FUNCIONES Y GRÁFICAS

1. DEPENDENCIA ENTRE MAGNITUDES

- **Relaciones dadas por tablas**

En una clase de laboratorio un alumno ha medido la temperatura de un líquido según se calentaba. Los resultados del experimento los anotaba en la siguiente tabla.

$x \equiv$ tiempo (minutos)	0	1	2	3	…
$y \equiv$ temperatura (º C)	20	24	28	32	…

La temperatura del líquido (*variable dependiente*) depende del tiempo (*variable independiente*) que se esté calentando. Existe una relación entre las magnitudes tiempo y temperatura.

- **Relaciones dadas por una gráfica**

La siguiente gráfica representa la variación de la temperatura de un enfermo de un hospital a lo largo de un día. A partir de ella es fácil determinar la relación entre la temperatura y las horas. Por ejemplo, la temperatura mínima se ha alcanzado a las dos de la tarde (14:00 horas) y la máxima a las ocho de la tarde (20:00 horas).

La gráfica nos da una visión intuitiva de la relación entre dos magnitudes y el comportamiento de una magnitud en función de la otra. Nuevamente, la temperatura del enfermo (*variable dependiente*) depende de la hora del día (*variable independiente*).

- **Relaciones dadas por fórmulas**

Muchas de las relaciones entre magnitudes que se presentan en la práctica vienen dadas por expresiones algebraicas.

— El volumen (V) de un cubo depende de la longitud (a) de la arista. La fórmula que relaciona ambas magnitudes es $V = a^3$.

— Si el precio de 1 kg de naranjas es 100 pesetas, el coste (C) de la compra de naranjas depende del número (k) de kilogramos. La fórmula que relaciona ambas magnitudes es $C = 100k$.

En los anteriores ejemplos conocemos la relación entre dos magnitudes y el comportamiento de una magnitud en función de la otra.

> ***Variable dependiente*** es la que está en función de otra que denominamos ***variable independiente.*** La variable dependiente se suele designar con la letra ***y***, y la variable independiente con la letra ***x***.

2. CONCEPTOS ASOCIADOS A UNA FUNCIÓN

Las relaciones que hemos visto anteriormente tienen una característica común: a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente. Una relación de este tipo se llama *función*.

> Una ***función*** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la variable independiente ***x*** le corresponde **un único valor** de la variable dependiente ***y.***
>
> Para indicar que una magnitud (y) depende o es función de otra (x) se utiliza la notación $\boldsymbol{y = f(x)}$**,** que se lee *"y es función de x"*.

Las funciones son como máquinas a las que se les introduce un elemento, x, y devuelven otro valor, $y = f(x)$.

Las teclas de la calculadora definen funciones mediante fórmulas. Por ejemplo, la tecla de la raíz cuadrada positiva $\boxed{\surd}$ define la función $y = \sqrt{x}$ o, si lo prefieres, $f(x) = \sqrt{x}$.

- Si tecleamos 25 y pulsamos $\boxed{\surd}$ aparece en pantalla 5: 25 es una entrada válida y 5 es una salida válida para esta función. También se dice que 5 es la *imagen* o *transformado* de 25 en la función $y = \sqrt{x}$. Se escribe $f(25) = 5$.
- Si tecleamos –4 y pulsamos $\boxed{\surd}$ aparece en pantalla ERROR: –4 no es una entrada válida para esta función.
- $y = -5$ no es una salida válida para esta función, pues no existe ningún valor de entrada que tras pulsar la tecla nos devuelve en pantalla –5.

> El ***dominio*** o ***campo de existencia*** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente ***x*** (variable que se fija previamente). Se representa por **Dom *f.***
>
> La ***imagen*** o ***recorrido*** de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente ***y*** (variable que se deduce de la variable independiente). Se representa por **Im *f.***

La función $y = \sqrt{x}$ tiene como dominio los números reales positivos y el cero, ya que para $x < 0$ no tiene sentido; lo representamos como $\text{Dom}\, f = \mathbf{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty)$.

Ejemplo.- Dada la función f que asocia a cada número real su doble:

a) Escribe su expresión algebraica.
b) Calcula las imágenes de 1, 2 y 3, es decir, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$.
c) Halla el dominio y su imagen.

a) La expresión algebraica de esta función la notamos por $y = 2x$, o también por $f(x) = 2x$.
b) $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$; $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$; $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$.
c) $\text{Dom}\, f = \mathbf{R}$, pues a cualquier número real x le podemos asignar su doble $2x$.
$\text{Im}\, f = \mathbf{R}$, ya que cualquiera que sea m el número real transformado, procede del número real $m/2$.

EJERCICIOS

1. Explica razonadamente si son o no funciones las siguientes correspondencias, indicando las variables dependiente (y) e independiente (x).
   a) A cada número real le hacemos corresponder su raíz cúbica.
   b) A cada número entero le hacemos corresponder sus factores primos.
   c) A cada número real le hacemos corresponder la tercera parte más 1.
   d) A cada número natural le hacemos corresponder el múltiplo de 5 más próximo a él.
2. Halla el dominio de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = -2x + 3$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = \dfrac{2}{3x-1}$

3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

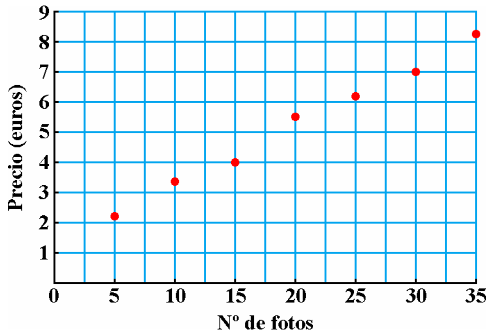
- En una tienda de fotografías se puede ver la siguiente tabla con los precios de revelado según el número de fotos.

Número de fotos	5	10	15	20	25	30	35	…
Precio (euros)	2'28	3'37	4'00	5'50	6'12	7'00	8'25	…

Vamos a representar la gráfica de esta función dada por la tabla. Para ello, representamos los pares de valores sobre unos ejes de coordenadas y obtenemos distintos puntos de la gráfica.

El conjunto de puntos es la ***gráfica de la función dada por la tabla.***

Observa que no tiene sentido unir los puntos obtenidos, pues en este caso sólo se pueden dar valores enteros (¿qué sentido tendría revelar 12'5 fotos?).



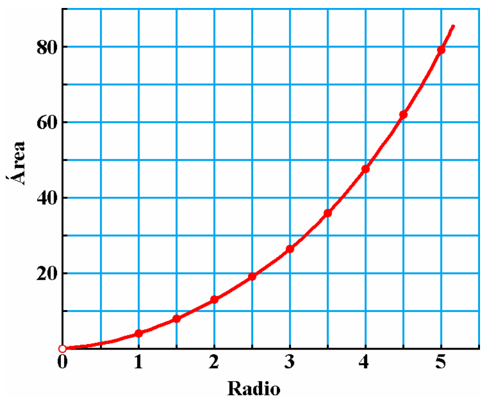
- La fórmula que expresa el área de un círculo en función de su radio es $A = \pi r^2$. Se trata de una función dada por una fórmula.

Para representar gráficamente esta función creamos una tabla, damos valores al radio y calculamos, mediante la fórmula, las áreas correspondientes.

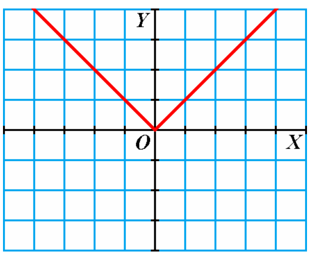
$x \equiv$ radio	1	1'5	2	2'5	3	3'5	4	4'5	5	…
$y \equiv$ área	3'14	7'07	12'57	19'63	28'27	38'48	50'27	63'62	78'54	…

Representamos los pares de valores sobre los ejes de coordenadas y obtenemos distintos puntos de la gráfica. Si damos valores intermedios al radio obtenemos valores intermedios del área, luego tiene sentido unir los puntos iniciales.

De esta forma obtenemos la ***gráfica de la función dada por la fórmula.***



Ejemplo.- Observando la gráfica de una función podemos determinar su dominio y su imagen.



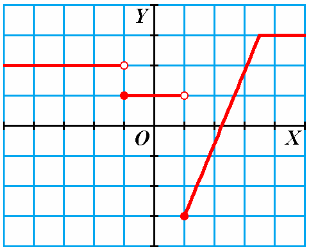
Si denotamos por $f(x)$ a la función cuya gráfica se muestra, tenemos:

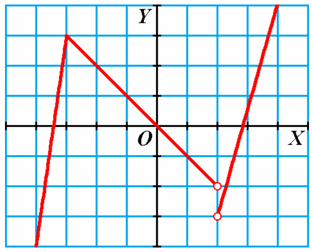
Dom f = **R**

Im f = [0, +)

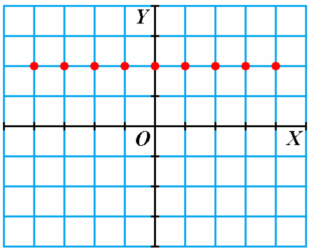
EJERCICIOS

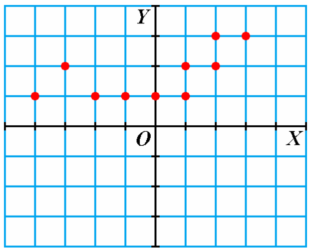
3. Escribe el dominio y la imagen de las funciones cuyas gráficas se representan a continuación.

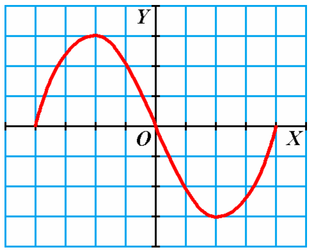


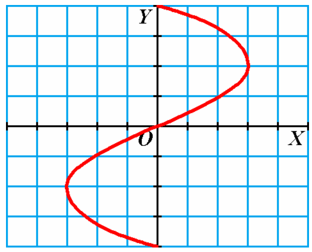


4. De las siguientes gráficas, ¿cuáles representan una función?









5. Juan se hace socio de un video-club donde le cobran 6 euros de inscripción, 4euros por cada una de las diez primeras películas que alquila y 2 euros por cada película restante.
   a) Escribe la fórmula o expresión algebraica de la función que relaciona el número de películas alquiladas y el coste total de las mismas.
   b) Representa gráficamente la función.

6. El gasto de gasolina según los kilómetros recorridos por un coche viene dado por la siguiente tabla.

Espacio: x (km)	0	50	100	150	200	250	…
Gasolina: f (litros)	0	4	8	12	16	20	…

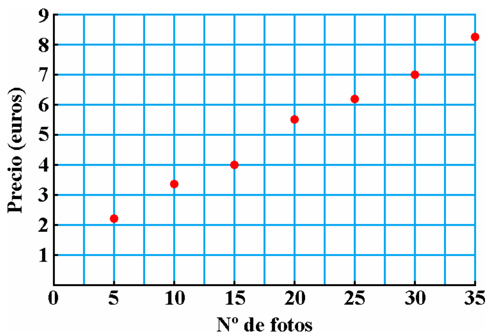
   a) Escribe la expresión de la función $f(x)$.
   b) Calcula $f(300)$, $f(400)$ y $f(450)$.
   c) Representa la gráfica de la función. ¿Qué figura es?

7. Se quiere construir un pozo en forma cilíndrica de 2 metros de radio. Expresa el volumen de agua (y) que cabe en el pozo en función de su profundidad (x). Representa gráficamente la función.

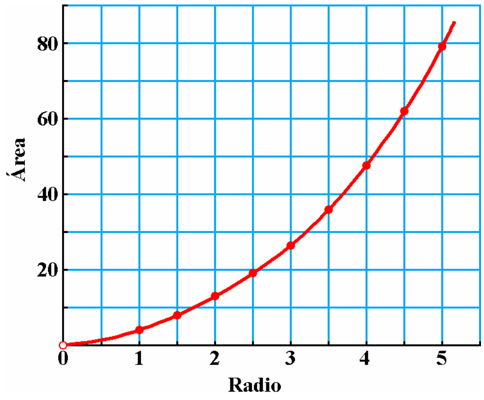
8. Haz una tabla correspondiente a todos los rectángulos de área 36 cm^2 cuya base y altura son números enteros.
   a) Dibuja la gráfica correspondiente representando la base en el eje de abscisas y la altura en el eje de ordenadas. ¿Tiene sentido unir los puntos?
   b) Aprovechando la tabla anterior, calcula los perímetros de esos rectángulos. Dibuja la gráfica que relaciona la base y el perímetro, representando la base en el eje de abscisas y el perímetro en el eje de ordenadas.

4. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD

Recordemos las dos gráficas representadas en el apartado anterior.

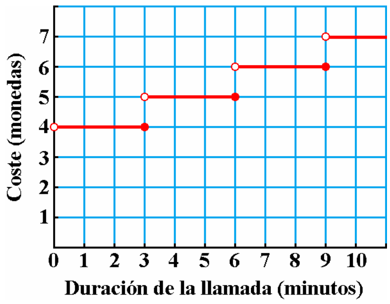


En este primer caso, la variable independiente sólo puede tomar valores naturales y la representación gráfica es una serie de puntos. Decimos que se trata de una *función discontinua*.



En este otro caso, la variable independiente puede tomar cualquier valor real positivo y la representación gráfica es una línea continua. Se trata ahora de una *función continua*.

Veamos otra representación gráfica de una función. Cuando haces una llamada en un teléfono público de monedas necesitas 4 monedas para hablar durante los tres primeros minutos. A partir del tercer minuto, necesitas una moneda más por cada tres minutos de conversación que quieras.

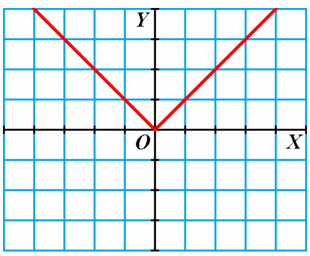


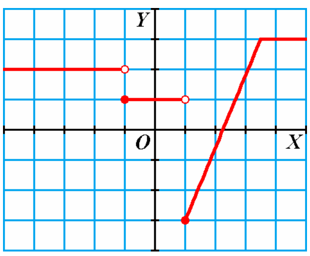
La gráfica también es discontinua, pero ahora la variable independiente (duración de la llamada) es continua y la variable dependiente (coste) efectúa una serie de saltos.

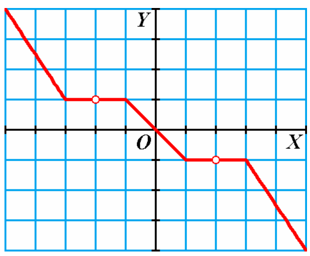
- Una función $\boldsymbol{y = f(x)}$ es ***continua*** si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo continuo, es decir, sin levantar el lápiz del papel.
- Una función $\boldsymbol{y = f(x)}$ es ***discontinua*** si su gráfica no puede dibujarse de un solo trazo y, por tanto, presenta *"saltos"* en su trazado. Estos puntos en los que la gráfica de la función efectúa un *salto* se llaman ***puntos de discontinuidad.***

EJERCICIOS

9. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

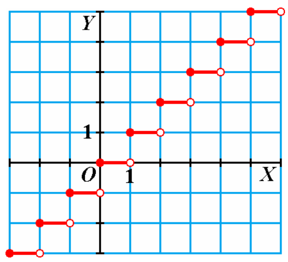






10. La *función parte entera* $y = E(x)$ se define como aquella que hace corresponder a cada número real el número entero inmediatamente menor o igual que él. Así, por ejemplo, $E(0'6) = 0$, $E(1'3) = 1$, $E(2'8) = 2$ y $E(-1'4) = -2$. La representación gráfica de esta función se muestra al margen.

    Estudia el dominio, imagen y continuidad de esta función.



11. La tarifa de un telegrama con entrega domiciliaria es de 1'20 euros por tasa fija más 0'05 euros por palabra. Construye una tabla de valores y representa la función que relaciona el coste del telegrama según el número de palabras. ¿Se trata de una función continua? ¿Por qué?

12. En una fotocopiadora tienen establecido distintos precios para las copias de un mismo original. Las 100 primeras, a 5 céntimos de euro cada una; de la 101 a la 200, a 4 céntimos; de la 201 a la 500, a 3 céntimos, y más de 500, a 2 céntimos. Representa la función que relaciona el número de fotocopias realizadas con el precio pagado por unidad.

13. El radio de un círculo mide 5 cm. Expresa la altura (y) de un rectángulo inscrito en el mismo en función de la medida de la base (x). Construye una tabla de valores adecuada y representa gráficamente la función. ¿Es continua?

5. VARIACIONES DE UNA FUNCIÓN

5.1. Crecimiento y decrecimiento

- Una función $y = f(x)$ es ***creciente*** cuando al aumentar la variable independiente aumenta también la variable dependiente.

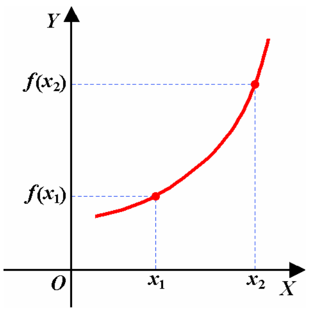
$$\text{si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Una función $y = f(x)$ es ***decreciente*** cuando al aumentar la variable independiente disminuye la variable dependiente.

$$\text{si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

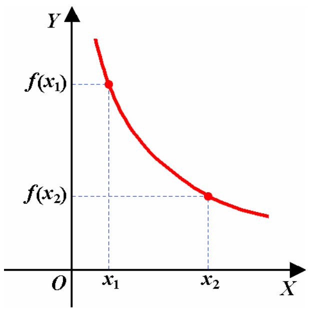
- Una función $y = f(x)$ es ***constante*** cuando al aumentar la variable independiente la variable dependiente no varía.

$$\text{si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$



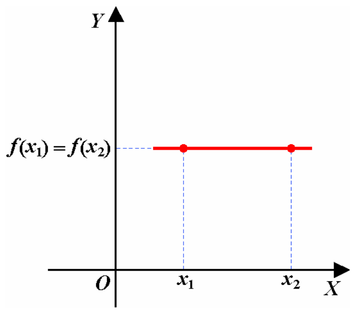
Función creciente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



Función decreciente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

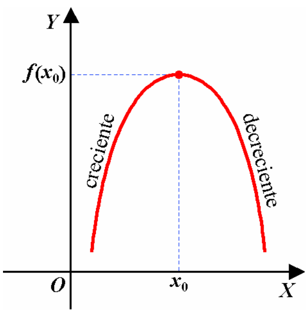


Función constante

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

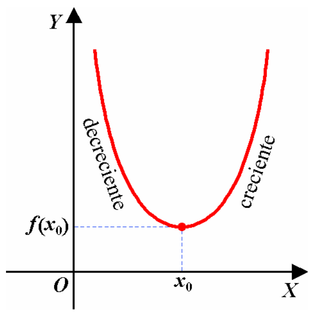
5.2. Máximos y mínimos

- Una función $y = f(x)$ tiene un ***máximo*** en un punto $x = x_0$ si, en valores próximos a él, a la izquierda de ese punto la función es creciente y a la derecha de ese punto la función es decreciente; esto es, si los valores próximos a él que toma la función son menores.
- Una función $y = f(x)$ tiene un ***mínimo*** en un punto $x = x_0$ si, en valores próximos a él, a la izquierda de ese punto la función es decreciente y a la derecha de ese punto la función es creciente; esto es, si los valores próximos a él que toma la función son mayores.



Máximo en $x = x_0$

El punto x_0 tiene mayor ordenada, $f(x_0)$, que los demás



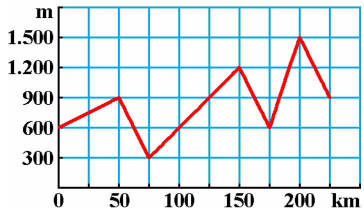
Mínimo en $x = x_0$

El punto x_0 tiene menor ordenada, $f(x_0)$, que los demás

No obstante, una función puede presentar varios máximos y mínimos. Para distinguirlos, definimos los siguientes conceptos asociados.

- Una función $y = f(x)$ tiene un ***máximo (mínimo) absoluto*** en un punto $x = x_0$ si los valores que toma la función son todos menores (mayores) que su imagen $f(x_0)$.
- Una función $y = f(x)$ tiene un ***máximo (mínimo) relativo*** en un punto $x = x_0$ si los valores próximos a él que toma la función son todos menores (mayores) que su imagen $f(x_0)$.

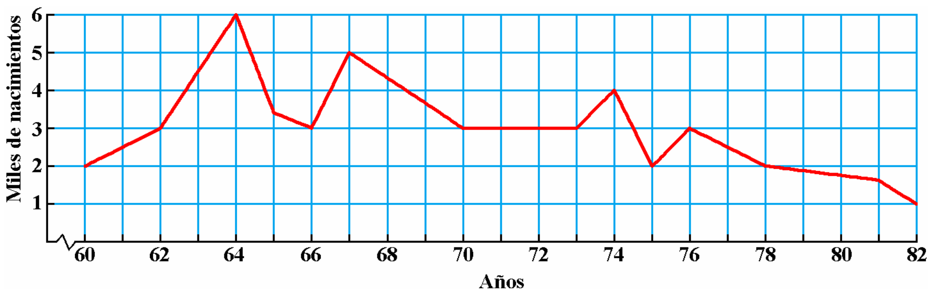
Ejemplo.- A partir de la siguiente gráfica (muestra el perfil de una etapa de la Vuelta Ciclista a España) estudia el crecimiento y decrecimiento de la función y los máximos y mínimos.



- La función es creciente en los intervalos [0, 50), (75, 150) y (175, 200).
- La función es decreciente en los intervalos (50, 75), (150, 175) y (200, 225].
- Presenta un máximo absoluto en $x = 200$ (1.500 m es la altitud máxima) y un mínimo absoluto en $x = 75$ (300 m es la altitud mínima).
- Los máximos relativos los alcanza en los puntos $x = 50$ (900 m de altitud) y $x = 150$ (1.200 m de altitud).
- Los mínimos relativos los alcanza en los puntos $x = 0$ (600 m de altitud), $x = 175$ (600 m de altitud) y $x = 225$ (900 m de altitud).

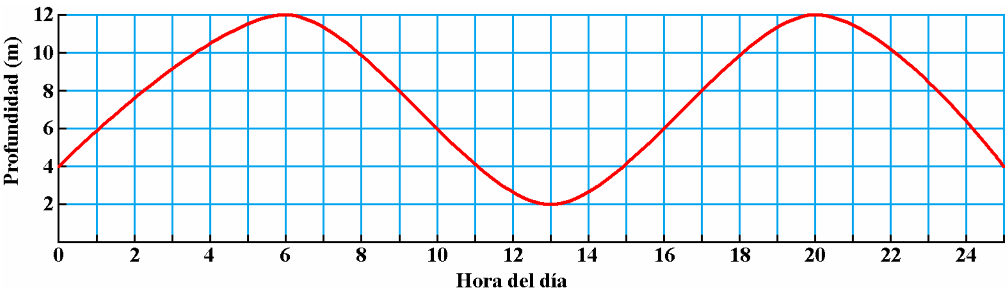
EJERCICIOS

14. La gráfica siguiente expresa la evolución del número de nacimientos en una ciudad de España.



a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del índice de natalidad.
b) ¿En qué período de tiempo permanece constante la natalidad?
c) ¿En qué años se ha conseguido el mayor número de nacimientos? Indica los máximos y mínimos de esta función.

15. La gráfica siguiente muestra como varía la profundidad del agua en un puerto durante un día cualquiera.

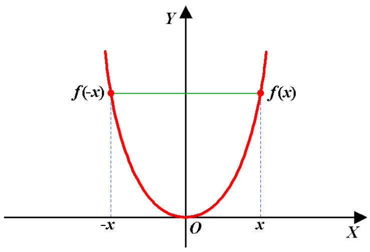


a) ¿A qué horas aumenta la profundidad? ¿Y a qué horas disminuye?
b) ¿A qué hora se produce la profundidad máxima? ¿Y la mínima?
c) Fíjate que de 13 a 20 horas la profundidad aumenta (crece la marea). ¿Aumenta igual de rápido durante todo ese periodo de tiempo?

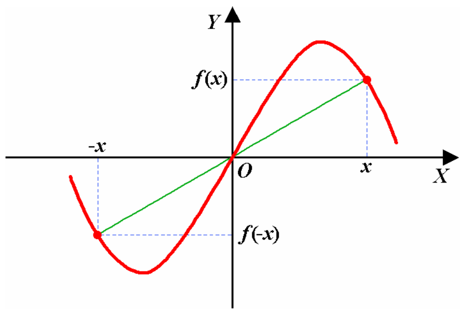
16. Dibuja la gráfica de la función $y = x^2$. A partir de ella, indica su dominio e imagen, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos en los que hay máximos o mínimos.

6. SIMETRÍAS

Las gráficas de la funciones son figuras geométricas, por lo que pueden ser simétricas respecto de un eje o de un punto.



Simetría respecto del eje de ordenadas

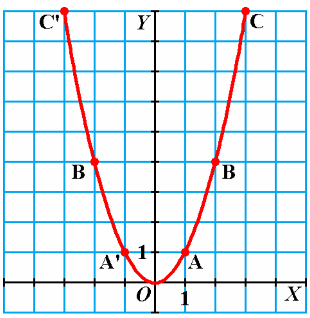


Simetría respecto del origen de coordenadas

- Una función $y = f(x)$ es ***simétrica respecto del eje de ordenadas,*** o se dice que tiene ***simetría par,*** si para cualquier valor x se verifica que $f(-x) = f(x)$.
- Una función $y = f(x)$ es ***simétrica respecto del origen de coordenadas,*** o se dice que tiene ***simetría impar,*** si para cualquier valor x se verifica que $f(-x) = -f(x)$.

- **Estudio de la simetría de la función $y = x^2$**

x	$y = x^2$
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



La gráfica de la función $y = x^2$ tiene como eje de simetría al eje de ordenadas *Y*.

Los puntos A y A', B y B', C y C' son simétricos respecto del eje *Y*. El punto *O* es simétrico de sí mismo.

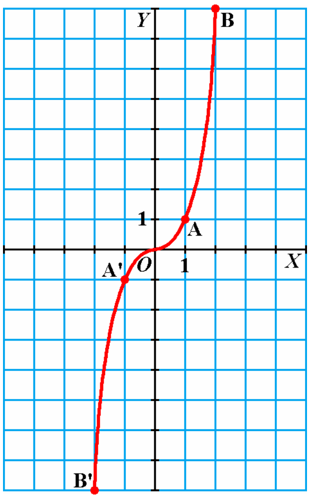
Si doblásemos esta gráfica por el eje *Y*, las dos partes en que queda dividida coincidirían.

Un punto cualquiera de la gráfica, $P(x, x^2)$, tiene como simétrico $P'(-x, x^2)$, que también está en la gráfica, ya que:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \ \Rightarrow \ f(-x) = f(x)$$

- **Estudio de la simetría de la función $y = x^3$**

x	$y = x^3$
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27



La gráfica de la función $y = x^3$ tiene como centro de simetría al origen de coordenadas *O*.

Los puntos A y A', B y B' son simétricos respecto de *O*. El punto *O* es simétrico de sí mismo.

Un punto cualquiera de la gráfica, $P(x, x^3)$, tiene como simétrico $P'(-x, -x^3)$, que también está en la gráfica, ya que:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \ \Rightarrow \ f(-x) = -f(x)$$

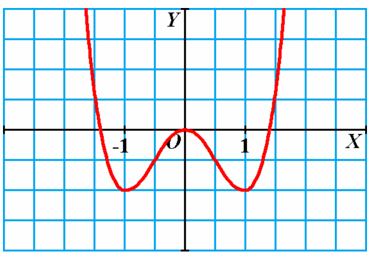
Ejemplo.- Estudia la simetría de la función $y = x^4 - 6x^2$.

Sustituimos x por $-x$: $f(-x) = (-x)^4 - 6(-x)^2 = x^4 - 6x^2 = f(x) \ \Rightarrow \ f(x) = f(-x)$

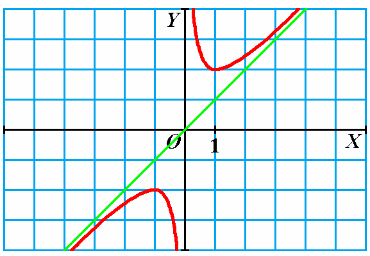
Luego $f(x)$ es una función par; por tanto, su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas, y no respecto del origen.

EJERCICIOS

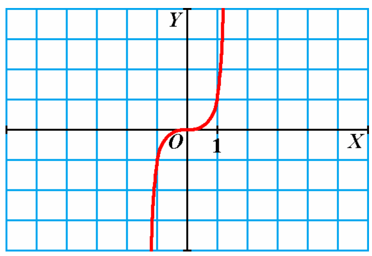
17. Estudia, algebraicamente, la simetría de las siguientes funciones.



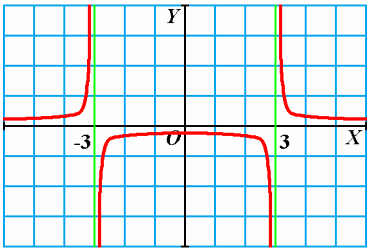
a) $y = x^4 - 2x^2$



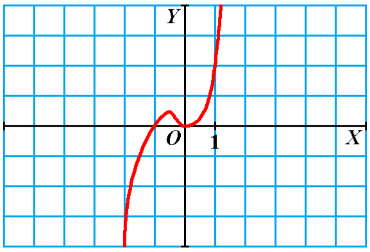
b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$



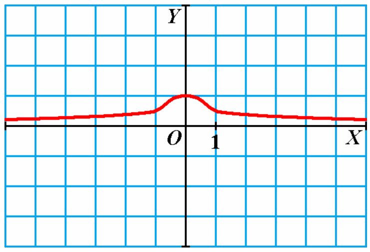
c) $y = x^5$



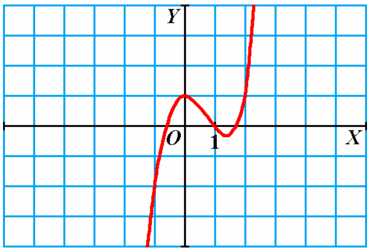
d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$



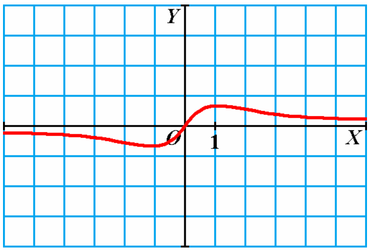
e) $y = x^3 + x^2$



f) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$



g) $y = x^3 - 2x^2 + 1$



h) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

7. PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

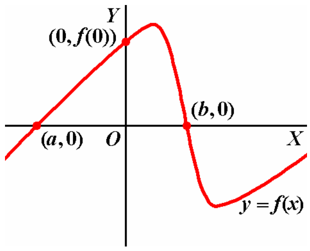
En el estudio de funciones es interesante saber si éstas cortan a los ejes cartesianos y en qué puntos.

Puntos de corte con el eje *Y*

El punto de corte de una función $\boldsymbol{y = f(x)}$ con el eje Y tiene por abscisa $\boldsymbol{x = 0}$. Por tanto, es el punto de coordenadas $\boldsymbol{(0, f(0))}$.

Puntos de corte con el eje *X*

Los puntos de corte de una función $\boldsymbol{y = f(x)}$ con el eje X tienen por ordenadas $\boldsymbol{y = 0}$. Por tanto, son los puntos cuya coordenada x son soluciones de la ecuación $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

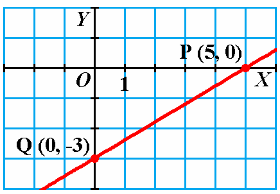


Ejemplo. Hallamos los puntos de corte de la función $y = \frac{3}{5}x - 3$ con los ejes cartesianos.

Eje Y: para $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow$ Q (0, –3)

Eje X: para $y = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}x - 3 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$ P (5, 0)

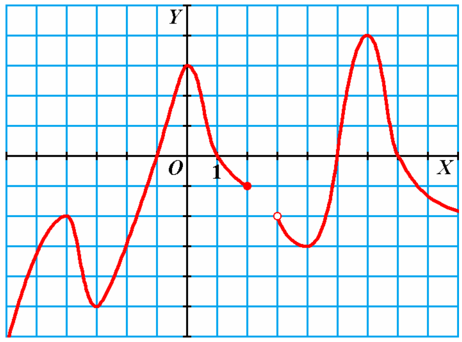
Observa la gráfica de la función:



EJERCICIOS

18. Halla los puntos de corte con los ejes cartesianos de las siguientes funciones.
    a) $y = 2x - 4$ b) $y = -2x + 1$ c) $y = x^2 - 2x - 3$ d) $y = x^2 - 4$

19. Estudia la gráfica de la siguiente función $y = f(x)$, indicando:
    a) Dominio e imagen.
    b) Continuidad.
    c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
    d) Máximos y mínimos (relativos y absolutos), indicando el valor de la función en esos puntos.
    e) Simetría.
    f) Puntos de corte con los ejes.



20. Estudia la gráfica de la siguiente función $y = f(x)$, indicando:
    a) Dominio e imagen.
    b) Continuidad.
    c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
    d) Máximos y mínimos (relativos y absolutos), indicando el valor de la función en esos puntos.
    e) Simetría.
    f) Puntos de corte con los ejes.