando la pared, el lado paralelo a la pared debe medir 6 metros, y los otros lados, 3 metros cada uno.

11.54 Noelia y Miguel están observando la maqueta de un puente que tiene forma de parábola y pretenden calcular su expresión algebraica.

Para ello miden la distancia entre los puntos de las bases y la altura máxima, obteniendo el siguiente dibujo:



¿Cuál es la función cuya gráfica se corresponde con la forma del puente?

Se trata de una función cuadrática. La ecuación de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Esta parábola debe pasar por los puntos (15, 0), (−15, 0) y (0, 10). Sustituyendo los puntos se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= 225a + 15b + c \\ 0 &= 225a - 15b + c \\ 10 &= 0a + 0b + c \end{aligned}$$

De la tercera ecuación, $c = 10$. Sustituimos este valor en las otras dos ecuaciones y las restamos.

Al restarlas se obtiene que $50b = 0 \Rightarrow b = 0$. De la primera ecuación, $a = \dfrac{-25b - 10}{225} = \dfrac{-10}{225} = \dfrac{-2}{45}$.

La ecuación de la parábola es: $y = \dfrac{-2}{45}x^2 + 10$.

R E F U E R Z O

Funciones cuadráticas

11.55 Calcula los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las funciones siguientes.

a) $y = x^2 + 6x$ b) $y = 2x^2 - 18$ c) $y = x^2 + 8x + 16$ d) $y = 3 - 2x - x^2$

a) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x \cdot (x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = -6 \Rightarrow A(0, 0)$ y $B(-6, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C(0, 0)$

b) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow A(-3, 0)$ y $B(3, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = -18 \Rightarrow C(0, -18)$

c) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = -4 \Rightarrow A(-4, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 16 \Rightarrow B(0, 16)$

d) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow 3 - 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow A(-3, 0)$ y $B(1, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow C(0, 3)$

11.56 **Sin dibujar su gráfica, indica cuáles de las siguientes funciones cuadráticas están abiertas hacia arriba y cuáles hacia abajo.**

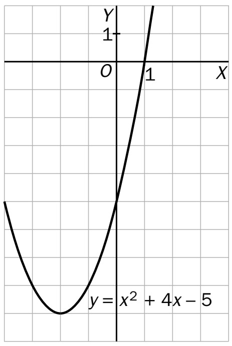
a) $y = 9x + 3x^2$ **b)** $y = 8 - 2x - 4x^2$ **c)** $y = 2x^2 - 1$ **d)** $y = -x^2 + x + 1$

Son abiertas hacia arriba las gráficas de las funciones de los apartados a y c. Y son abiertas hacia abajo las de los apartados b y d.

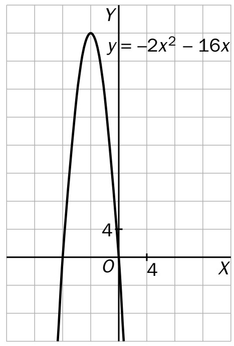
11.57 **Calcula el vértice de las siguientes parábolas y dibújalas a continuación.**

a) $y = x^2 + 4x - 5$ **b)** $y = x^2 - 9$ **c)** $y = -2x^2 - 16x$ **d)** $y = x^2 + 4x + 2$

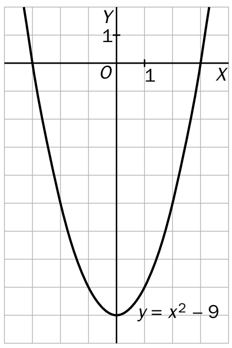
a) $x = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2;\ y = -9 \Rightarrow V(-2, -9)$



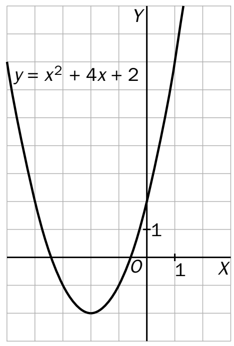
c) $x = \dfrac{16}{2 \cdot (-2)} = -4;\ y = 32 \Rightarrow V(-4, 32)$



b) $x = -\dfrac{0}{2 \cdot 2} = 0;\ y = -9 \Rightarrow V(0, -9)$



d) $x = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2;\ y = -2 \Rightarrow V(-2, -2)$



11.58 **Halla el eje de simetría de las siguientes parábolas.**

a) $y = \dfrac{5}{4}x^2$ **b)** $y = 2x^2 + 8x$ **c)** $y = x^2 + 9$ **d)** $y = x^2 - 2x - 3$

a) $x = 0;\ y = 0 \Rightarrow V(0, 0)$

Eje de simetría: $x = 0$

c) $x = -\dfrac{0}{2 \cdot 1} = 0;\ y = 9 \Rightarrow V(0, 9)$

Eje de simetría: $x = 0$

b) $x = -\dfrac{8}{2 \cdot 2} = -2;\ y = -8 \Rightarrow V(-2, -8)$

Eje de simetría: $x = -2$

d) $x = \dfrac{2}{2 \cdot 1} = 1;\ y = -4 \Rightarrow V(1, -4)$

Eje de simetría: $x = 1$

Funciones potenciales

11.59 **Sin dibujarlas, indica cuáles de las siguientes funciones potenciales tienen simetría respecto al eje *OY* y cuáles respecto del origen.**

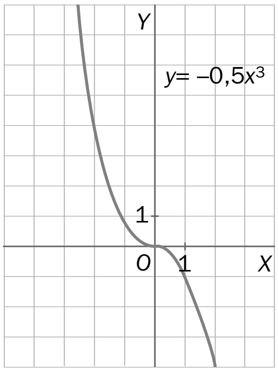
a) $f(x) = 3x^6$ **b)** $f(x) = -2x^5$ **c)** $h(x) = 4x^9$

Es simétrica respecto al eje *OY* la gráfica de la función del apartado a. Y respecto al origen, las gráficas de las funciones de los apartados b y c.

11.60 Representa gráficamente las siguientes funciones e indica cuáles son sus máximos y/o mínimos, si los tuvieran.

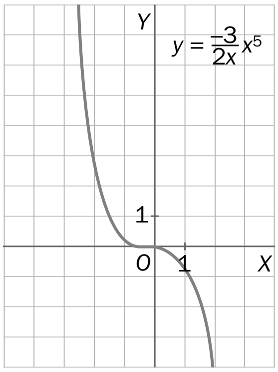
a) $y = -0{,}5x^3$ **b)** $y = 1{,}75x^4$ **c)** $y = -\frac{3}{2}x^5$ **d)** $y = \frac{1}{2}x^6$

a)



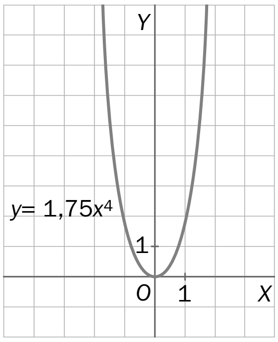
No tiene máximos ni míminos

c)



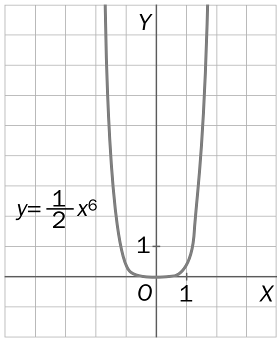
No tiene máximos ni míminos

b)



Tiene un mínimo absoluto en (0, 0)

d)



Tiene un mínimo absoluto en (0, 0)

Funciones de proporcionalidad inversa

11.61 Completa la siguiente tabla de valores sabiendo que x y $f(x)$ son inversamente proporcionales.

¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona ambas variables?

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
y		**80**			**40**

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
y	120	**80**	60	48	**40**

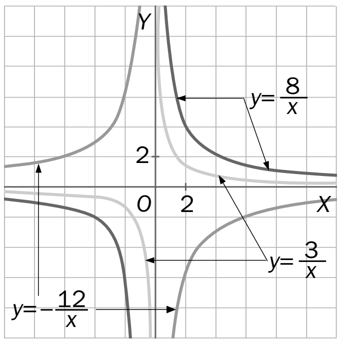
La expresión es $y = \dfrac{240}{x}$.

11.62 Representa en los mismos ejes las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{8}{x}$

b) $g(x) = -\dfrac{12}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{3}{x}$



11.63 Observa las gráficas del ejercicio anterior e indica cómo es el crecimiento de cada una de las funciones.

Las funciones a y c son decrecientes, y la b es creciente.

Funciones racionales

11.64 Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{2x + 5}{x - 3}$ **b)** $y = \dfrac{4x^2}{16 - 8x}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 12}$ **d)** $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 9x}$

a) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{3\}$ c) $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{-3, 4\}$

b) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{2\}$ d) $x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x + 9) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -9 \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{0, -9\}$

11.65 Escribe, para cada caso, la expresión algebraica de una función racional que cumpla con las características solicitadas.

a) El grado del numerador es menor que el grado del denominador.

b) El numerador y el denominador tienen el mismo grado.

c) El grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

a) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 5x}$ b) $y = \dfrac{x^3 + 2x + 6}{x^3 - 5}$ c) $y = \dfrac{x^4 + x^2}{x^3 - 3x + 9}$

AMPLIACIÓN

11.66 Calcula el valor que debe tener *a* para que la función $f(x) = ax^2 - 4x + 3$ tenga un máximo en el punto de abscisa $x = -1$.

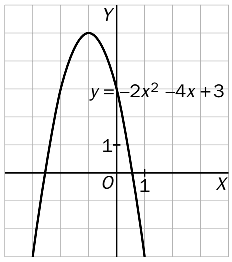
Para el valor de a obtenido, halla el vértice de la función y represéntala gráficamente.

El vértice de una parábola es un máximo o un mínimo, según sea la orientación de la misma. Para que el vértice sea un máximo, la parábola debe tener las ramas hacia abajo. Luego $a < 0$. La primera coordenada del vértice es:

$x = \dfrac{4}{2a} = \dfrac{2}{a}$. Luego $-1 = \dfrac{2}{a}$. Por lo que $a = -2$.

La segunda coordenada del vértice es $y = -2 + 4 + 3 = 5$.

El vértice es $V(-1,5)$.



11.67 Calcula la expresión algebraica de la función potencial de grado 4 que pasa por el punto (−2, 11).

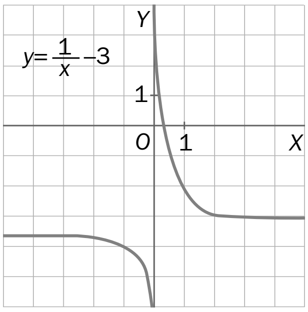
La expresión algebraica de una función potencial de grado 4 es $y = ax^4$. Sustituyendo el punto $(-2, 11)$:

$11 = a \cdot (-2)^4 \Rightarrow a = \dfrac{11}{16}$. La expresión es $y = \dfrac{11}{16}x^4$.

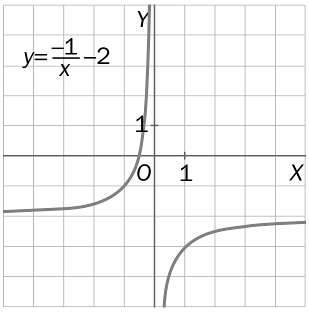
11.68 Representa gráficamente las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{1}{x} - 3$ **b)** $y = -\dfrac{1}{x} - 2$ **c)** $y = -\dfrac{1}{x} + 6$

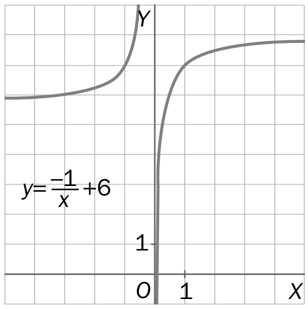
a)



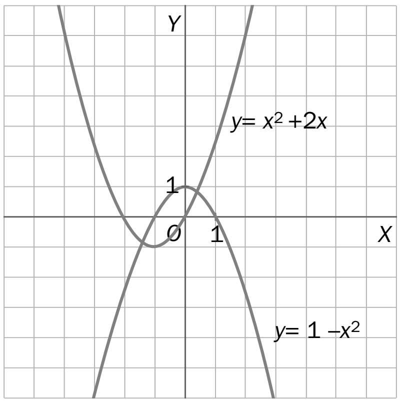
b)



c)



11.69 Dibuja las funciones $f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = 1 - x^2$ hallando sus vértices y los puntos de corte con los ejes. ¿En qué puntos se cortan sus gráficas?



- $f(x) = x^2 + 2x$

  Vértice: $x = -\dfrac{2}{2 \cdot 1}$; $y = -1 \Rightarrow V(-1, -1)$

  Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow A(0, 0)$ y $B(-2, 0)$

  Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C(0, 0)$

- $g(x) = 1 - x^2$

  Vértice: $x = \dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$; $y = 1 \Rightarrow V(0, 1)$

  Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$

  Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow C(0, 1)$

Para hallar los puntos de corte de las parábolas se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = 1 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} = \frac{-2 \pm 3{,}46}{2} = \begin{cases} 0{,}73 \\ -2{,}73 \end{cases}$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones: $y(0{,}73) = 0{,}47$; $y(-2{,}73) = -6{,}45$. Los puntos de corte son $P(0{,}73; 0{,}47)$ y $Q(-2{,}73; -6{,}45)$.

11.70 Halla el dominio de las funciones siguientes:

a) $y = \dfrac{x^3}{x^3 - 8}$ **b)** $y = \dfrac{3x^3 + 12}{x^3 - 5x}$ **c)** $y = \dfrac{x + 5}{x^3 - x}$

a) $x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbf{R} - \{2\}$

b) $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 5 \Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbf{R} - \{0, 5\}$

c) $x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = \pm 1$. $\text{Dom } f(x) = \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$

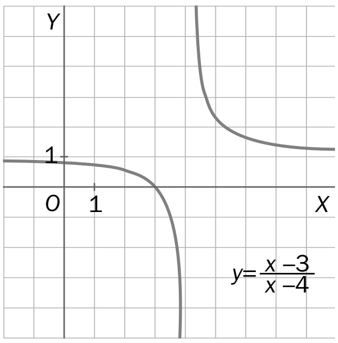
11.71 Dibuja las siguientes funciones indicando las traslaciones horizontales y verticales que hay que aplicar a la función de proporcionalidad inversa correspondiente.

a) $y = \dfrac{x - 3}{x - 4}$ **c)** $y = \dfrac{3x + 7}{x + 2}$

b) $y = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$ **d)** $y = \dfrac{x - 4}{x - 5}$

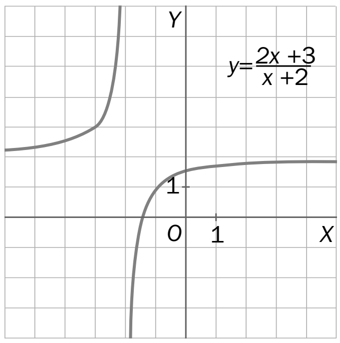
a) $y = \dfrac{x - 3}{x - 4} = \dfrac{x - 3 - 1 + 1}{x - 4} = 1 + \dfrac{1}{x - 4}$

La función $\dfrac{1}{x}$ se traslada horizontalmente 4 unidades a la derecha, y verticalmente 1 unidad hacia arriba.



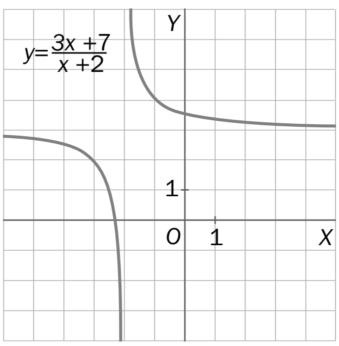
b) $y = \dfrac{2x + 3}{x + 2} = \dfrac{x + x + 3 + 2 + 2 - 4}{x + 2} = 2 - \dfrac{1}{x + 2}$

La función $-\dfrac{1}{x}$ se traslada horizontalmente 2 unidades a la izquierda y verticalmente 2 unidades hacia arriba.



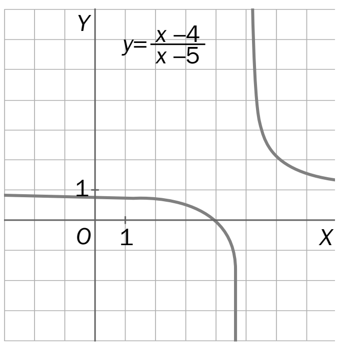
c) $y = \dfrac{3x + 7}{x + 2} = \dfrac{3x + 6 + 1}{x + 2} = 3 + \dfrac{1}{x + 2}$

La función $\dfrac{1}{x}$ se traslada horizontalmente 2 unidades a la izquierda y verticalmente 3 unidades hacia arriba.



d) $y = \dfrac{x - 4}{x - 5} = \dfrac{x - 4 - 1 + 1}{x - 5} = 1 + \dfrac{1}{x - 5}$

La función $\dfrac{1}{x}$ se traslada horizontalmente 5 unidades a la derecha y verticalmente 1 unidad hacia arriba.



11.72 Halla la expresión algebraica de una parábola cuyo vértice es el punto (1, −9) y que corta el eje de abscisas en los puntos (−2, 0) y (4, 0).

La ecuación de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Esta parábola debe pasar por los puntos (1, −9), (−2, 0) y (4, 0). Sustituyendo los puntos se obtiene un sistema de ecuaciones:

$-9 = a + b + c$

$0 = 4a - 2b + c \Rightarrow c = -a - b - 9 \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b - 9 - a - b = 0 \\ 16a + 4b - 9 - a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 9 \\ 15a + 3b = 9 \end{cases}$

$0 = 16a + 4b + c$

Sumando ambas ecuaciones: $18a = 18$, de donde $a = 1$. Luego $b = -2$ y $c = -8$.

La ecuación de la parábola es: $y = x^2 - 2x - 8$.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

11.73 La señal de prohibido

En un país están revisando el código de circulación. Una de las señales de tráfico que quieren modificar es la de dirección prohibida.

La apariencia de la citada señal debe ser: un rectángulo incluido y centrado en un círculo de radio 25 cm. El perímetro del rectángulo debe ser de 80 cm.

a) Escribe la función que determina el área del rectángulo interior en función de su altura.

b) Si la altura del rectángulo debe medir un tercio de su anchura, ¿cuál es el área de dicho rectángulo?

c) ¿Coincide esta área con la que tendría un rectángulo de área máxima en el que no impusiéramos la condición del apartado anterior? ¿Qué figura geométrica obtendríamos?

d) Escribe la función que determina el área de la zona pintada de rojo en función de la altura del rectángulo. Si quisiéramos que el área de esta zona fuera mínima, ¿qué altura debería tener el rectángulo?

a) Sea b la base del rectángulo y h su altura, tenemos: $80 = 2b + 2h$. Simplificando, $40 = b + h$. Despejando una de las variables se obtiene: $b = 40 - h$. El área del rectángulo que se quiere maximizar es: $S = b \cdot h$.

Sustituyendo el valor de b en esta última expresión: $S = h \cdot (40 - h) = -h^2 + 40h$.

b) Si la altura mide un tercio de la anchura: $b = 3h$. Sustituyendo en la fórmula del perímetro: $40 = h + 3h$. Luego $h = 10$ centímetros. Sustituyendo en la expresión del área: $S = -100 + 400 = 300$ cm^2.

c) La expresión $S = -h^2 + 40h$ es una función cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a = -1 < 0$. Por tanto, alcanza su máximo en el vértice: $h_{\text{máx}} = \dfrac{-40}{-2} = 20$ centímetros. Y $b_{\text{máx}} = 20$ centímetros.

Para obtener un rectángulo de superficie máxima con 80 cm de perímetro, cada uno de los lados debe medir 20 centímetros. La figura geométrica que se forma es un cuadrado.

d) La superficie de la zona pintada es $S = \pi r^2 - b \cdot h = 625\pi - (-h^2 + 40h) = h^2 - 40h + 625\pi$. Esta expresión corresponde a una función cuadrática con las ramas hacia arriba, luego alcanza su mínimo en el vértice.

$h = \dfrac{40}{2} = 20$ cm $\Rightarrow b = 20$ cm. Los valores obtenidos son los mismos que los del apartado anterior.

11.74 Limpieza de parques y jardines

El ayuntamiento de una localidad organizó un día dedicado a la limpieza de las zonas verdes de su municipio.

Los voluntarios que quisieron participar se organizaron en grupos. A cada grupo le fue adjudicada una zona, todas de igual superficie. El tiempo que cada grupo tardó en limpiar su zona dependió del número de personas que lo componían, de acuerdo a los datos de la siguiente tabla.

Equipo	N.° de personas	Tiempo (minutos)
1.°	4	180
2.°	5	145
3.°	6	118
4.°	8	70
5.°	12	60

a) Comprueba que todos los equipos, excepto uno, han trabajado con una intensidad parecida. Indica cuál es el equipo que se separa de la media y, con los datos del resto, intenta ajustar una función racional que relacione, de forma aproximada, las dos magnitudes expresadas en la tabla.

b) ¿Cuánto tiempo se puede esperar que tarde un grupo de 10 personas?

a) Fijándose, por ejemplo, en el primer equipo, si cuatro personas han invertido 180 minutos en realizar la limpieza, una sola habría tardado $180 \cdot 4 = 720$ minutos.

Los valores para el resto de equipos son 725, 708, 560 y 720. El 4.° equipo ha trabajado con mayor intensidad. Para el resto de valores, si x es el n.° de personas del equipo e y el tiempo que tardan en realizar el trabajo, la función aproximada que relaciona las dos magnitudes podría ser $y = \frac{720}{x}$.

b) Para un equipo de 10 personas, se esperaría que tardara aproximadamente 72 minutos en limpiar su zona.

AUTOEVALUACIÓN

11.A1 Di de qué tipo es cada una de estas funciones.

a) $y = 5 + x + 2x^2$ **b)** $y = \frac{3x^3 + x - 4}{x - 5}$ **c)** $y = \frac{2}{x}$ **d)** $y = 9x^{10}$

a) Cuadrática b) Racional c) De proporcionalidad inversa d) Potencial

11.A2 Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.

a) $y = 3x^2 + 2$ **b)** $y = 4x - 8x^2$ **c)** $y = -5x^2 + 10$ **d)** $y = -x^2 + 7x - 10$

a) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow$ No lo corta.

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0, 2)$

b) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x(4 - 8x) = 0 \Rightarrow A(0, 0)$ y $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C(0, 0)$

c) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow A(-\sqrt{2}, 0)$ y $B(\sqrt{2}, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow C(0, 10)$

d) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{-2} = \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases} \Rightarrow A(2, 0)$ y $B(5, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow C(0, -10)$

11.A3 Calcula el vértice de las funciones siguientes y represéntalas gráficamente.

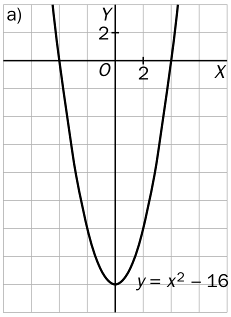
a) $y = x^2 - 16$

b) $y = 4x^2 + 4x$

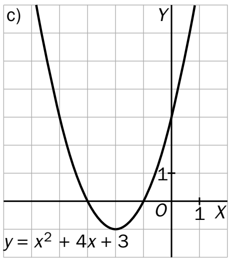
c) $y = x^2 + 4x + 3$

d) $y = x^2 + x - 12$

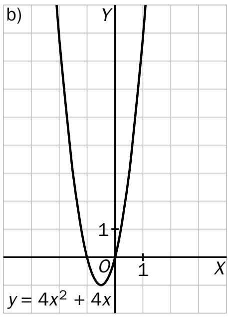
a) $x = -\dfrac{0}{2 \cdot 1} = 0;\ y = -16 \Rightarrow V(0, -16)$



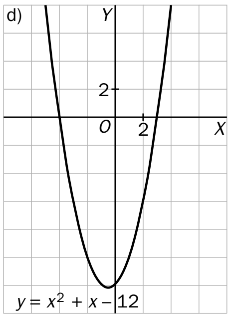
c) $x = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2;\ y = -1 \Rightarrow V(-2, -1)$



b) $x = -\dfrac{4}{2 \cdot 4} = -\dfrac{1}{2};\ y = -1 \Rightarrow V\left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$



d) $x = -\dfrac{1}{2 \cdot 1} = -\dfrac{1}{2};\ y = -\dfrac{49}{4} \Rightarrow V\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$

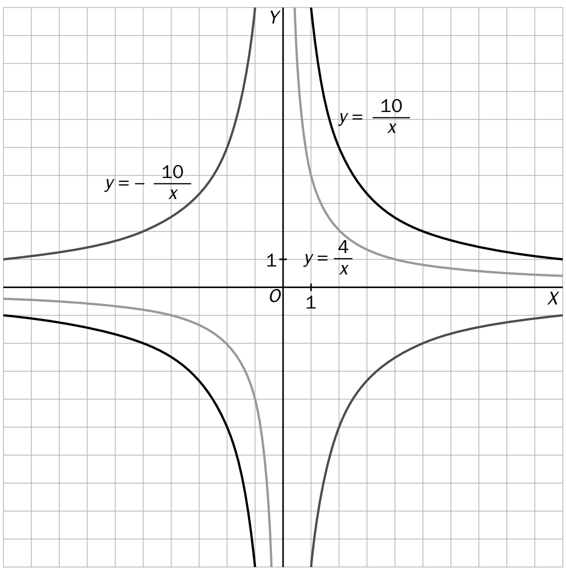


11.A4 Representa en los mismos ejes las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{10}{x}$

b) $g(x) = -\dfrac{10}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{4}{x}$



11.A5 Indica el tipo de simetría de las funciones:

a) $y = -x^8$ **b)** $y = \frac{1}{9}x^{12}$ **c)** $y = \frac{5}{4}x^7$ **d)** $y = 3{,}75x^{11}$

Son simétricas respecto al eje *OY* las gráficas de las funciones de los apartados a y b, y son simétricas respecto de (0, 0) las de los apartados c y d.

11.A6 Halla el dominio de las funciones siguientes.

a) $y = \frac{3x}{2x - 12}$ **b)** $y = \frac{x^2 + 4}{5x}$ **c)** $y = \frac{1}{x^2 + x}$ **d)** $y = \frac{x + 3}{x^2 - 4x - 5}$

a) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{6\}$

b) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{0\}$

c) $x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1 \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{-1, 0\}$

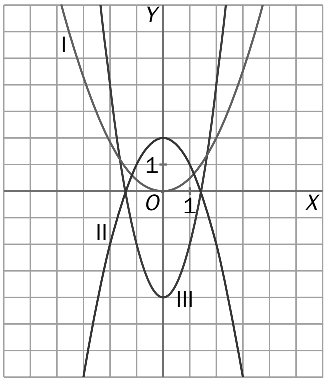
d) $x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{-1, 5\}$

11.A7 Identifica cada gráfica con la expresión que le corresponde.

a) $f(x) = 2x^2 - 4$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

c) $h(x) = 2 - x^2$



La gráfica III con $f(x)$

La gráfica I con $g(x)$

La gráfica II con $h(x)$

11.A8 En cada apartado, identifica de qué tipo es la función, y estudia su crecimiento y decrecimiento.

a) $f(x) = -7x^3$ **b)** $g(x) = \frac{4}{x}$ **c)** $h(x) = 6x^5$

a) Potencial. Decreciente en **R**.

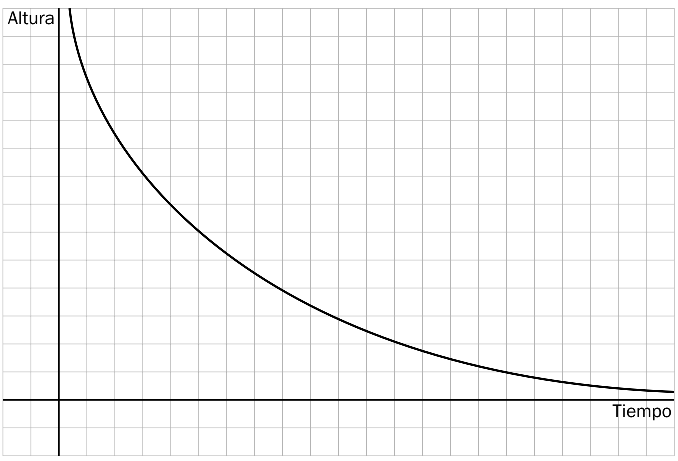
b) De proporcionalidad inversa. Decreciente en **R**.

c) Potencial. Creciente en **R**.

MATETIEMPOS

El aterrizaje de un avión

Construye un gráfico que represente la altura de un avión desde que empieza la operación de aterrizaje hasta que se posa en la pista. ¿A qué valor tiende la función que representa este gráfico?



Este es el concepto de límite, el avión se acercará cada vez más a la pista, se posará en ella, pero no formará parte de la misma. El valor al que tiende es cero.