EJERCICIOS DE FRACCIONES ALGEBRAICAS:

Ejercicio nº 1.-

Simplifica la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{2x^3+10x^2+16x+8}{4x^3+8x^2-4x-8}$$

Ejercicio nº 2.-

Calcula y simplifica:

a) $\dfrac{x^4-3x^2+2x}{x^2-2x+1}\cdot\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+2x}$

b) $\dfrac{2x+4}{x+4}-\dfrac{2x-14}{x-5}$

Ejercicio nº 3.-

Descompón en factores el dividendo y el divisor, y luego simplifica:

$$\frac{3x^3-3x}{x^5-x}$$

Ejercicio nº 4.-

Efectúa y simplifica:

a) $\left(\dfrac{1}{x}+x\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)$

b) $1+\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{2x}{4x^2-1}$

Ejercicio nº 5.-

Calcula y simplifica:

a) $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{3x-1}{x}$

b) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}:\dfrac{2x-10}{x^2-25}$

Ejercicio nº 6.-

Descompón en factores el dividendo y el divisor y después simplifica:

$$\frac{x^3+7x^2+12x}{x^3+3x^2-16x-48}$$

Ejercicio nº 7.-

Opera y simplifica:

a) $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x^2}\right)$

b) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{2+x}{x^2-4x+x}$

Ejercicio nº 8.-

Descompón en factores el numerador y el denominador, y luego simplifica.

$$\frac{x^3-49x}{x^4-7x^3}$$

Ejercicio nº 9.-

Opera y simplifica:

a) $\frac{2x}{x+1}:\left(\frac{2x}{x+1}-1\right)$

b) $\frac{x-2}{2x}-\frac{1-3x}{3x^2}+\frac{2x^2+3}{6x^4}$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE FRACCIONES ALGEBRAICAS:

Ejercicio nº 1.-

Solución:

Descomponemos factorialmente el numerador y el denominador:

- Numerador $\rightarrow$ Sacamos factor común 2 y aplicamos la regla de Ruffini :

  $2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$

	1	5	8	4
–2		–2	–6	–4
	1	3	2	0

  Volvemos a aplicar la regla de Ruffini y queda así :

  $2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2\,(x + 2)^2\,(x + 1)$

- Denominador $\rightarrow$ Sacamos factor común 4 y aplicamos la regla de Ruffini :
  $4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4(x^3 + 2x^2 - x - 2)$

	1	2	–1	–2
–2		–2	0	2
	1	0	–1	0

  Ahora aplicamos identidades notables y queda así:

  $4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4\,(x + 2)\,(x + 1)\,(x - 1)$

- Simplificación:

$$\frac{2x^3+10x^2+16x+8}{4x^3+8x^2-4x-8}=\frac{2(x+2)^2(x+1)}{4(x+2)(x+1)(x-1)}=\frac{(x+2)}{2(x-1)}=\frac{x+2}{2x-2}$$

Ejercicio nº 2.-

Solución:

a) Efectuamos el producto:

$$\frac{x^4-3x^2+2x}{x^2-2x+1}\cdot\frac{x^2-6x+9}{x^2+2x}=\frac{\left(x^4-3x^2+2x\right)\cdot\left(x^2-6x+9\right)}{\left(x^2-2x+1\right)\cdot\left(x^2+2x\right)}$$

Factorizamos para simplificar:

- $x^4 - 3x^2 + 2x = x\,(x^3 - 3x + 2)$

  Aplicamos Ruffini para calcular las raíces de las ecuación $x^3 - 3x + 2 = 0$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

Volvemos a aplicar la regla de Ruffini y queda así :

$x^4 - 3x^2 + 2x = x\,(x - 1)^2\,(x + 2)$

- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
- $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$
- $x^2 + 2x = x\,(x + 2)$

Por tanto:

$$\frac{\left(x^4-3x^2+2x\right)\cdot\left(x^2-6x+9\right)}{\left(x^2-2x+1\right)\cdot\left(x^2+2x\right)}=\frac{x\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)\cdot\left(x-3\right)^2}{\left(x-1\right)^2\cdot x\left(x+2\right)}=\left(x-3\right)^2$$

b) m.c.m. $\left[\left(x+4\right),\left(x-5\right)\right]=\left(x+4\right)\left(x-5\right)$

$$\frac{2x+4}{x+4}-\frac{2x+14}{x-5}=\frac{(2x+4)(x-5)}{(x+4)(x-5)}-\frac{(2x-14)(x+4)}{(x+4)(x-5)}=$$

$$=\frac{2x^2-10x+4x-20}{(x+4)(x-5)}-\frac{2x^2+8x-14x-56}{(x+4)\cdot(x-5)}=\frac{2x^2-6x-20-2x^2+6x+56}{(x+4)\cdot(x-5)}=$$

$$=\frac{36}{(x+4)(x-5)}=\frac{36}{x^2-x-20}$$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Solución:

$$\frac{3x^3-3x}{x^5-x}=\frac{3x\left(x^2-1\right)}{x\left(x^4-1\right)}=\frac{3x\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{3}{x^2+1}$$

En el primer paso sacamos factor común y en el segundo paso aplicamos el producto notable $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$ a la expresión $x^4 - 1$.

Ejercicio nº 4.-

Solución:

a) Efectuamos cada paréntesis y luego multiplicamos:

$$\left(\frac{1}{x}+x\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1+x^2}{x}\cdot\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{1+x^2}{x}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{1+x^2}{x+1}$$

b) Observamos que $4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$.

Así, el m.c.m. $\left[1,(2x-1),\left(4x^2-1\right)\right]=(2x-1)(2x+1)$.

Luego:

$$1+\frac{1}{2x-1}-\frac{2x}{4x^2-1}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}+\frac{2x+1}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{2x}{(2x-1)(2x+1)}=$$

$$=\frac{4x^2-1+2x+1-2x}{4x^2-1}=\frac{4x^2}{4x^2-1}$$

Ejercicio nº 5.-

Solución:

a) m.c.m. $\left[\left(x^2-x\right),(x-1),x\right]=x(x-1)$

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{2x-1}{x-1}-\frac{3x-1}{x}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{x(2x-1)}{x(x-1)}-\frac{(3x-1)(x-1)}{x(x-1)}=$$

$$=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2x^2-x}{x(x-1)}-\frac{3x^2-3x-x+1}{x(x-1)}=\frac{1+2x^2-x-3x^2+3x+x-1}{x(x-1)}=$$

$$=\frac{-x^2+3x}{x(x-1)}=\frac{x(-x+3)}{x(x-1)}=\frac{-x+3}{x-1}$$

b) Efectuamos el cociente:

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}:\frac{2x-10}{x^2-25}=\frac{\left(x^2-6x+9\right)\left(x^2-25\right)}{\left(x^2+2x-15\right)(2x-10)}$$

Factorizamos para simplificar:

- $x^2-25=(x-5)(x+5)$ $\rightarrow$ Producto notable

$2x - 10 = 2(x - 5)$

- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ por ser producto notable
- $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$, sale aplicando Ruffini

Así:

$$\frac{(x^2-6x+9)(x^2-25)}{(x^2+2x-15)(2x-10)} = \frac{(x-3)^2(x-5)(x+5)}{(x+5)(x-3)2(x-5)} = \frac{x-3}{2}$$

Ejercicio nº 6.-

Solución:

- Numerador $\rightarrow$ Sacamos factor común y descomponemos en factores el polinomio de grado 2 que nos queda:

  $x^3 + 7x^2 + 12x = x(x^2 + 7x + 12)$

  Aplicamos Ruffini y queda así:

  $x^3 + 7x^2 + 12x = x(x + 4)(x + 3)$

- Denominador $\rightarrow$ Descomponemos aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & 3 & -16 & -48 \\ 4 & & 4 & 28 & 48 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

  $x^2 + 7x + 12$ es una expresión de 2º grado , que coincide con la del numerador. Así, finalmente, el denominador descompuesto en factores será: $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = (x - 4)(x + 4)(x + 3)$

- Simplificación de la fracción algebraica:

$$\frac{x^3+7x^2+12x}{x^3+3x^2-16x-48} = \frac{x(x+4)(x+3)}{(x-4)(x+4)(x+3)} = \frac{x}{x-4}$$

Ejercicio nº 7.-

Solución:

a) Observamos que tenemos el producto notable $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

   Así:

$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x^2}\right)=x^2-\frac{1}{x^4}=\frac{x^6-1}{x^4}$$

b) Calculamos el m.c.m.$\left[(x-2),\ \left(x^2-4x+4\right)\right]$ que es $(x-2)^2$.

$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

Luego:

$$\frac{x+1}{x-2}+\frac{2+x}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}+\frac{2+x}{(x-2)^2}=\frac{x^2-2x+x-2+2+x}{(x-2)^2}=\frac{x^2}{(x-2)^2}$$

Ejercicio nº 8.-

Solución:

$$\frac{x^3-49x}{x^4-7x^3}=\frac{x\left(x^2-49\right)}{x^3(x-7)}=\frac{x(x-7)(x+7)}{x^3(x-7)}=\frac{x+7}{x^2}$$

En el primer paso sacamos factor común; en el segundo paso aplicamos la identidad notable $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$ a la expresión $x^2 - 49$

Ejercicio nº 9.-

Solución:

a) El paréntesis da prioridad a la resta:

$$\frac{2x}{x+1}-1=\frac{2x}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}$$

Efectuamos el cociente:

$$\frac{2x}{x+1}:\frac{x-1}{x+1}=\frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x}{x-1}$$

b) m.c.m. $(2x, 3x^2, 6x^4) = 6x^4$

Así:

$$\frac{x-2}{2x}-\frac{1-3x}{3x^2}+\frac{2x^2+3}{6x^4}=\frac{3x^3(x-2)}{6x^4}-\frac{2x^2(1-3x)}{6x^4}+\frac{2x^2+3}{6x^4}=$$

$$=\frac{3x^4-6x^3-2x^2+6x^3+2x^2+3}{6x^4}=\frac{3x^4+3}{6x^4}=\frac{3\left(x^4+1\right)}{6x^4}=\frac{x^4+1}{2x^4}$$