Matemáticas X las calles de Ronda
Patrimonio Histórico-Cultural y Matemáticas

POTENCIAS Y LOGARITMOS DE NÚMEROS REALES

1. POTENCIAS DE NÚMEROS REALES

1.1. Potencias de exponente entero

La ***potencia de base un número real a y exponente entero*** se define así:

$$\boldsymbol{a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{(n \text{ veces})}} \quad \text{con } \boldsymbol{n > 1}$$

$$\boldsymbol{a^0 = 1}, \qquad \boldsymbol{a^1 = a}, \qquad \boldsymbol{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} \quad \text{con } \boldsymbol{m \geq 1}$$

Para reducir potencias a otras más sencillas se utilizan las propiedades de los números reales y las siguientes propiedades de las potencias, escritas con ejemplos y en forma general.

Propiedades de las potencias	
$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$	$15^7 \cdot 15^3 = 15^{7+3} = 15^{10}$
$\boldsymbol{a^n : a^m = a^{n-m}}$	$12^7 : 12^3 = 12^{7-3} = 12^4$
$\boldsymbol{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$	$5^3 \cdot 7^3 = (5 \cdot 7)^3 = 35^3$
$\boldsymbol{a^n : b^n = (a : b)^n}$	$8^3 : 4^3 = (8 : 4)^3 = 2^3$
$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$	$(6^3)^4 = 6^{3 \cdot 4} = 6^{12}$

Ejemplo.- Halla el valor de las siguientes potencias.

a) $7^{-1} = \dfrac{1}{7^1} = \dfrac{1}{7}$

b) $\dfrac{1}{5^{-1}} = \dfrac{1}{\frac{1}{5^1}} = 5^1 = 5$

c) $9^{-2} = \dfrac{1}{9^2} = \dfrac{1}{81}$

d) $\dfrac{1}{9^{-2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{9^2}} = 9^2 = 81$

e) $5^{-2} \cdot 5^2 = 5^{-2+2} = 5^0 = 1$

f) $12^{-3} : 4^{-3} = (12 : 4)^{-3} = 3^{-3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$

g) $\dfrac{3^2}{3^{-2}} = 3^{2-(-2)} = 3^4 = 81$

h) $(2^{-3})^2 = 2^{(-3) \cdot 2} = 2^{-6} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}$

EJERCICIOS

1. Efectúa las siguientes operaciones aplicando las propiedades de las potencias.

a) $(-3)^2 \cdot (-3)^{-3}$ c) $x^2 : x^{-6}$ e) $(2^{-3})^4$ g) $(x^{-3})^{-2}$ i) $(2a^{-1})^{-2}$

b) $6^{-2} : 6^{-6}$ d) $x^{-2} : x^6$ f) $(5^2)^{-4}$ h) $(x^2y^3)^2$ j) $(a^{-2}b^{-3})^{-2}$

2. Simplifica las siguientes expresiones.

   a) $\dfrac{6x^4y^2}{3x^2y^{-2}}$ b) $\dfrac{4x^{-3}y^3}{2x^{-1}y^{-1}}$ c) $\dfrac{60x^5y^{-3}z^6}{18x^4y^3z^{-2}}$ d) $\dfrac{124x^6y^{-2}z^3}{28x^{-4}z^7y^{-3}}$

3. Simplifica y efectúa.

   a) $\dfrac{3^{-2}\cdot 4^3\cdot 4^{-2}}{9^{-2}\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-3}}$ b) $\left(\dfrac{1}{5}-2\right)^{-2}\cdot\dfrac{(-3)^2\cdot 5^0\cdot 5^{-2}}{-3^{-4}}$ c) $\dfrac{1^{-8}-2^{-2}+8}{2^2+2^{-2}}$

1.2. Potencias de exponente racional

Las potencias de exponente racional se definen a partir de los radicales de la siguiente forma:

Una ***potencia de exponente racional*** $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}}$ es igual a un radical donde:

- el **denominador** de la fracción es el **índice del radical;**
- el **numerador** de la fracción es el **exponente del radicando.**

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Con esta definición, las potencias de exponente racional verifican las mismas propiedades que las potencias de exponente entero.

Las operaciones con radicales se simplifican muchísimo si se pasa a potencias de exponente racional. En los ejemplos de la tabla siguiente se indica como se opera con potencias y radicales.

$3^{\frac12}\cdot 3^{\frac25} = 3^{\frac12+\frac25} = 3^{\frac{9}{10}}$	$\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[5]{7^2} = 7^{\frac13}\cdot 7^{\frac25} = 7^{\frac13+\frac25} = 7^{\frac{11}{15}} = \sqrt[15]{7^{11}}$
$3^{\frac12}:3^{\frac25} = 3^{\frac12-\frac25} = 3^{\frac{1}{10}}$	$\sqrt[3]{8}:\sqrt[5]{8^3} = 8^{\frac13}:8^{\frac35} = 8^{\frac13-\frac35} = 8^{-\frac{4}{15}} = \sqrt[15]{8^{-4}}$
$3^{\frac57}\cdot 6^{\frac57} = (3\cdot 6)^{\frac57} = 18^{\frac57}$	$\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{9} = 8^{\frac13}\cdot 9^{\frac13} = (8\cdot 9)^{\frac13} = 72^{\frac13} = \sqrt[3]{72}$
$12^{\frac57}:4^{\frac57} = (12:4)^{\frac57} = 3^{\frac57}$	$\sqrt[7]{14}:\sqrt[7]{7} = 14^{\frac17}:7^{\frac17} = (14:7)^{\frac17} = 2^{\frac17} = \sqrt[7]{2}$
$\left(3^{\frac12}\right)^{\frac37} = 3^{\frac12\cdot\frac37} = 3^{\frac{3}{14}}$	$\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}} = \left(8^{\frac13}\right)^{\frac13} = 8^{\frac13\cdot\frac13} = 8^{\frac19} = \sqrt[9]{8}$

Ejemplo.- Calcula las siguientes potencias utilizando las propiedades de las raíces y las de las potencias.

a) $4^{\frac32} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$; $4^{\frac32} = (2^2)^{\frac32} = 2^{2\cdot\frac32} = 2^3 = 8$

b) $8^{\frac53} = \sqrt[3]{8^5} = \sqrt[3]{32.768} = \sqrt[3]{32^3} = 32$; $8^{\frac53} = (2^3)^{\frac53} = 2^{3\cdot\frac53} = 2^5 = 32$

Ejemplo.- Calcula las siguientes potencias.

a) $81^{0'75} = 81^{\frac34} = (3^4)^{\frac34} = 3^{4\cdot\frac34} = 3^3 = 27$ b) $27^{0'3333\ldots} = 27^{\frac13} = \sqrt[3]{27} = 3$

EJERCICIOS

4. Calcula el valor de las siguientes potencias.

   a) $4^{1/2}$ b) $-4^{0'5}$ c) $(-4)^{3/6}$ d) $(-8)^{0'3333\ldots}$ e) $0^{1/3}$

5. Efectúa las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{8}:\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[4]{256}:\sqrt[4]{16}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{169}}$ f) $\sqrt[3]{5^2\cdot\sqrt[4]{5^6}}$

6. Simplifica las siguientes expresiones radicales.

a) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{x^9y^7}{xy^3}}$ c) $\sqrt[4]{x^{12}y^8}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}$ e) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{x^3}}{y^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}}$

1.3. Potencias de exponente irracional

Vamos a ver ahora cómo se definen y calculan las potencias cuando el exponente es un número irracional. La determinación de estas potencias se hace por aproximaciones sucesivas de potencias de exponente racional.

Por ejemplo, para calcular 2^π aproximamos el número π por número decimales y se calculan los valores que toma la potencia en los extremos del intervalo de aproximación. Siguiendo este proceso, como se indica a continuación, nos acercamos cada vez más al verdadero valor de 2^π.

Intervalos de p	Intervalos de potencias	Intervalos numéricos
$3 < \pi < 4$	$2^3 < 2^\pi < 2^4$	$8 < 2^\pi < 16$
3’1 < π < 3’2	$2^{3'1} < 2^\pi < 2^{3'2}$	8’5 < 2^π < 9’1
3’14 < π < 3’15	$2^{3'14} < 2^\pi < 2^{3'15}$	8’81 < 2^π < 8’87
3’141 < π < 3’142	$2^{3'141} < 2^\pi < 2^{3'142}$	8’821 < 2^π < 8’827
… < π < …	… < 2^π < …	… < 2^π < …

- Cada uno de estos pasos determina un intervalo, dentro del cual se encuentra 2^π:
  [8 , 16] , [8’5, 9’1] , [8’81 , 8’87] , [8’821, 8’827] , …
- Cada intervalo está contenido en el anterior.
- El error máximo en cada paso viene dado por la diferencia entre la aproximación por exceso y por defecto.
- Al aumentar el número de cifras de π, el error que se comete es cada vez más pequeño y se aproxima a cero.

Se tiene así una sucesión de intervalos encajados que determina al número real 2^π. Observa que en el cuarto paso hay ya una aproximación con dos decimales exactos. Este proceso es válido para cualquier número y cualquier base positiva.

<u>Ejemplo.-</u> Utilizando la calculadora, hemos hallado las siguientes potencias con tres cifras decimales exactas.

a) $2^{\sqrt{2}} = 2'665...$ b) $3^{\sqrt{3}} = 6'704...$ c) $\pi^\pi = 36'462...$ d) $\sqrt{3^{\sqrt{3}}} = 2'589...$

Las potencias de exponente real verifican las mismas propiedades que las potencias de exponente entero. Utilizando la calculadora comprobamos las dos primeras propiedades de las potencias con los siguientes ejemplos.

- $5^\pi\cdot5^{\sqrt{2}} = 5^{\pi+\sqrt{2}}$

  $5^\pi = 156'992...$; $5^{\sqrt{2}} = 9'738...$

  $5^{\pi+\sqrt{2}} = 1.528'874...$

  Multiplicando se comprueba que $5^\pi\cdot5^{\sqrt{2}} = 5^{\pi+\sqrt{2}}$

- $\dfrac{5^\pi}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\pi-\sqrt{2}}$

  $5^\pi = 156'992...$; $5^{\sqrt{2}} = 9'738...$

  $5^{\pi-\sqrt{2}} = 16'120...$

  Dividiendo se comprueba que $\dfrac{5^\pi}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\pi-\sqrt{2}}$

EJERCICIOS

7. Halla los cuatro primeros intervalos encajados que determinan a las potencias de exponente irracional $5^{\sqrt{3}}$ y 3^π.

2. LOGARITMO DE UN NÚMERO

Hasta ahora conoces seis operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Vamos a estudiar en este tema la séptima y última operación, relacionada con las potencias de números.

Como sabemos, la potenciación tiene como objetivo hallar la potencia, y la radicación tiene por objeto hallar la base. Esta nueva operación, la *exponenciación,* tiene por objeto hallar el exponente, que recibe el nombre de *logaritmo*.

Si planteamos la ecuación $2^x = 64$, en esta ecuación se trata de hallar el exponente x al que hay que elevar 2 para que dé 64. Dicho exponente es $x = 6$ ya que $2^6 = 64$.

Este exponente $x = 6$ se llama *logaritmo* de 64 en *base* 2 y se escribe así: $\log_2 64 = 6$.

Las dos igualdades anteriores son equivalente: $64 = 2^x$ es equivalente a $\log_2 64 = x$.

El ***logaritmo en base a*** de un número $\boldsymbol{N > 0}$ es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\mathbf{\log_a N = x} \quad \text{Û} \quad \mathbf{N = a^x}$$

- Cuando la base es **10,** se llaman ***logaritmos decimales*** y se expresan por **log** en vez de $\mathbf{\log_{10}}$, es decir:

$$\mathbf{\log_{10} N = \log N}$$

- Cuando la base es el número $\boldsymbol{e}$ **= 2’71828…,** se llaman ***logaritmos neperianos o naturales*** y se expresan por **ln** en vez de $\mathbf{\log_e}$, es decir:

$$\mathbf{\log_e N = \ln N}$$

Como consecuencias inmediatas de la definición, se tiene:

- El logaritmo de la unidad es 0: $\mathbf{\log_a 1 = 0}$
- El logaritmo de la base es 1: $\mathbf{\log_a a = 1}$
- El logaritmo de una potencia de la base es el exponente: $\mathbf{\log_a a^x = x}$

Ejemplo.- Aplicando la definición, calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 9$	b) $\log_2 128$	c) $\log 1.000$	d) $\log_5 625$
e) $\log\dfrac{1}{1.000}$	f) $\ln e$	g) $\log_2\sqrt{8}$	h) $\log_3\sqrt{243}$

a) $\log_3 9 = x$, de donde $3^x = 9 = 3^2$, luego $x = 2$

b) $\log_2 16 = x$, de donde $2^x = 16 = 2^4$, luego $x = 4$

c) $\log 1.000 = x$, de donde $10^x = 1.000 = 10^3$, luego $x = 3$

d) $\log_5 625 = x$, de donde $5^x = 625 = 5^4$, luego $x = 4$

e) $\log\dfrac{1}{1.000} = x$, de donde $10^x = \dfrac{1}{1.000} = 10^{-3}$, luego $x = -3$

f) $\ln e = x$, de donde $e^x = e$, luego $x = 1$

g) $\log_2\sqrt{32} = x$, de donde $2^x = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 2^{\frac{5}{2}}$, luego $x = \dfrac{5}{2}$

h) $\log_3\sqrt[4]{243} = x$, de donde $3^x = \sqrt[4]{243} = \sqrt[4]{3^5} = 3^{\frac{5}{4}}$, luego $x = \dfrac{5}{4}$

EJERCICIOS

8. Calcula los siguientes logaritmos.
   a) $\log_2 4$ $\quad\log_2 64$ $\quad\log_2 128$
   b) $\log_2 \frac{1}{2}$ $\quad\log_2 \frac{1}{4}$ $\quad\log_2 \frac{1}{16}$
   c) $\log_2 \sqrt{2}$ $\quad\log_2 \sqrt{8}$ $\quad\log_2 \sqrt[3]{2}$
9. Calcula los siguientes logaritmos.
   a) $\log_3 3$ $\quad\log_3 27$ $\quad\log_3 81$
   b) $\log_3 \frac{1}{3}$ $\quad\log_3 \frac{1}{9}$ $\quad\log_3 \frac{1}{27}$
   c) $\log_3 \sqrt{3}$ $\quad\log_3 \sqrt{27}$ $\quad\log_3 \sqrt[3]{3}$
10. Calcula los siguientes logaritmos decimales.
    a) $\log 1$ $\quad\log 10$ $\quad\log 100$
    b) $\log 0'1$ $\quad\log 0'01$ $\quad\log 0'0000001$
    c) $\log \sqrt{10}$ $\quad\log \sqrt{1.000}$ $\quad\log \sqrt[3]{10.000}$
11. Calcula los siguientes logaritmos.
    a) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ b) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ c) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{243}$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2.187}$
12. Calcula los siguientes logaritmos.
    a) $\log_{\frac{1}{10}} 10$ b) $\log_{\frac{1}{10}} 0'001$ c) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{1.000}$ d) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{10.000}$
13. Halla la base de los siguientes logaritmos.
    a) $\log_a 10.000 = 2$ b) $\log_a 16 = 2$ c) $\log_a 125 = 3$ d) $\log_a 729 = 3$
14. Utiliza la tecla $\boxed{10^x}$ de la calculadora para hallar los números (antilogaritmos) cuyo logaritmo es:
    a) $\log N = 0'3$ b) $\log N = 1'3$ c) $\log N = 2'3$ d) $\log N = 3'3$
15. Utiliza la tecla $\boxed{x^y}$ de la calculadora para hallar los números (antilogaritmos) cuyo logaritmo es:
    a) $\log_3 N = 0'3$ b) $\log_3 N = 1'3$ c) $\log_3 N = 2'3$ d) $\log_3 N = 3'3$

2.1. Propiedades

- El **logaritmo de un producto** es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a (M \times N) = \log_a M + \log_a N$$

- El **logaritmo de un cociente** es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor.

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

- El **logaritmo de una potencia** es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_a M^n = n \times \log_a M$$

- **Propiedad de igualdad de logaritmos:** si los logaritmos de dos números en la misma base son iguales, entonces los números han de ser también iguales.

$$\log_a M = \log_a N \;\; Û \;\; M = N$$

Ejemplo.- Observa cómo se calculan las siguientes operaciones con logaritmos.

a) $\log\ 40 + \log\ 25 = \log\ (40 \cdot 25) = \log\ 1.000 = 3$

b) $\log\ 80 - \log\ 8 = \log\ \frac{80}{8} = \log\ 10 = 1$

c) $\log\ \sqrt{10} = \log\ 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log\ 10 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

EJERCICIOS

16. Expresa con un sólo logaritmo los siguientes números.
a) log 6 + log 8 − log 3 b) log 9 + log 28 − (log 7 − log 9)

17. Halla el valor de las siguientes operaciones con logaritmos.
a) $\log\ 1.000 - \log\ 0'001 + \log\ \frac{1}{1.000}$ b) $\log\ 7 + \log\ \frac{1}{7}$

18. Expresa los siguientes logaritmos decimales en función de log 2.
a) $\log\ 4$ $\log\ 16$ $\log\ 32$ $\log\ 1.024$
b) $\log\ \frac{1}{2}$ $\log\ \frac{1}{16}$ $\log\ \frac{1}{32}$ $\log\ \frac{1}{1.024}$
c) $\log\ 0'5$ $\log\ 0'25$ $\log\ 0'125$ $\log\ 0'0625$
d) $\log\ \sqrt{2}$ $\log\ \sqrt{8}$ $\log\ \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\log\ \sqrt{\frac{1}{64}}$

19. Expresa los siguientes logaritmos decimales en función de log 3.
a) $\log\ 9$ $\log\ 27$ $\log\ 59.049$
b) $\log\ \frac{1}{27}$ $\log\ \frac{1}{81}$ $\log\ \frac{1}{59.049}$
c) $\log\ \sqrt{9}$ $\log\ \sqrt{\frac{1}{3}}$ $\log\ \sqrt{\frac{1}{27}}$

20. Sabiendo que log 2 ≅ 0’301030, calcula:
a) $\log\ 32$ b) $\log\ 0'64$ c) $\log\ 5$ d) $\log\ 125$ e) $\log\ \sqrt[3]{2}$ f) $\log\ \sqrt[7]{4}$

3. CAMBIO DE BASE

Normalmente, las calculadoras sólo permiten calcular logaritmos decimales **(log)** y neperianos **(ln)**. No obstante, conocidos los logaritmos de los números en una base se pueden hallar en cualquier otra.

Veamos cómo se calcula $\log_2 N$, logaritmo en base 2 del número N, utilizando los logaritmos decimales (aunque este proceso es válido para cualquier base).

Partimos de: $\log_2 N = x$

Por definición de logaritmo: $2^x = N$

Por la igualdad de logaritmos: $\log\ 2^x = \log\ N$

Por ser el logaritmo de una potencia: $x \cdot \log\ 2 = \log\ N$

Despejando x: $x = \frac{\log N}{\log 2}$; por tanto: $\log_2 N = \frac{\log N}{\log 2}$

El logaritmo en una base cualquiera ***a***, en función de los logaritmos decimales, viene dado por la siguiente fórmula:

$$\mathbf{\log_a N = \frac{\log N}{\log a}} \quad ; \quad \text{en general: } \mathbf{\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}}$$

Ejemplo.- Calcula $\log_2 16$ utilizando la fórmula del cambio de base y después comprueba el resultado directamente, es decir, utilizando la definición de logaritmo.

Por la fórmula: $\log_2 16 = \dfrac{\log 16}{\log 2} = \dfrac{1'204119...}{0'301029...} = 4$

Por definición: $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

EJERCICIOS

21. Utiliza la calculadora y los logaritmos decimales para hallar:
    a) $\log_2 7$ b) $\log_5 23$ c) $\log_{11} 54$
22. Sabiendo que $\log 2 \cong 0'301030$ y $\log 6 \cong 0'778151$, calcula:
    a) $\log 36$ b) $\log 12$ c) $\log 3$ d) $\log 18$
    e) $\log \dfrac{1}{3}$ f) $\log \dfrac{2}{3}$ g) $\log_2 6$ h) $\log_6 2$

4. OPERACIONES CON LOGARITMOS

Los logaritmos son números reales: log 2 es un número, lo mismo que 2, 3, etc., y debe dejarse así ya que se trata de un número irracional, a no ser que se necesite una aproximación.

Las expresiones numéricas en las que aparecen logaritmos se pueden reducir empleando las propiedades de los logaritmos y las propiedades de las operaciones aritméticas. Observa los siguientes ejemplos.

Reducción utilizando propiedades de los logaritmos

- $\log 2 + \log 3 = \log (2 \cdot 3) = \log 6$
- $\log 6 - \log 2 = \log (6 : 2) = \log 3$
- $1 + \log 2 = \log 10 + \log 2 = \log (10 \cdot 2) = \log 20$
- $3 - \log 5 = \log 1.000 - \log 5 = \log (1.000 : 5) = \log 200$

Reducción utilizando propiedades aritméticas

- $3 \log 2 + 5 \log 2 = (3 + 5) \log 2 = 8 \log 2$
- $\log x^3 + 2 \log x = 3 \log x + 2 \log x = 5 \log x$

Ejemplo.- Reduce las siguientes expresiones logarítmicas.

a) $5 \log 2 - 3 \log 2$ b) $\log x^4 - \log x^3$ c) $(\log 27 + \log 64) - (\log 8 - \log 9)$

a) $5 \log 2 - 3 \log 2 = 2 \log 2 = \log 2^2 = \log 4$

b) $\log x^4 - \log x^3 = 4 \log x - 3 \log x = \log x$

c) $(\log 27 + \log 64) - (\log 8 - \log 9) = \log 27 + \log 64 - \log 8 + \log 9 = \log [(27 \cdot 64 \cdot 9) : 8] = \log 1.944$

EJERCICIOS

23. Halla el valor de las siguientes sumas.
 a) $\log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \log_2 16$ b) $\log_3 3 + \log_3 9 + \log_3 27 + \log_3 81$

24. Expresa con un sólo logaritmo los siguientes números.
 a) $\log 6 + \log 2 - \log 3$ b) $2 \log 2 + \log 36 - \log 12$
 c) $3 (\log 8 - \log 4) + \log 3$ d) $(\log 3 + \log 25) - \left(\frac{1}{2}\log 3 + \log 5\right)$

25. Expresa en función de log 5.
 a) $\log 25 - 3\log \frac{1}{5}$ b) $\log 75 - 2\log 3 + \log 15$

4.1. Expresiones algebraicas y logarítmicas

Para pasar de una expresión logarítmica a otra algebraica, o al revés, se aplican las propiedades de los logaritmos.

Paso de una expresión algebraica a logarítmica: «*tomar logaritmos*»

Por ejemplo: $A = \frac{xyz}{t}$

Por la igualdad de logaritmos: $\log A = \log \frac{xyz}{t}$

Logaritmo de un cociente: $\log A = \log xyz - \log t$

Logaritmo de un producto: $\log A = \log x + \log y + \log z - \log t$

Paso de una expresión logarítmica a algebraica: «*tomar antilogaritmos*»

Por ejemplo: $\log A = \log x + \log y - \log z$

Logaritmo de un producto: $\log A = \log xy - \log z$

Logaritmo de un cociente: $\log A = \log \frac{xy}{z}$

Por la igualdad de logaritmos: $A = \frac{xy}{z}$

Ejemplo.- Pasa a expresión logarítmica: a) $B = x^2y^3z^5$ b) $C = \frac{4\pi r^3}{3}$

a) $\log B = \log x^2y^3z^5 = \log x^2 + \log y^3 + \log z^5 = 2 \log x + 3 \log y + 5 \log z$

b) $\log C = \log \frac{4\pi r^3}{3} = \log 4\pi r^3 - \log 3 = \log 4 + \log \pi + \log r^3 - \log 3 = \log 4 + \log \pi + 3 \log r - \log 3$

Ejemplo.- Pasa a expresión algebraica: $\log B = 2 \log x - 3 \log y + 5 \log z$

$\log B = \log x^2 - \log y^3 + \log z^5 = \log \frac{x^2z^5}{y^3}$; por tanto, $B = \frac{x^2z^5}{y^3}$

EJERCICIOS

26. Toma logaritmos en las siguientes expresiones y desarrolla.

a) $A = \dfrac{x^2yz^4}{t}$ b) $B = x^3y^4t^2x$ c) $C = y\sqrt{x}\sqrt[5]{z}$ d) $D = \sqrt{x^3y^5z^7}$ e) $E = \dfrac{a^5\sqrt{b}}{c^4}$

27. Pasa a forma algebraica las siguientes expresiones logarítmicas.

a) $\log A = 3\log x + \log y - 2\log z$ b) $\log B = 4\log x - 5\log y + 2\log z$
c) $\log C = 2\log x - 3\log y + 2$ d) $\log D = 2 - 3\log x + 3\log z$

28. ¿Qué relación existe entre los números x e y si se verifica las siguientes relaciones? Razona las respuestas.

a) $\log x = \log y + \log 5$ b) $\log x + \log y = 0$

29. Siendo a y b dos números enteros positivos, calcula el valor de $\log_a \dfrac{1}{a} + \log_{\frac{1}{b}} b$

Soluciones a los ejercicios propuestos

1. Efectúa las siguientes operaciones aplicando las propiedades de las potencias.

a) $(-3)^2 \cdot (-3)^{-3}$ c) $x^2 : x^{-6}$ e) $(2^{-3})^4$ g) $(x^{-3})^{-2}$ i) $(2a^{-1})^{-2}$
b) $6^{-2} : 6^{-6}$ d) $x^{-2} : x^6$ f) $(5^2)^{-4}$ h) $(x^2y^3)^2$ j) $(a^{-2}b^{-3})^{-2}$
a) $(-3)^{-1} = -1/3$ **c) x^8** **e) $2^{-12} = 1/4.096$** **g) x^6** **i) $a^2/4$**
b) $6^4 = 1.296$ **d) $x^{-8} = 1/x^8$** **f) $5^{-8} = 1/390.625$** **h) x^4y^6** **j) a^4b^6**

2. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{6x^4y^2}{3x^2y^{-2}} = \mathbf{2x^2y^4}$ b) $\dfrac{4x^{-3}y^3}{2x^{-1}y^{-1}} = \mathbf{\dfrac{2y^4}{x^2}}$ c) $\dfrac{60x^5y^{-3}z^6}{18x^4y^3z^{-2}} = \mathbf{\dfrac{10xz^8}{3y^6}}$ d) $\dfrac{124x^6y^{-2}z^3}{28x^{-4}z^7y^{-3}} = \mathbf{\dfrac{31x^{10}y}{7z^4}}$

3. Simplifica y efectúa.

a) $\dfrac{3^{-2}\cdot 4^3 \cdot 4^{-2}}{9^{-2}\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-3}} = \mathbf{2^4 \times 3^5 = 3.888}$ b) $\left(\dfrac{1}{5} - 2\right)^{-2} \cdot \dfrac{(-3)^2\cdot 5^0 \cdot 5^{-2}}{-3^{-4}} = \mathbf{-3^2 = -9}$ c) $\dfrac{1^{-8} - 2^{-2} + 8}{2^2 + 2^{-2}} = \mathbf{\dfrac{35}{17}}$

4. Calcula el valor de las siguientes potencias.

a) $4^{1/2}$ = **2** b) $-4^{0'5}$ = **-2** c) $(-4)^{3/6}$ **no existe** d) $(-8)^{0'3333\ldots}$ = **-2** e) $0^{1/3}$ = **0**

5. Efectúa las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[4]{256} : \sqrt[4]{16}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{169}}$ f) $\sqrt[3]{5^2\cdot\sqrt[4]{5^6}}$
a) $6\sqrt[3]{4}$ **b) $2\sqrt[6]{2}$** **c) $\sqrt[3]{4}$** **d) 2** **e) $\sqrt[6]{13}$** **f) $5\sqrt[6]{5}$**

6. Simplifica las siguientes expresiones radicales.

a) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \mathbf{\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}}$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{x^9y^7}{xy^3}} = \mathbf{x^2y}$ c) $\sqrt[4]{x^{12}y^8} = \mathbf{x^3y^2}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} = \mathbf{\sqrt[24]{x}}$ e) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{x^3}}{y^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}} = \mathbf{\dfrac{1}{\sqrt[12]{xy^4}}}$

7. Halla los cuatro primeros intervalos encajados que determinan a las potencias de exponente irracional $5^{\sqrt{3}}$ y 3^{π}.

$5^{\sqrt{3}}$ Þ [5, 25], [15’4, 18’1], [16’18, 16’45], [16’241, 16’267], …
3^{p} Þ [27, 81], [30’1, 33’6], [31’48, 31’83], [31’523, 31’558], …

8. Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 4$ = **2** $\log_2 64$ = **6** $\log_2 128$ = **7**
b) $\log_2 \dfrac{1}{2}$ = **-1** $\log_2 \dfrac{1}{4}$ = **-2** $\log_2 \dfrac{1}{16}$ = **-4**
c) $\log_2 \sqrt{2}$ = **1/2** $\log_2 \sqrt{8}$ = **3/2** $\log_2 \sqrt[3]{2}$ = **1/3**

9. Calcula los siguientes logaritmos.
   a) $\log_3 3 = \mathbf{1}$ $\log_3 27 = \mathbf{3}$ $\log_3 81 = \mathbf{4}$
   b) $\log_3 \frac{1}{3} = \mathbf{-1}$ $\log_3 \frac{1}{9} = \mathbf{-2}$ $\log_3 \frac{1}{27} = \mathbf{-3}$
   c) $\log_3 \sqrt{3} = \mathbf{1/2}$ $\log_3 \sqrt{27} = \mathbf{3/2}$ $\log_3 \sqrt[3]{3} = \mathbf{1/3}$
10. Calcula los siguientes logaritmos decimales.
   a) $\log 1 = \mathbf{0}$ $\log 10 = \mathbf{1}$ $\log 100 = \mathbf{2}$
   b) $\log 0'1 = \mathbf{-1}$ $\log 0'01 = \mathbf{-2}$ $\log 0'0000001 = \mathbf{-7}$
   c) $\log \sqrt{10} = \mathbf{1/2}$ $\log \sqrt{1.000} = \mathbf{3/2}$ $\log \sqrt[3]{10.000} = \mathbf{4/3}$
11. Calcula los siguientes logaritmos.
   a) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \mathbf{-3}$ b) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = \mathbf{4}$ c) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{243} = \mathbf{-5/2}$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2.187} = \mathbf{-7/3}$
12. Calcula los siguientes logaritmos.
   a) $\log_{\frac{1}{10}} 10 = \mathbf{-1}$ b) $\log_{\frac{1}{10}} 0'001 = \mathbf{3}$ c) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{1.000} = \mathbf{-3/2}$ d) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{10.000} = \mathbf{-4/3}$
13. Halla la base de los siguientes logaritmos.
   a) $\log_a 10.000 = 2$ b) $\log_a 16 = 2$ c) $\log_a 125 = 3$ d) $\log_a 729 = 3$
   a) a = 100 **b) a = 4** **c) a = 5** **d) a = 9**
14. Utiliza la tecla $\boxed{10^x}$ de la calculadora para hallar los números (antilogaritmos) cuyo logaritmo es:
   a) $\log N = 0'3$ b) $\log N = 1'3$ c) $\log N = 2'3$ d) $\log N = 3'3$
   a) $N = 10^{0'3}$ = 1'995262314… **b) $N = 10^{1'3}$ = 19'95262314…**
   c) $N = 10^{2'3}$ = 199'5262314… **d) $N = 10^{3'3}$ = 1.995'262314…**
15. Utiliza la tecla $\boxed{x^y}$ de la calculadora para hallar los números (antilogaritmos) cuyo logaritmo es:
   a) $\log_3 N = 0'3$ b) $\log_3 N = 1'3$ c) $\log_3 N = 2'3$ d) $\log_3 N = 3'3$
   a) $N = 3^{0'3}$ = 1'39038917… **b) $N = 3^{1'3}$ = 4'171116751…**
   c) $N = 3^{2'3}$ = 12'51350253… **d) $N = 3^{3'3}$ = 37'54050759…**
16. Expresa con un sólo logaritmo los siguientes números.
   a) $\log 6 + \log 8 - \log 3 =$ **log 16** b) $\log 9 + \log 28 - (\log 7 - \log 9) =$ **log 324**
17. Halla el valor de las siguientes operaciones con logaritmos.
   a) $\log 1.000 - \log 0'001 + \log \frac{1}{1.000} = \mathbf{3}$ b) $\log 7 + \log \frac{1}{7} = \mathbf{0}$
18. Expresa los siguientes logaritmos decimales en función de log 2.
   a) $\log 4 = \mathbf{2 \log 2}$ $\log 16 = \mathbf{4 \log 2}$ $\log 32 = \mathbf{5 \log 2}$ $\log 1.024 = \mathbf{10 \log 2}$
   b) $\log \frac{1}{2} = \mathbf{-\log 2}$ $\log \frac{1}{16} = \mathbf{-4 \log 2}$ $\log \frac{1}{32} = \mathbf{-5 \log 2}$ $\log \frac{1}{1.024} = \mathbf{-10 \log 2}$
   c) $\log 0'5 = \mathbf{-\log 2}$ $\log 0'25 = \mathbf{-2 \log 2}$ $\log 0'125 = \mathbf{-3 \log 2}$ $\log 0'0625 = \mathbf{-4 \log 2}$
   d) $\log \sqrt{2} = \mathbf{\frac{1}{2} \log 2}$ $\log \sqrt{8} = \mathbf{\frac{3}{2} \log 2}$ $\log \sqrt{\frac{1}{2}} = \mathbf{\frac{-1}{2} \log 2}$ $\log \sqrt{\frac{1}{64}} = \mathbf{-3 \log 2}$
19. Expresa los siguientes logaritmos decimales en función de log 3.
   a) $\log 9 = \mathbf{2 \log 3}$ $\log 27 = \mathbf{3 \log 3}$ $\log 59.049 = \mathbf{10 \log 3}$
   b) $\log \frac{1}{27} = \mathbf{-3 \log 3}$ $\log \frac{1}{81} = \mathbf{-4 \log 3}$ $\log \frac{1}{59.049} = \mathbf{-10 \log 3}$
   c) $\log \sqrt{9} = \mathbf{\log 3}$ $\log \sqrt{\frac{1}{3}} = \mathbf{\frac{-1}{2} \log 3}$ $\log \sqrt{\frac{1}{27}} = \mathbf{\frac{-3}{2} \log 3}$

20. Sabiendo que $\log 2 \cong 0'301030$, calcula:

a) $\log 32$ b) $\log 0'64$ c) $\log 5$ d) $\log 125$ e) $\log \sqrt[3]{2}$ f) $\log \sqrt[7]{4}$

a) $5 \log 2$ @ $1'505150$ **b) $6 \log 2 - 2 \log 10$ @ $-0'193820$** **c) $1 - \log 2$ @ $0'698970$**

d) $3 - 3 \log 2$ @ $2'096910$ **e) $\frac{1}{3}\log 2$ @ $0'100343$** **f) $\frac{2}{7}\log 2$ @ $0'086008$**

21. Utiliza la calculadora y los logaritmos decimales para hallar:

a) $\log_2 7 =$ **2'807354…** b) $\log_5 23 =$ **1'948192…** c) $\log_{11} 54 =$ **1'663535…**

22. Sabiendo que $\log 2 \cong 0'301030$ y $\log 6 \cong 0'778151$, calcula:

a) $\log 36$ b) $\log 12$ c) $\log 3$ d) $\log 18$

e) $\log \frac{1}{3}$ f) $\log \frac{2}{3}$ g) $\log_2 6$ h) $\log_6 2$

a) $2 \log 6$ @ $1'556302$ **b) $\log 2 + \log 6$ @ $1'079181$** **c) $\log 6 - \log 2$ @ $0'477121$**
d) $2 \log 6 - \log 2$ @ $1'255272$ **e) $\log 2 - \log 6$ @ $-0'477121$** **f) $2 \log 2 - \log 6$ @ $-0'176091$**

g) $\frac{\log 6}{\log 2}$ @ $2'584961$ **h) $\frac{\log 2}{\log 6}$ @ $0'386852$**

23. Halla el valor de las siguientes sumas.

a) $\log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \log_2 16 = \mathbf{10 \log_2 2 = 10}$ b) $\log_3 3 + \log_3 9 + \log_3 27 + \log_3 81 = \mathbf{10 \log_3 3 = 10}$

24. Expresa con un sólo logaritmo los siguientes números.

a) $\log 6 + \log 2 - \log 3 = \mathbf{2 \log 2}$ b) $2 \log 2 + \log 36 - \log 12 = \mathbf{\log 12}$

c) $3 (\log 8 - \log 4) + \log 3 = \mathbf{\log 24}$ d) $(\log 3 + \log 25) - \left(\frac{1}{2}\log 3 + \log 5\right) = \mathbf{\log 5\sqrt{3}}$

25. Expresa en función de $\log 5$.

a) $\log 25 - 3\log \frac{1}{5} = \mathbf{5 \log 5}$ b) $\log 75 - 2\log 3 + \log 15 = \mathbf{3 \log 5}$

26. Toma logaritmos en las siguientes expresiones y desarrolla.

a) $A = \frac{x^2yz^4}{t}$ b) $B = x^3y^4t^2x$ c) $C = y\sqrt{x}\sqrt[5]{z}$ d) $D = \sqrt{x^3y^5z^7}$ e) $E = \frac{a^5\sqrt{b}}{c^4}$

a) $\log A = 2 \log x + \log y + 4 \log z - \log t$ **b) $\log B = 4(\log x + \log y) + 2 \log t$**

c) $\log C = \frac{1}{2}\log x + \log y + \frac{1}{5}\log z$ **d) $\log D = \frac{1}{2}(3\log x + 5\log y + 7\log z)$**

e) $\log E = 5\log a + \frac{1}{2}\log b - 4\log c$

27. Pasa a forma algebraica las siguientes expresiones logarítmicas.

a) $\log A = 3 \log x + \log y - 2 \log z$ b) $\log B = 4 \log x - 5 \log y + 2 \log z$
c) $\log C = 2 \log x - 3 \log y + 2$ d) $\log D = 2 - 3 \log x + 3 \log z$

a) $\boldsymbol{A = \frac{x^3y}{z^2}}$ b) $\boldsymbol{B = \frac{x^4z^2}{y^5}}$ c) $\boldsymbol{C = \frac{100x^2}{y^3}}$ d) $\boldsymbol{D = \frac{100z^3}{x^3} = 100\left(\frac{z}{x}\right)^3}$

28. ¿Qué relación existe entre los números x e y si se verifica las siguientes relaciones? Razona las respuestas.

a) $\log x = \log y + \log 5$ b) $\log x + \log y = 0$

a) x es el quíntuplo de y, pues $x = 5y$ **b) x e y son inversos, pues $x = 1/y$**

29. Siendo a y b dos números enteros positivos, calcula el valor de $\log_a \frac{1}{a} + \log_{\frac{1}{b}} b$

$$\boldsymbol{\log_a \frac{1}{a} + \log_{\frac{1}{b}} b = -2}$$