CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Los juegos de azar fueron el origen de la teoría de probabilidades; pero aunque la mayoría de los juegos de azar son tan antiguos como la humanidad misma, el cálculo de probabilidades no surgió hasta finales del siglo XVI y principios del siglo XVII.

Hoy en día el cálculo de probabilidades no sólo se ocupa de problemas asociados a los juegos de azar, sino que junto con la estadística interviene en otros ámbitos de la vida. Algunas aplicaciones son los estudios sobre expectativas de vida con el fin de fijar las primas de seguro, el análisis de las previsiones de voto ante unas elecciones, o el estudio de marketing para lanzar un nuevo producto al mercado.

1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS Y DETERMINISTAS

Algunas de las acciones que realizamos a lo largo de nuestra vida tienen un resultado definido. Si lanzas al aire una piedra, sin duda, volverá a caer. Asimismo, si accionas el interruptor de una lámpara y la bombilla está encendida, sabes que se apagará.

El resultado de estos experimentos está totalmente determinado, por lo que reciben el nombre de *experimentos deterministas.*

Sin embargo, si lanzas una moneda al aire, no puedes predecir sobre qué cara caerá. Lo mismo ocurre si lanzas un dado, sabemos que saldrá un número del 1 al 6, pero no cuál de ellos.

En estos casos no podemos predecir el resultado de los experimentos, por lo que reciben el nombre de *experimentos aleatorios.*

Un ***experimento determinista*** es aquel cuyo resultado está completamente determinado.

Un ***experimento aleatorio*** es aquel cuyo resultado no se puede predecir.

EJERCICIOS

1. Indica cuáles de los experimentos siguientes son aleatorios y cuáles no lo son.
   a) Hacer girar una ruleta y observar el número obtenido.
   b) Efectuar una reacción química y determinar los productos obtenidos.
   c) Extraer una bola de una bolsa opaca que contiene bolas rojas, bolas azules y bolas verdes, y mirar su color.
   d) Repartir una mano de cinco cartas a cada jugador y mirar las cartas que nos han tocado.
   e) Lanzar una carta en la mesa y observar si cae sobre el dorso o sobre la figura.
   f) Calentar agua hasta que entre en ebullición y mirar la temperatura que marca el termómetro.
   g) Extraer una carta de una baraja y anotar a qué palo pertenece.
   h) Arrojar una piedra al vacío y medir su aceleración.
   i) Medir la longitud de una circunferencia de radio 3 cm.
   j) Abrir las compuertas de un estanque lleno de agua y anotar qué ocurre.
2. Enuncia cuatro experimentos aleatorios y cuatro que no lo sean, diferentes de los que se describen en esta página.

2. ESPACIO MUESTRAL. SUCESOS

El primer paso que hemos de llevar a cabo al estudiar un experimento aleatorio es definir el conjunto de sus posibles resultados.

Por ejemplo, si consideramos el experimento *lanzar una moneda y observar qué cara sale*, los resultados posibles son dos: *cara* y *cruz*.

Cada uno de estos resultados se llama *suceso elemental*, y el conjunto de todos ellos recibe el nombre de *espacio muestral*.

> ***Espacio muestral*** es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se representa por la letra W y a sus elementos se les llama ***sucesos elementales.***
>
> Cualquier subconjunto del espacio muestral formado por uno o más elementos recibe el nombre de ***suceso aleatorio*** o ***suceso compuesto.***
>
> Decimos que se **verifica** o que **ocurre** un suceso cuando al realizar un experimento el resultado es uno de los que caracterizan este suceso.

Ejemplo. Del experimento aleatorio *lanzar un dado y observar qué número sale*, los sucesos elementales son {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}, por lo que el espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Algunos sucesos aleatorios pueden ser:

Salir número par: $A = \{2, 4, 6\}$

Salir un número menor que cuatro: $B = \{1, 2, 3\}$

Salir un tres o un cinco: $C = \{3, 5\}$

Ejemplo. En el experimento compuesto *lanzar una moneda y un dado,* los sucesos elementales son:

{cara, 1}, {cara, 2}, {cara, 3}, {cara, 4}, {cara, 5}, {cara, 6}

{cruz, 1}, {cruz, 2}, {cruz, 3}, {cruz, 4}, {cruz, 5}, {cruz, 6}

Y el espacio muestral:

Ω = {cara-1, cara-2, cara-3, cara-4, cara-5, cara-6, cruz-1, cruz-2, cruz-3, cruz-4, cruz-5, cruz-6}

Si tenemos un experimento aleatorio con varios sucesos definidos, puede ocurrir que, al obtener un resultado, se verifiquen simultáneamente más de uno de los sucesos considerados. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. Consideremos el experimento *lanzar dos veces consecutivas una moneda y apuntar los resultados en el orden en que aparecen*. El espacio muestral es el siguiente (llamamos C al resultado *cara* y X al resultado *cruz*):

$$\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$$

En la primera realización del experimento se obtiene el resultado CX. Determinemos cuáles de los siguientes sucesos han ocurrido:

A = sacar al menos una cara, B = sacar al menos una cruz, C = no sacar dos cruces, D = no sacar cruz

Primero determinamos los resultados que corresponden a los sucesos A, B, C y D, y a continuación comprobamos si el suceso elemental CX es uno de ellos:

$A = \{CC, CX, XC\}$ $B = \{CX, XC, XX\}$ $C = \{CC, CX, XC\}$ $D = \{CC\}$

Como el resultado CX es uno de los que caracterizan los sucesos A, B, y C, diremos que han ocurrido los sucesos A, B y C, pero no el suceso D.

Fíjate en que A y C son, en realidad, diferentes descripciones del mismo suceso.

3. Tipos de sucesos

Además de los sucesos vistos anteriormente, existen otros sucesos que presentan características especiales. Los estudiaremos a partir del experimento *lanzar un dado*.

- ***Suceso seguro*** es el que siempre se realiza, luego coincide con el espacio muestral Ω.
  Ejemplo: Salir un número menor o igual que seis = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
- ***Suceso imposible*** es el que nunca se realiza; se representa con el símbolo Æ.
  Ejemplo: Salir un número negativo.
- ***Suceso contrario*** de A es el que se realiza cuando no se realiza A; se designa por $\overline{A}$.
  Ejemplo: Consideremos el suceso A = «salir par» = {2, 4, 6}, el suceso $\overline{A}$ = «salir impar» = {1, 3, 5} se denomina suceso contrario de A, y está formado por los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A.

> Al conjunto de todos de los sucesos de un experimento aleatorio se le denomina ***espacio de sucesos***. Se designa por ***S*** y contiene $\mathbf{2^n}$ elementos, donde *n* es el número de sucesos elementales del experimento aleatorio.

Ejemplo. Estudiemos el experimento aleatorio que consiste en *lanzar un dado de quinielas y anotar el símbolo que aparece en la cara superior*.

Sucesos elementales:	{1}, {X}, {2}
Espacio muestral:	Ω = {1, X, 2}
Espacio de sucesos (tiene 2^3 = 8 elementos):	S = {Æ, {1}, {X}, {2}, {1, X}, {1, 2}, {X, 2}, {1, X, 2}}
Suceso seguro:	Ω = {1, X, 2}
Suceso imposible:	Æ
Suceso contrario:	Dado el suceso A = {1, X}, el suceso contrario $\overline{A}$ = {2}
Otros sucesos:	B = {1, 2}, C = {X, 2}

4. Operaciones con sucesos

Una *operación* entre sucesos de un experimento aleatorio es una regla o criterio que nos permite obtener otro suceso del mismo experimento aleatorio. Las dos operaciones más importantes son la *unión* y la *intersección*.

En el experimento aleatorio *lanzar un dado*, cuyo espacio muestral es Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, consideremos los siguientes sucesos:

A = «salir número par» = {2, 4, 6}   B = «salir número primo» = {2, 3, 5}

4.1. Unión de sucesos

Formemos el suceso «salir número par o primo» = {2, 3, 4, 5, 6}. Este suceso se llama *suceso unión* de A y B.

> Dados dos sucesos A y B, de un mismo experimento aleatorio, llamamos ***suceso unión*** **de A y B** al suceso que se realiza cuando se realiza A o B. Está formado por todos los sucesos elementales de A y de B. Se representa por **A ∪ B.**

4.2. Intersección de sucesos

Formemos el suceso «salir número par y primo» = {2}. Este suceso se llama *suceso intersección* de A y B.

Dados dos sucesos A y B, de un mismo experimento aleatorio, llamamos ***suceso intersección* de A y B** al suceso que se realiza cuando se realizan simultáneamente los sucesos A y B. Está formado por los sucesos elementales comunes a los sucesos A y B. Se representa por **A ∩ B.**

Los sucesos C = «salir un número menor que 3» = {1, 2} y D = «salir un número múltiplo de 3» = {3, 6} no se verifican al mismo tiempo, no tienen ningún suceso elemental común. Se dice que son *sucesos incompatibles*.

En cambio, los sucesos E = «salir un número menor que 4» = {1, 2, 3} y F = «salir un número par» = {2, 4, 6} tienen en común el suceso elemental {2}. Los sucesos E y F son *compatibles*.

Dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio son ***incompatibles*** cuando no tienen ningún suceso elemental común. Su intersección es el suceso imposible: si **A ∩ B** = **Æ,** entonces A y B son ***incompatibles*** Dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio son ***compatibles*** cuando tienen algún suceso elemental común. Su intersección es distinta del suceso imposible: si **A ∩ B** ¹ **Æ,** entonces A y B son ***compatibles***

Ejemplo. Halla la unión y la intersección de los siguientes sucesos.

A = {1, 2, 5} y B = {2, 3, 5}	⇒	A ∪ B = {1, 2, 3, 5}	;	A ∩ B = {2, 5}
C = {2, 4, 6} y D = {2, 5}	⇒	C ∪ D = {2, 4, 5, 6}	;	C ∩ D = {2}
E = {1, 3} y F = {1, 3, 6}	⇒	E ∪ F = {1, 3, 6}	;	E ∩ F = {1, 3}
G = {3} y H = {5}	⇒	G ∪ H = {3, 5}	;	G ∩ H = Æ
I = {2, 5} y J = {1, 3, 6}	⇒	I ∪ J = {1, 2, 3, 5, 6}	;	I ∩ J = Æ
K = {2, 4} y L = {1, 6}	⇒	K ∪ L = {1, 2, 4, 6}	;	K ∩ L = Æ

Ejemplo. En una clase hay personas rubias, morenas y pelirrojas. Veamos la compatibilidad de distintos sucesos.

Suceso A	Suceso B	Compatibilidad
Persona rubia	Chico	Compatibles
Chica	Chico	Incompatibles
Chico	Persona morena	Compatibles
Persona rubia	Persona Pelirroja	Incompatibles

EJERCICIOS

3. Sea el experimento que consiste en *lanzar un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6* y consideremos los siguientes sucesos:
   A = {1, 2, 3} B = {3, 4} C = {5, 6} D = {3}
   Halla los sucesos A ∪ B, A ∪ C, B ∪ D, B ∩ C, A ∩ B, C ∩ D, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ y $\overline{D}$.
4. Para los sucesos del ejercicio anterior, indica cuáles son compatibles y cuáles incompatibles.
5. Razona que la unión de dos sucesos contrarios es el suceso seguro y la intersección es el suceso imposible, es decir, $A \cup \overline{A} = \Omega$ y $A \cap \overline{A}$ = Æ.

6. En una bolsa se tienen ocho bolas numeradas del 1 al 8. Se realiza el experimento que consiste en *extraer una bola y anotar su número*. Consideremos los siguientes sucesos:
   A = {3, 5, 7, 8}   B = {1, 2, 3, 4, 5}   C = {3, 6, 8}
   Forma los sucesos A ∪ B, A ∪ C, B ∩ C, A ∩ B, A ∩ B ∩ C, $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$.

5. Probabilidad de un suceso

En un experimento aleatorio no podemos conocer de antemano cuáles serán los resultados, pero sería interesante saber si éstos presentan algún tipo de regularidad.

5.1. Frecuencia absoluta y relativa de un suceso

En la tabla siguiente anotamos los resultados obtenidos al lanzar 500 veces un dado.

Puntuación	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Suma**
n_i	81	86	82	87	88	76	500

Los números 81, 86, 82, 87, 88 y 76 son las *frecuencias absolutas* de cada uno de los sucesos elementales {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}.

Por otra parte, si lo que queremos es comparar el comportamiento de un suceso cuando varía el número de realizaciones, no basta con conocer la frecuencia absoluta. En este caso calculamos el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de realizaciones. El valor obtenido es la *frecuencia relativa* del suceso.

Puntuación	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Suma**
n_i	81	86	82	87	88	76	500
f_i	0’162	0’172	0’164	0’174	0’176	0’152	1

Nota. En ocasiones es común ver expresadas las frecuencias relativas en tanto por ciento: 16’2 %, 17’2 %, 16’4 %, 17’4 %, 17’6 % y 15’2 %.

El número de veces que ocurre un suceso al realizar un experimento aleatorio un número determinado n de veces se llama ***frecuencia absoluta*** del suceso. Se denota por n_i.

El cociente entre la frecuencia absoluta de un suceso y el número de realizaciones se llama ***frecuencia relativa*** del suceso. Se denota por f_i. Es decir, la frecuencia relativa es la frecuencia absoluta expresada en tanto por uno: $f_i = n_i / n$.

Propiedades de las frecuencias relativas

- La suma de las frecuencias relativas correspondientes a todos los resultados (sucesos elementales) es 1.
- La frecuencia relativa de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.
- La frecuencia relativa de un suceso es igual a la suma de las frecuencias relativas de los sucesos elementales que lo componen.
  Si A = «salir número par» = {2, 4, 6}, su frecuencia relativa es: 0’172 + 0’174 + 0’152 = 0’498.
- La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.
  El suceso seguro lo forman todos los sucesos elementales y la suma de sus frecuencias relativas es 1.
- La frecuencia relativa del suceso imposible es 0.
  El suceso imposible no lo forma ningún resultado, es el vacío, y su frecuencia relativa es 0.

Ejemplo. En un bombo hay diez bolas numeradas del 0 al 9. Se repite 100 veces el experimento *extraer una bola y reemplazarla.* Los resultados obtenidos fueron:

Bola	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Suma**
n_i	7	13	11	12	8	10	12	6	10	11	100

Se consideran los siguientes sucesos: A = «múltiplo de 3», B = «número impar» y C = «divisor de 6». Hallamos las frecuencias relativas de los sucesos A, B, C, A ∪ B, A ∩ B, A ∪ C y A ∩ C.

Para hallar las frecuencias relativas de los sucesos mencionados calculamos las frecuencias relativas de cada uno de los sucesos elementales, y sumamos las que componen dichos sucesos:

Bola	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Suma**
f_i	0’07	0’13	0’11	0’12	0’08	0’10	0’12	0’06	0’10	0’11	1

Sucesos	Frecuencias relativas	En %
A = {3, 6, 9}	f_A = 0’12 + 0’12 + 0’11 = 0’35	35 %
B = {1, 3, 5, 7, 9}	f_B = 0’13 + 0’12 + 0’10 + 0’06 + 0’11 = 0’52	52 %
C = {1, 2, 3, 6}	f_C = 0’13 + 0’11 + 0’12 + 0’12 = 0’48	48 %
A ∪ B = {1, 3, 5, 6, 7, 9}	$f_{A \cup B}$ = 0’13 + 0’12 + 0’10 + 0’12 + 0’06 + 0’11 = 0’64	64 %
A ∩ B = {3, 9}	$f_{A \cap B}$ = 0’12 + 0’11 = 0’23	23 %
A ∪ C = {1, 2, 3, 6, 9}	$f_{A \cup C}$ = 0’13 + 0’11 + 0’12 + 0’12 + 0’11 = 0’59	59 %
A ∩ C = {3, 6}	$f_{A \cap C}$ = 0’12 + 0’12 = 0’24	24 %

5.2. Definición de probabilidad

Si lanzamos una moneda 10 veces esperamos obtener 5 caras y 5 cruces, pero si lo intentas, verás que casi nunca ocurre así.

Ahora bien, cuando el número de lanzamiento es muy grande se observan ciertas regularidades en los resultados. Observa la tabla de frecuencias absolutas y relativas para el suceso «salir cara» a medida que aumenta el número de realizaciones.

Lanzamientos	**100**	**200**	**300**	**400**	**500**	**600**	**700**	**800**	**900**
n_i	56	107	144	194	245	303	357	396	448
f_i	0’560	0’535	0’480	0’485	0’490	0’505	0’510	0’495	0’497

Hemos anotado los resultados de 100 en 100 lanzamientos. Puedes observar en la tabla que la frecuencia relativa esperada, 0’5, no se obtiene en ningún caso, sin embargo, conforme aumentamos el número de lanzamientos las frecuencias se van acercando más al valor 0’5.

La **ley de los grandes números** dice que al repetir un experimento aleatorio un número muy grande de veces, la frecuencia relativa de cada uno de los sucesos elementales tiende a estabilizarse aproximándose a un número fijo que es la *probabilidad* de que ese suceso ocurra.

Dado un experimento aleatorio, la ***probabilidad de un suceso* A, *P*(A),** es el valor hacia el cual se aproximan las frecuencias relativas de dicho suceso conforme aumenta el número de realizaciones del experimento.

Es decir, la **probabilidad** de un suceso es la proporción de veces que el suceso ocurriría en un número muy grande de pruebas. La frecuencia relativa y, por tanto, la probabilidad, se aproximan más y más cuanto mayor es el número de repeticiones de un mismo experimento aleatorio.

De acuerdo con esto, podemos considerar previsible que el suceso «salir cara» ocurra en un 50 % de los lanzamientos, y lo mismo para el suceso «salir cruz». Por consiguiente:

$$P(\text{salir cara}) = 0'5 \qquad\qquad P(\text{salir cruz}) = 0'5$$

Ejemplo. Se lanza un dado con forma de tetraedro con las caras numeradas del 1 al 4 y se anotan las veces que aparece cara 1.

Lanzamientos	20	40	60	80	100
n_i	6	11	15	18	26

Obtenemos la tabla de frecuencias relativas y vemos hacia qué valor tiende:

Lanzamientos	20	40	60	80	100
n_i	6	11	15	18	26
f_i	0'30	0'275	0'25	0'225	0'26

Las frecuencias relativas tienden hacia el valor 0'25, en otras palabras, $P(\text{salir } 1) = 0'25$.

EJERCICIOS

7. Si realizamos el experimento aleatorio consistente en *lanzar dos monedas a la vez* 200 veces y vamos anotando las frecuencias relativas del suceso *salir dos cruces*, ¿hacia qué valor se acercarán dichas frecuencias?
8. En una bolsa hay 5 bolas rojas, 10 verdes y 5 azules. Se extrae una bola. ¿Tienen igual probabilidad los sucesos «sacar bola roja» y «sacar bola verde»? ¿Y los sucesos «sacar bola roja» y «sacar bola azul»?
9. Numera cinco fichas iguales con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, e introdúcelas en una bolsa opaca. Repite 150 veces la operación de *extraer una ficha, anotarla y volverla a introducir en la bolsa*.

   a) Completa la siguiente tabla de frecuencias con los resultados parciales cada 50 extracciones.

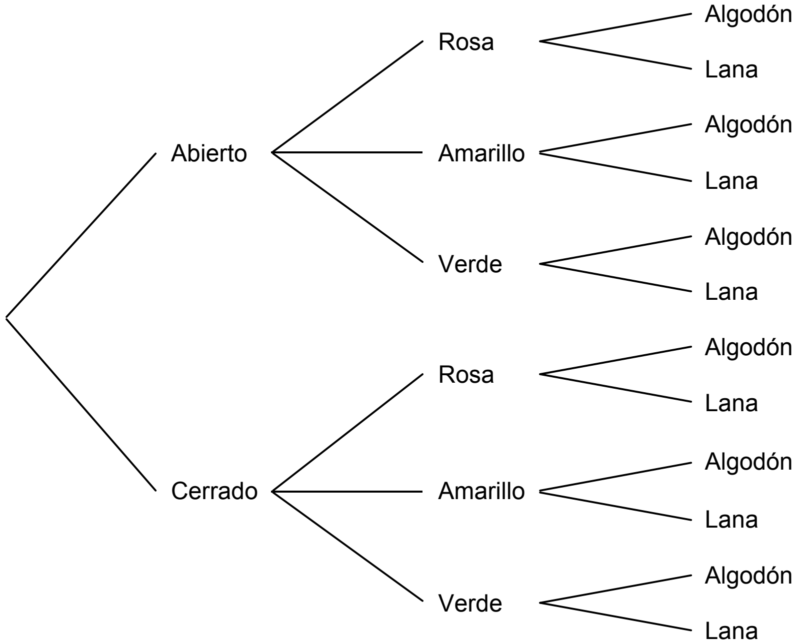
Suceso	Frecuencias	Extracciones		
		50	100	150
1	Absoluta			
	Relativa			
2	Absoluta			
	Relativa			
3	Absoluta			
	Relativa			
4	Absoluta			
	Relativa			
5	Absoluta			
	Relativa			

   b) ¿Qué probabilidad asignarías a cada uno de los sucesos elementales?
   c) ¿Qué probabilidad asignarías al suceso «obtener un número par»? ¿Y al suceso «obtener un número impar»?

6. Técnicas de recuento. Diagrama en árbol

Juan quiere regalar a su hermana un jersey, pero duda si abierto o cerrado; rosa, amarillo o verde; y de algodón o de lana. ¿Cuántas posibilidades tiene?

Observa el siguiente **diagrama en árbol:**



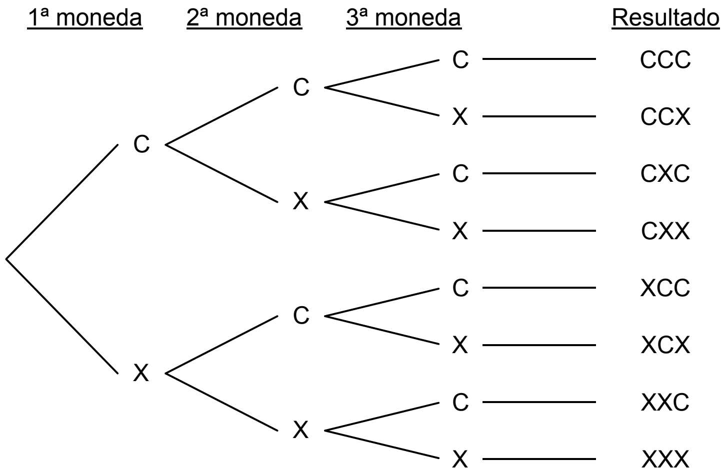
Formas posibles	$\times$	Colores posibles	$\times$	Calidades posibles		
2	$\times$	3	$\times$	2	=	12

Por tanto, tiene 12 posibilidades de elegir jersey.

> Si un primer experimento tiene ***m*** resultados distintos y un segundo experimento tiene ***n*** resultados distintos, entonces el número de resultados distintos para el experimento compuesto por ambos es ***m*** $\times$ ***n***.

Ejemplo. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio consistente en lanzar tres monedas.

Formamos el diagrama en árbol para este experimento:



Así, Ω = {CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX}, que consta de $2 \times 2 \times 2 = 8$ elementos.

Ejemplo. Se lanzan una moneda y un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

Como la moneda tiene dos posibilidades y el dado seis, el espacio muestral tendrá $2 \times 6 = 12$ elementos.

EJERCICIOS

10. Se efectúa un experimento que consiste en el *lanzamiento de una moneda y un dado y la extracción de una carta de una baraja española*. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral del experimento compuesto?

7. Regla de Laplace

En un bombo hay diez bolas numeradas del 0 al 9. Todas las bolas tienen la misma probabilidad de salir. Si extraemos una de ellas, la probabilidad de que sea el número 5 será de 1 entre 10, es decir:

$$\frac{1}{10}$$

La probabilidad de los sucesos compuestos se obtiene sumando las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman. Así, la probabilidad del suceso A = «salir número mayor o igual que 7» es:

$$P(\text{A}) = P(7) + P(8) + P(9) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

En clase, el profesor pide un voluntario y como no lo encuentra introduce en una bolsa 20 papelitos iguales con el nombre de cada alumno. La probabilidad de salir «voluntario» es la misma para todos los alumnos:

$$\frac{1}{20}$$

En ambos casos, todos los sucesos son ***equiprobables,*** es decir, tienen la misma probabilidad de ocurrir. En 1812 el matemático francés Pierre Simon de Laplace dio la primera definición de probabilidad para sucesos equiprobables, que dice así:

> Si todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio son **equiprobables**, la probabilidad de un suceso A es:
>
> $$\boldsymbol{P(\text{A})} = \frac{\textbf{Número de casos favorables al suceso A}}{\textbf{Número de casos posibles}}$$

Ejemplo. Lanzamos un dado. Hallar la probabilidad de los sucesos A = «salir número impar» y B = «salir múltiplo de 3».

El espacio muestral del experimento aleatorio es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Los sucesos cuya probabilidad nos piden son:

A = «salir número impar» = $\{1, 3, 5\}$ $\Rightarrow$ $P(\text{A}) = \frac{3}{6}$ (existen tres casos favorables y 6 casos posibles)

B = «salir múltiplo de 3» = $\{3, 6\}$ $\Rightarrow$ $P(\text{B}) = \frac{2}{6}$ (existen dos casos favorables y 6 casos posibles)

Ejemplo. Lanzamos dos monedas consecutivamente. Hallar la probabilidad de los sucesos A = «obtener dos caras» y B = «obtener al menos una cruz».

El espacio muestral es Ω = {CC, CX, XC, XX}. Los sucesos cuya probabilidad nos piden son:

A = «obtener dos caras» = {CC} $\Rightarrow P(\text{A}) = \frac{1}{4}$

B = «obtener al menos una cruz» = {CX, XC, XX} $\Rightarrow P(\text{B}) = \frac{3}{4}$

EJERCICIOS

11. Lanzamos dos dados y sólo anotamos su suma. El espacio muestral es Ω = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Halla la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales. ¿Son equiprobables?
12. Una bolsa A contiene 12 bolas verdes y 4 rojas, y otra bolsa B contiene 20 bolas verdes y 10 rojas. ¿En qué bolsa es más probable obtener una bola verde?
13. En una bolsa se introducen 4 bolas azules, 4 rojas y 2 verdes. Se agita la bolsa y seguidamente se extraen tres bolas, de las que dos son rojas y una azul. A continuación se extrae otra bola. ¿Qué color es el que tiene mayor probabilidad de ser elegido?
14. Halla la probabilidad de que la suma de los puntos de las caras visibles de un dado que se lanzó al azar sea múltiplo de 5.

8. Propiedades de la probabilidad

Vamos a analizar las propiedades de la probabilidad. Como verás a continuación, son muy similares a las de las frecuencias relativas. Recuerda la relación que existe entre ambas.

ESCALA DE PROBABILIDAD

- La probabilidad del suceso seguro es 1: ***P*(W) = 1**

  En primer lugar, la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es 1. En el lanzamiento de un dado, Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

  El suceso seguro coincide con el espacio muestral, luego su probabilidad es la unidad.

- La probabilidad del suceso imposible es 0: ***P*(Æ) = 0**

  El suceso imposible no lo forma ningún suceso elemental, es el vacío, luego su probabilidad es cero.

- La probabilidad de un suceso A es un número comprendido entre 0 y 1: **0 £ *P*(A) £ 1**
  Cualquier otro suceso nos daría que la probabilidad es un número comprendido entre 0 y 1.

PROBABILIDAD DEL SUCESO CONTRARIO

- Si A y $\overline{\text{A}}$ son sucesos contrarios: $\boldsymbol{P(\overline{\text{A}}) = 1 - P(\text{A})}$

  En una bolsa hay 7 bolas blancas, 3 verdes y 2 rojas.

  La probabilidad del suceso A = «sacar una bola blanca» es: $P(\text{A}) = \frac{7}{12}$

La probabilidad del suceso contrario de A es $\overline{A}$ = «sacar una bola verde o roja» es: $P(\overline{A}) = \dfrac{5}{12}$

Observa que todos los sucesos elementales (las 12 bolas) se han tenido en cuenta en A o en $\overline{A}$. La suma de todos los casos favorables es entonces igual al número de casos posibles. Por tanto:

$$P(A) + P(\overline{A}) = \frac{7}{12} + \frac{5}{12} = \frac{12}{12} = 1 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Ejemplo. Una urna contiene 20 bolas rojas, 15 azules y 7 verdes. Se extrae una bola. Hallar la probabilidad de que sea roja o verde.

Si representamos por R = «obtener una bola roja», A = «obtener una bola azul» y V = «obtener una bola verde», se tiene:

P(roja o verde) = 1 − P(azul) = 1 − P(A) = $1 - \dfrac{15}{42} = \dfrac{27}{42} = \dfrac{9}{14}$

PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE SUCESOS

- Si dos sucesos , A y B, son **incompatibles,** se verifica: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

  Para el experimento del lanzamiento del dado consideremos los sucesos incompatibles A = {2, 4, 6}, B = {5} y el suceso unión A ∪ B = {2, 4, 5, 6} (observa que A ∩ B = Æ). Si calculamos sus probabilidades, resulta:

$$P(A) = \frac{3}{6} \;;\quad P(B) = \frac{1}{6} \;;\quad P(A \cup B) = \frac{4}{6} = P(A) + P(B)$$

- Si A y B son dos sucesos **compatibles,** se verifica: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

  Consideremos ahora los sucesos A = «obtener un número impar» y B = «obtener un múltiplo de 3». Estos sucesos son compatibles. Si calculamos sus probabilidades, resulta:

  A = {1, 3, 5} $\Rightarrow$ $P(A) = \dfrac{3}{6}$; B = {3, 6} $\Rightarrow$ $P(B) = \dfrac{2}{6}$;

  A ∪ B = {1, 3, 5, 6} $\Rightarrow$ $P(A \cup B) = \dfrac{4}{6}$; A ∩ B = {3} $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$

  Con estos resultados podemos comprobar la relación: $\dfrac{4}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{2}{6}$,

  Es decir, P(A ∪ B) + P(A ∩ B) = P(A) + P(B), y despejando: P(A ∪ B) = P(A) + P(B) − P(A ∩ B)

Ejemplo. En el experimento aleatorio consistente en *extraer una carta de una baraja española* se consideran los sucesos A = «obtener una espada», B = «obtener un as» y C = «obtener el rey de copas». Hallar la probabilidad de los sucesos A ∪ B y A ∪ C.

A y B son compatibles, luego $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{10}{40} + \dfrac{4}{40} - \dfrac{1}{40} = \dfrac{13}{40}$

A y C son incompatibles, por tanto $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \dfrac{10}{40} + \dfrac{1}{40} = \dfrac{11}{40}$

EJERCICIOS

15. Si extraes una carta de una baraja española, , calcula la probabilidad de que:
    a) Sea un rey b) Sea un oro c) Sea el rey de oros d) Sea un rey o un oro

16. Se *lanzan simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6*. Halla la probabilidad de que:
    a) La suma de los puntos obtenidos sea menor que 7.
    b) La suma de los puntos obtenidos sea o bien 3, o bien 4, o bien 5.

17. Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Se extrae una al azar. Determina la probabilidad de que:
    a) Sea roja o verde b) No sea roja

18. Un dado está trucado de modo que la probabilidad de obtener las distintas caras es directamente proporcional al número de éstas. Calcula:
    a) La probabilidad de cada una de las caras.
    b) La probabilidad de sacar un número par.

19. Halla la probabilidad de un suceso sabiendo que la suma de su cuadrado y la del cuadrado de la probabilidad del suceso contrario es igual a 5/9.

9. Probabilidad de sucesos en experimentos compuestos

Vamos a ver la forma de hallar la probabilidad de un suceso en un experimento compuesto a partir de las probabilidades de los sucesos de los experimentos simples que lo componen.

Para ello resolveremos el siguiente ejemplo, primero aplicando la definición de Laplace y posteriormente como producto de probabilidades de los sucesos de los experimentos simples.

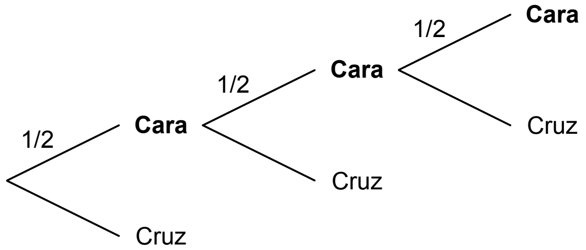
En el experimento aleatorio de *lanzar tres veces una moneda* queremos hallar la probabilidad de «obtener tres caras».

El espacio muestral es: $\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$

Como tenemos 1 sólo caso favorable de 8 posibles, la probabilidad pedida es:

$$P(C \cap C \cap C) = \frac{1}{8}$$

Observa ahora en el siguiente diagrama en árbol como obtenemos la probabilidad pedida sin más que calcular el producto de las probabilidades de cada suceso del siguiente modo:



$$P(C \cap C \cap C) = P(C) \cdot P(C) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

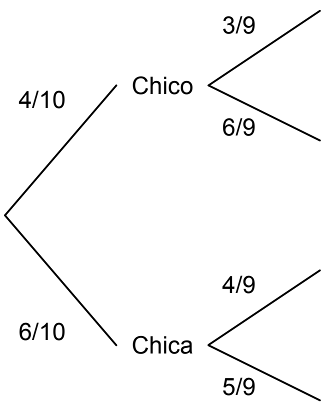
En los experimentos compuestos cada resultado viene dado por un camino del diagrama en árbol; si indicamos sobre cada rama su probabilidad, vemos que podemos obtener la probabilidad del camino multiplicando las probabilidades de cada una de sus ramas. Este es un importante resultado que se conoce como **regla del producto.**

En los experimentos compuestos la probabilidad de un resultado es igual al producto de las probabilidades de las ramas del diagrama en árbol que forman el camino que da lugar a ese resultado.

9.1. Probabilidad total

Se quiere formar una comisión compuesta por dos miembros de un grupo en el que hay 4 chicos y 6 chicas. Para ello se escriben en tarjetas los nombres de cada uno de ellos, se introducen en una bolsa y se extraen a continuación dos tarjetas.

El diagrama en árbol del experimento es el siguiente:



Chico ⇒ $P(\text{2 chicos}) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$

Chica ⇒ $P(\text{chico y chica}) = \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$

Chico ⇒ $P(\text{chica y chico}) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$

Chica ⇒ $P(\text{2 chicas}) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$

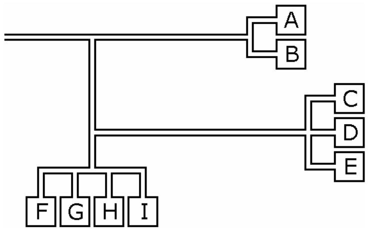
Pero la probabilidad de que la comisión la formen dos personas de distintos sexo viene dada por la suma de dos probabilidades:

$$P(\text{distinto sexo}) = P(\text{chico y chica}) + P(\text{chica y chico}) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

Si un suceso se puede obtener por más de un camino del diagrama en árbol, su probabilidad se obtiene sumando las probabilidades de todos los caminos de ese suceso.

EJERCICIOS

20. Imagínate que la probabilidad de nacer varón es 0'46. De una familia con tres hijos, calcula la probabilidad de que:
    a) Los tres sean varones
    b) Ninguno sea varón
21. Se lanzan al aire tres monedas. Determina la probabilidad de que se obtengan al menos dos cruces.
22. Se lanzan tres dados al aire. Calcula la probabilidad de que se obtenga:
    a) Un 4 en cada dado
    b) Una suma total de puntos igual a 8
23. En un centro escolar, los alumnos pueden optar, por cursar como lengua extranjera, entre inglés o francés. En un determinado curso, el 90 % estudia inglés, y el resto, francés. El 30 % de los que estudian inglés son varones, y de los que estudian francés, son chicos el 40 %. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?
24. Un robot empieza a explorar un laberinto. Los caminos que salen de cada bifurcación son equiprobables. Al final de cada camino hay una trampa. ¿En cuál de las trampas es más probable que acabe el robot, o son todas las trampas equiprobables?



10. Probabilidad condicionada. Sucesos dependientes e independientes

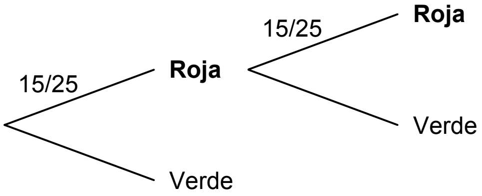
En una urna hay 15 bolas rojas y 10 verdes. Extraemos dos bolas de la urna y queremos hallar la probabilidad de que ambas sean rojas en los siguientes casos:

a) Devolviendo la primera bola extraída

b) Sin devolverla

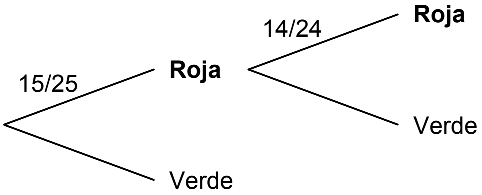
Representamos por R_1 = «obtener bola roja en la primera extracción» y por R_2 = «obtener bola roja en la segunda extracción».

***a*) Con devolución.** Según el diagrama en árbol, tenemos:



$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{15}{25} \cdot \frac{15}{25} = \frac{225}{625} = \frac{9}{25}$$

***b*) Sin devolución.** Según el diagrama en árbol, tenemos:



$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} = \frac{210}{600} = \frac{7}{20}$$

En el caso *a*), el resultado de la primera extracción no influye o condiciona el de la segunda; se dice que los ***sucesos son independientes.*** En cambio en *b*), el resultado obtenido en la primera extracción condiciona el resultado de la segunda, ya que supuesto que se ha obtenido una bola roja, como no se devuelve, tenemos 14 bolas rojas y 24 bolas en total. Por ello se dice que los ***sucesos son dependientes.***

La probabilidad de que ocurra R_2 supuesto ocurrido R_1 se llama ***probabilidad de*** $\mathbf{R_2}$ ***condicionada a*** $\mathbf{R_1}$**,** y se representa por $\boldsymbol{P(R_2 / R_1)}$**.** Escribimos entonces:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2 / R_1)$$

Si **A** y **B** son sucesos ***independientes*** se verifica: $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$
Si **A** y **B** son sucesos ***dependientes*** se verifica: $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B / A)}$
Se escribe $\boldsymbol{P(B / A)}$ a la ***probabilidad de B condicionada a A.***

Por tanto, como hemos visto anteriormente, en el caso *a*) los sucesos R_1 y R_2 son independientes, luego:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{15}{25} \cdot \frac{15}{25} = \frac{9}{25}$$

mientras que en el caso *b*) los sucesos R_1 y R_2 son dependientes y, por tanto:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2 / R_1) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} = \frac{7}{20}$$

Ejemplo. Una urna contiene las siguientes cinco bolas: O N N N O . Se extrae una bola dos veces seguidas y se escriben en una pizarra las letras obtenidas en el orden en que van apareciendo. Hallar la probabilidad de obtener la palabra NO, en los siguientes casos:

a) Devolviendo a la urna la bola extraída después de cada extracción.
b) Sin devolver la bola extraída.

a) Sucesos independientes: $P(\text{N} \cap \text{O}) = P(\text{N}) \cdot P(\text{O}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

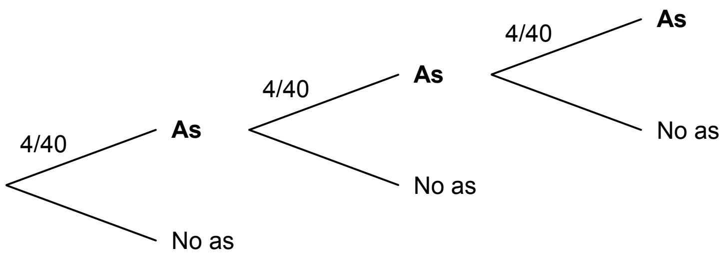
b) Sucesos dependientes: $P(\text{N} \cap \text{O}) = P(\text{N}) \cdot P(\text{O} / \text{N}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Ejemplo. Extraemos de una baraja tres cartas. Hallar la probabilidad de que sean tres ases en los siguientes casos:

a) Con devolución después de cada extracción.
b) Sin devolución.

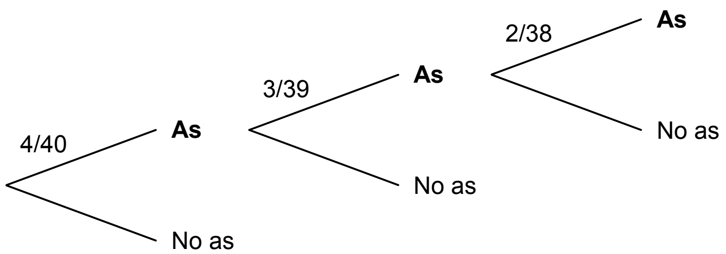
Representamos por A_i = «obtener un as en la extracción i», i = 1, 2, 3.

a) Los resultados de cada extracción no condicionan los siguientes; por ello, los sucesos son independientes.



$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{64}{64.000} = \frac{1}{1.000}$$

b) En este caso los sucesos son dependientes, pues el resultado de cada extracción si condicionan los siguientes.



$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{24}{59.280} = \frac{1}{2.470}$$

EJERCICIOS

25. Sean A, B y C tres sucesos independientes tales que $P(\text{A}) = 0'2$, $P(\text{B}) = 0'8$ y $P(\text{C}) = 0'7$. Halla la probabilidad de los sucesos $\text{A} \cup \text{B}$, $\text{A} \cup \text{C}$ y $\text{A} \cap \text{B} \cap \text{C}$.

26. Extraemos de una baraja dos cartas. Calcula la probabilidad de que sean dos oros en los siguientes casos:
    a) Con devolución después de cada extracción.
    b) Sin devolución.

27. Extraemos de una baraja dos cartas. Calcula la probabilidad de que sean del mismo palo en los siguientes casos:
    a) Con devolución después de cada extracción.
    b) Sin devolución.

28. En una urna hay 15 bolas azules, 10 amarillas y 5 verdes. Extraemos tres bolas de la urna y queremos hallar la probabilidad de que las tres sean amarillas en los siguientes casos:
    a) Con devolución después de cada extracción.
    b) Sin devolución.

29. En una urna hay 11 bolas, tales que en cada una de ellas figura una letra de la palabra MATEMATICAS. Se extrae cinco veces seguidas una bola. Halla la probabilidad de que se obtengan las bolas en el orden de la palabra MATES, considerando las extracciones primero con devolución y después sin devolución.

30. Se ha comprobado que en una ciudad están enfermos con diarrea el 60 % de los niños, con sarampión, el 50 %, y con ambas enfermedades, el 20%.
    a) Calcula la probabilidad de que, elegido un niño al azar, esté enfermo con diarrea, o sarampión o con ambas enfermedades.
    b) En un colegio con 450 niños, ¿cuántos cabe esperar que estén enfermos con diarrea o sarampión?

31. Un objeto está formado por tres partes A, B y C. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de un defecto en A es 0'03, de un defecto en B es 0'04, y de un defecto en C es 0'08. ¿Cuál es la probabilidad de que el objeto no sea defectuoso?

32. La probabilidad de que una bomba lanzada por un avión haga blanco en el objetivo es 1/3. Halla la probabilidad de alcanzar el objetivo si se tiran tres bombas seguidas.

33. A un paciente se le aplican tres sueros independientes con probabilidades de éxito 0'90, 0'95 y 0'92. Halla la probabilidad de que el paciente se cure.

34. Tenemos dos urnas, una A que contiene 3 bolas rojas y 2 verdes y otra B que contiene 2 bolas rojas y 3 verdes.
    a) Se toma al azar una bola de cada urna. Escribe el espacio muestral.
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean de color verde?
    c) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean de distinto color?
    d) Si ahora una de las urnas se escoge al azar y a continuación se extrae una bola de la urna elegida, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?

35. Un estudiante de historia busca en tres libros una pirámide de población que necesita para un trabajo. Las probabilidades de encontrarla en el primero, segundo o tercero son, respectivamente, 0'5, 0'6 y 0'7. Halla la probabilidad de que la encuentre:
    a) Solamente en un libro.
    b) Únicamente en dos libros.
    c) En los tres libros.

36. Halla la probabilidad de ganar dos de tres juegos independientes, si la probabilidad de ganar cualquiera de ellos es 0'01.

37. La probabilidad de que una persona sea rubia es 0'4 y la probabilidad de que tenga los ojos negros es 0'3. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:
    a) Que sea rubia y tenga los ojos negros.
    b) Que sea rubia o tenga los ojos negros.
    c) Que sean tres personas rubias.

38. Para la señalización de emergencia de un colegio se han instalado dos indicadores que funcionan independientemente. La probabilidad de que el indicador funcione cuando se produce la avería es 0'99 para el primero de ellos y 0'95 para el segundo. Halla la probabilidad de que durante la avería funcione solamente uno.

39. La probabilidad de que un hombre y una mujer de 18 años vivan 50 años más es 0'6 y 0'7, respectivamente. Calcula la probabilidad de que pasados los cincuenta años:
    a) Vivan ambos.
    b) Viva sólo la mujer.
    c) Viva al menos uno de los dos.
    d) Ni viva ninguno de los dos.

40. Un opositor ha preparado 10 de los 14 temas de que consta el programa de la asignatura. Se eligen al azar tres temas. Calcula la probabilidad de que conteste bien:
    a) Exactamente a dos temas.
    b) A dos temas por lo menos.

41. Tenemos tres urnas, una A que contiene 5 bolas rojas y 3 verdes, una B con 2 rojas y 4 verdes, y una urna C que contiene 3 rojas y 2 verdes. Se lanza un dado cúbico; si sale el suceso «obtener un número par» se elige la urna A, si sale {3, 5} se elige la urna B y si sale el suceso {1} se elige la urna C. A continuación, de la urna elegida, se extrae una bola al azar. Halla la probabilidad de que sea de color verde.