GEOMETRÍA ANALÍTICA

En este tema estudiaremos **vectores** (definición, características, operaciones) de forma geométrica y analítica. Además veremos los conceptos de vector director, pendiente de una recta y vector normal.

A continuación se estudian las **ecuaciones de la recta**: vectorial, paramétricas continua, general, explícita, general y canónica.

El tema termina con el estudio de algunas **propiedades afines** (posición relativa entre punto y recta y entre dos rectas) y **métricas** (distancia entre dos puntos y como aplicación la ecuación de la circunferencia).

<table>
<tr><th colspan="3">GEOMETRÍA ANALÍTICA, que estudia</th></tr>
<tr>
<td>VECTORES:

Definición.
Características:
• Componentes.
• Módulo.
• Dirección (argumento).
• Sentido (vector opuesto).

Operaciones:
• Sumar.
• Restar.
• Multiplicar por un número.
• Producto escalar.</td>
<td>ECUACIONES DE LA RECTA:

Definición.
Tipos:
• Vectorial.
• Paramétricas.
• Continua.
• General.
• Explícita.
• Punto-pendiente.
• Pasa por dos puntos.
• Canónica o segmentaria.</td>
<td>PROPIEDADES AFINES Y MÉTRICAS:
Resuelven problemas de :
• Posiciones relativas (punto y recta, y entre dos rectas).
• Rectas (paralelas y perpendiculares).
• Distancias (entre dos puntos y ecuación de la circunferencia).</td>
</tr>
</table>

VECTORES:

1.- Definición: un vector es un segmento orientado. Se puede representar así:

$$\overrightarrow{AB}$$

A es el punto que corresponde al origen y B corresponde al extremo del vector.

2.- Características de un vector:

a) **Componentes de un vector**: un vector se expresa numéricamente como un par de números: (x, y). La primer componente (x: componente horizontal) describe si el vector avanza (+) o retrocede (-), y la segunda componente (y: componente vertical) describe si el vector sube (+) o baja (-).

Ejemplo: $\vec{a}$ (3,-2) Este vector avanza 3 y desciende 2.

Cuando definimos un vector a partir de dos puntos (origen (x_1, y_1) y extremo (x_2, y_2)), obtenemos las coordenadas del vector restando el extremo menos el origen.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Ejemplo: A (1,-3) es el origen del vector y B (3, 5) el extremo.

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 5 - (-3)) = (2, 8)$$ Avanza 2 (coy sube 8.

b) **Módulo**: es un número que representa su longitud. Para calcularlo aplicamos el teorema de Pitágoras, porque las componentes del vector son verticales y forman un triángulo rectángulo (siempre que no valgan 0):

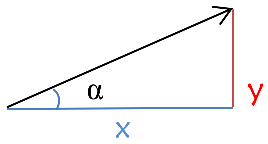
$\vec{a}$ (x, y) $\rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Este cálculo también permite calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano, donde $x = x_2 - x_1$; $y = y_2 - y_1$.

Actividad: A (-2,-5) es el origen del vector y B (3, 2) el extremo. Calcula el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ y la distancia entre los dos puntos. El método y la respuesta es el mismo en ambos casos.

c) **Dirección**: es la línea sobre la que se mueve un punto, que puede ser recorrida en dos sentidos opuestos. En este caso es la dirección de la recta que lo contiene. La dirección de un vector puede ser definida numéricamente mediante el cálculo del ángulo (argumento de un vector) que forma con el semieje positivo. Para calcularlo se aplica la definición de tangente:

$\tan \alpha = \frac{y}{x}$, donde x e y son las componentes del vector.

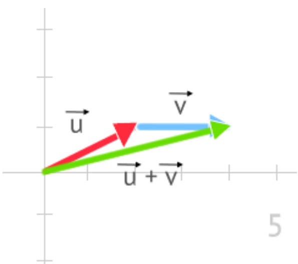


Además sabemos calcular $\alpha = arc \ \tan \frac{y}{x}$.

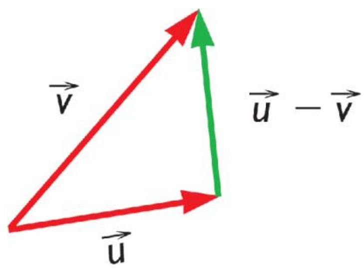
c) **Sentido**: es la orientación del vector, que va del origen al extremo. El **vector opuesto** es el que se obtiene al cambiar de signo sus componentes. Así, tienen el mismo módulo, dirección y sentido opuesto. Si los sumamos obtenemos el vector cero (origen y extremo coinciden).

3.- Operaciones con vectores:

Suma:



Resta:



a) **Suma y resta de vectores**: podemos realizar estas operaciones de forma analítica y geométrica. No olvidemos que restar es lo mismo que sumar el opuesto.

a.1) **Analíticamente**: se suman o restan sus componentes.

a.2) **Geométricamente**: se forma un paralelogramo uniendo el origen del segundo vector con el extremo del primer vector. El vector resultante es la diagonal.

Actividad: Calcula la suma y la resta de $\overrightarrow{AB}$ (6, 2) y $\overrightarrow{CD}$ (3,4) de forma analítica y geométrica.

b) **Producto de un número por un vector**: podemos realizar estas operaciones de forma analítica y geométrica.

a.1) **Analíticamente**: se multiplica el número por las componentes del vector.

a.2) **Geométricamente**: se lleva tantas veces el vector sobre sí mismo como indique el número.

Actividad: Dado el vector $\vec{a}$(3, -1), calcula de forma analítica y geométrica el producto por 2 y -2.

Actividad: Cuando multiplico un vector por un número, ¿varía su dirección? ¿Puede variar su sentido?

c) **Producto escalar de vectores**: partimos de una definición, y no se trata de comprender la fórmula este momento, sino de aplicar la definición de esta operación. El producto describe el grado de cooperación entre dos vectores.

El producto escalar permite calcular el ángulo entre dos vectores, y tiene la siguiente fórmula:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

Cada lado de la igualdad se calcula así:

Siendo $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ → $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

Ejemplo: Siendo $\vec{a} = (2,3)$ y $\vec{b} = (-2,5)$ →

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 = 11$$

$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ es el producto de los módulos de ambos vectores.

Siguiendo nuestro ejemplo:

$$\begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\ |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29} \end{cases}$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{29} = \sqrt{377}$$

Finalmente vamos a sustituir todo y despejar $\cos\alpha$ para obtener el ángulo entre los dos vectores $\vec{a}\ y\ \vec{b}$:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 11 = \sqrt{377} \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{11}{\sqrt{377}}$, y de aquí calculamos α → $\alpha = arccos\frac{11}{\sqrt{377}} = 55^\circ 49'$

ECUACIONES DE LA RECTA:

Todos los puntos de una recta r están alineados. Todos los vectores de r tienen la misma dirección. Si llamamos $\vec{x}$ a un vector de la recta, ¿serán vectores de la recta $2\vec{x}$ y $-\vec{x}$?

La ecuación de una recta r es una ecuación que verifican todos los puntos de r y ninguno más.

1.- Definición: una recta queda determinada por un punto $P\ (p_1, p_2)$ y un vector director $\vec{V}(v_1, v_2)$. Los puntos de la recta $X(x, y)$ se determinan con un vector de posición $\vec{x} = P + t \cdot \vec{v}$, donde t es un número real.

Los elementos característicos de una recta son:

- Un punto: $P\ (p_1, p_2)$ — Ejemplo: $P\ (-5,2)$
- Un vector director: $V(v_1, v_2)$ — Ejemplo: $\vec{v}\ (4,3)$
- La pendiente: $m = \frac{v_2}{v_1}$ — Ejemplo: $m = \frac{3}{4}$
- Un vector normal: $\vec{n} = (v_2, -v_1)$ — Ejemplo: $\vec{n}\ (3, -4)$

2.- Ecuaciones de la recta:

a) **Ecuación vectorial**: $\vec{x} = P + t \cdot \vec{v}; t \in \mathbb{R}$

$$(x, y) = (p_1, p_2) + t \cdot (v_1, v_2); t \in \mathbb{R}$$

b) **Ecuaciones paramétricas**:

Se obtienen de la ecuación vectorial al igualar (o despejar) las componentes x e y.

$$\left.\begin{array}{l} x = p_1 + t\ v_1 \\ y = p_2 + t\ v_2 \end{array}\right\}; t \in \mathbb{R}$$

c) **Ecuación continua**:

Se obtiene de las ecuaciones paramétricas, despejando el parámetro t, e igualando los valores.

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

d) **Ecuación general**:

Se obtiene de la ecuación continua, al realizar las operaciones y pasar todos los términos al primer miembro.

$$Ax + By + C = 0$$

Un vector normal es $\vec{n} = (\mathrm{A}, B)$

Un vector director es $\vec{v} = (\mathrm{B}, -\mathrm{A})$

La pendiente es $m = -\frac{A}{B}$

e) **Ecuación explícita**:

Se obtiene despejando y en la ecuación general $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es la ordenada en el origen.

f) **Ecuación punto - pendiente**:

Es la ecuación de una recta en la que se conoce un punto $A(x_1, y_1)$ y la pendiente m.

$$y = m\,(x - x_1) + y_1$$

g) **Ecuación de la recta que pasa por dos puntos**:

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, se halla el vector director para hallar la pendiente, y luego se aplica la ecuación punto – pendiente.

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) + y_1 = m\,(x - x_1) + y_1$$

h) **Ecuación de la recta canónica o en forma segmentaria:**

Es la recta de la forma $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, en la $\boldsymbol{p}$ es el punto en que la recta corta el eje x, y $\boldsymbol{q}$ es el punto en que la recta corta el eje y.

PROPIEDADES AFINES Y MÉTRICAS:

1.- Posiciones relativas de punto y recta:

Entre un punto y una recta se pueden dar dos posiciones relativas:

a) El punto está en la recta. Es así si verifica la ecuación de la recta.

b) El punto no está en la recta. No verifica la ecuación de la recta.

2.- Posiciones relativas de dos rectas en el plano:

Consiste en determinar si son secantes, paralelas y coincidentes. Se puede observar mentalmente comparando los coeficientes:

Secantes: tienen un punto en común. Los coeficientes de las variables **no** son proporcionales.

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

Paralelas: no tienen ningún punto en común. Los coeficientes de las variables **sí** son proporcionales, y **no** lo son los términos independientes.

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Coincidentes: son la misma recta. Los coeficientes de las variables y los términos independientes **sí** son proporcionales.

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

3.- Rectas perpendiculares:

Dos rectas r y s son perpendiculares si la pendiente de una es la opuesta de la inversa de la otra.

$$m_r = \frac{v_2}{v_1},\ m_t = -\frac{v_1}{v_2}$$

4.- Distancias entre dos puntos:

La distancia entre dos puntos A y B es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = d\,(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

5.- Circunferencia:

La circunferencia de centro C (a, b) y radio R es el lugar geométrico de los puntos del plano P (x, y) cuya distancia al centro S es R. Su ecuación es:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$