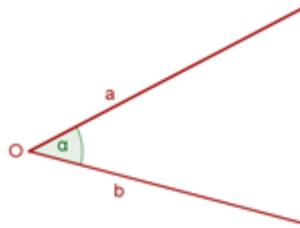


TRIGONOMETRÍA

MEDIDA DE ÁNGULOS

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama lados y al origen común vértice.



El ángulo es **positivo** si se desplaza en **sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj** y **negativo en caso contrario**

Para **medir ángulos** se utilizan las siguientes unidades:

Grado sexagesimal (°)

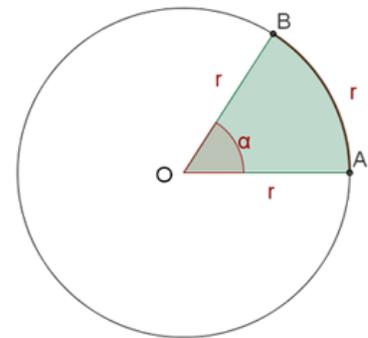
Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal.

Un **grado** tiene **60 minutos** (') y un **minuto** tiene **60 segundos** (").

Radián (rad)

Es la medida de un **ángulo** cuyo **arco mide igual que el radio**.

$$1\pi \text{ rad} = 180^\circ$$



Paso de grados a radianes

$$30^\circ \longrightarrow \text{rad}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$30^\circ = x \text{ rad}$$

$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180^\circ}{30^\circ}$$

$$\alpha = \frac{30^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180^\circ}{30^\circ}$$

$$\alpha = \frac{30^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Paso de radianes a grados

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} \longrightarrow \circ$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = x^\circ \qquad \frac{\pi}{\pi} = \frac{180^\circ}{\alpha} \qquad \alpha = \frac{180^\circ \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

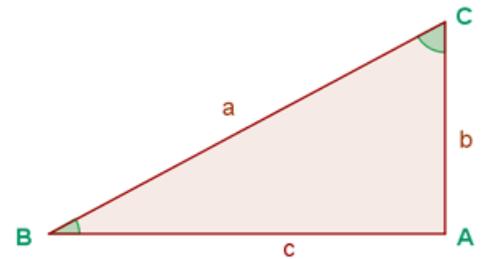
Razones trigonométricas

Seno

Seno del ángulo B: es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa**.

Se denota por **sen B**.

$$\text{sen B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$



Coseno

Coseno del ángulo B: es la **razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa**.

Se denota por **cos B**.

$$\text{cos B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Tangente

Tangente del ángulo B: es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo**.

Se denota por **tg B**.

$$\text{tg B} = \frac{\text{sen B}}{\text{cos B}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$

Cosecante

Cosecante del ángulo B: es la **razón inversa del seno de B**.

Se denota por **cosec B**.

$$\text{cosec B} = \frac{1}{\text{sen B}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Secante

Secante del ángulo B: es la **razón inversa del coseno de B**.

Se denota por **sec B**.

$$\sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c}$$

Cotangente

Cotangente del ángulo B: es la **razón inversa de la tangente de B**.

Se denota por **cotg B**.

$$\cotg B = \frac{1}{\tg B} = \frac{\cos B}{\sen B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

Razones trigonométricas de cualquier ángulo

Se llama **circunferencia goniométrica** a aquella que tiene su **centro en el origen de coordenadas** y su **radio es la unidad**. En la circunferencia goniométrica **los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes** que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.

QOP y TOS son triángulos semejantes.

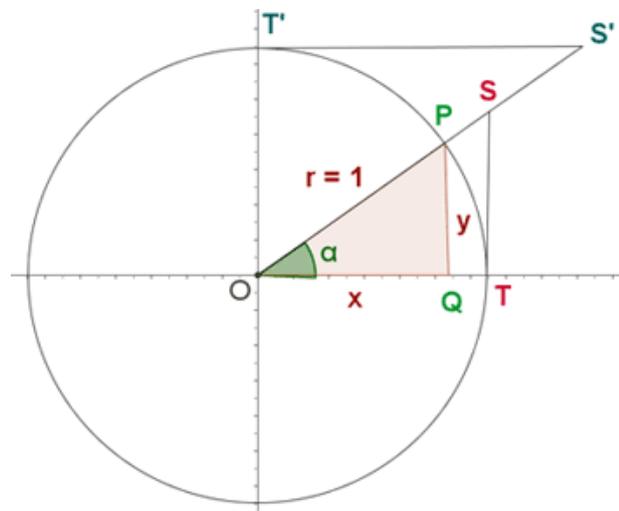
QOP y T'OS' son triángulos semejantes.

El seno es la ordenada.

El coseno es la abscisa.

$$-1 \leq \sen \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$



$$\sen \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{r} = PQ$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{OP}{PQ} = \frac{OS'}{OT'} = \frac{OS'}{r} = OS'$$

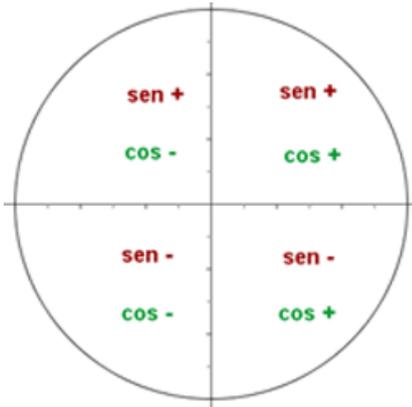
$$\cos \alpha = \frac{OQ}{OP} = OQ$$

$$\sec \alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{OS}{OT} = \frac{OS}{r} = OS$$

$$\tg \alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{ST}{OT} = \frac{ST}{r} = ST$$

$$\cotg \alpha = \frac{OQ}{PQ} = \frac{S'T'}{OT'} = \frac{S'T'}{r} = S'T'$$

Signo de las razones trigonométricas



$\alpha :$	0°	90°	180°	270°
<i>sen</i>	0	1	0	-1
<i>cos</i>	1	0	-1	0
<i>tg</i>	0	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow -\infty$

Razones trigonométricas de 30° , 45° y 60°

Si dibujamos un triángulo equilátero ABC, cada uno de sus tres ángulos mide 60° y, si trazamos una altura del mismo, h, el ángulo del vértice A por el que la hemos trazado queda dividido en dos iguales de 30° cada uno. Recurriendo al Teorema de Pitágoras, tenemos que la altura es:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

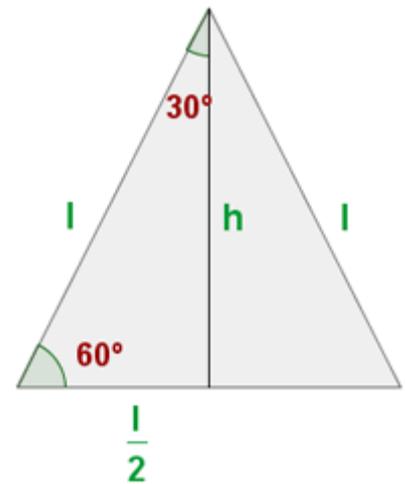
$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} l} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}$$



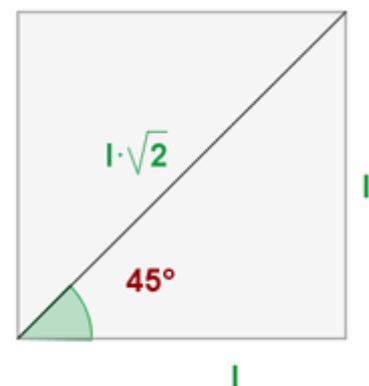
Seno, coseno y tangente de 45°

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$



Razones trigonométricas de ángulos notables

α :	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow -\infty$

Identidades trigonométricas fundamentales

$$\mathbf{\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1} \quad (1)$$

Si en (1) dividimos todo entre $\text{cos}^2 \alpha$ tenemos:

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} + \frac{\text{cos}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha}, \text{ simplificando}$$

$$\mathbf{1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha} \quad \text{ya que } \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \text{tg}^2 \alpha \text{ y } \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = \text{sec}^2 \alpha$$

Si en (1) dividimos todo entre $\text{sen}^2 \alpha$

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} + \frac{\text{cos}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}, \text{ simplificando}$$

$$\mathbf{\text{cosec}^2 \alpha = 1 + \text{cotg}^2 \alpha} \quad \text{ya que } \frac{\text{cos}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} = \text{cotg}^2 \alpha \text{ y } \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} = \text{cosec}^2 \alpha$$

Ejemplos:

1.- Sabiendo que $\text{sen } \alpha = 3/5$, y que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Calcular las razones trigonométricas del ángulo α .

$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{5}{3}$$

Como $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ despejando $\text{cos}^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$ luego $\text{cos } \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$

Sustituyendo:

$$\text{cos } \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{sec } \alpha = -\frac{5}{4}$$

$$\text{Como } \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad \text{tg } \alpha = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{cotg } \alpha = -\frac{4}{3}$$

2.- Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = 2$, y que $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α .

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sec \alpha = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5}$$

Como $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ entonces $\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$

$$\operatorname{sen} \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 2$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{2}$$

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Ángulos suplementarios

Son aquéllos cuya suma es 180° ó π radianes.

$$\operatorname{sen} (\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

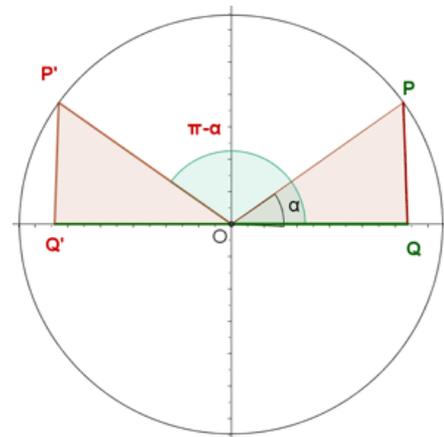
$$\operatorname{tg} (\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Ejemplo:

$$\operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



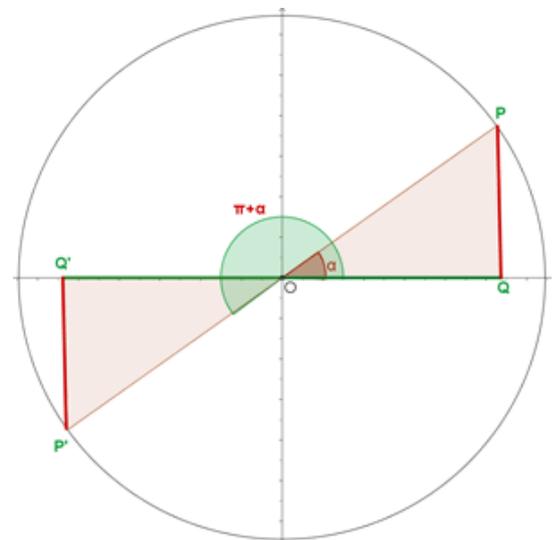
Ángulos que se diferencian en 180°

Son aquéllos cuya suma es 180° ó π radianes.

$$\operatorname{sen} (\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} (\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$



Ejemplo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 210^\circ &= \operatorname{sen} (180^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{cos} 210^\circ &= \operatorname{cos} (180^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{cos} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} 210^\circ &= \operatorname{tg} (180^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

Ángulos opuestos

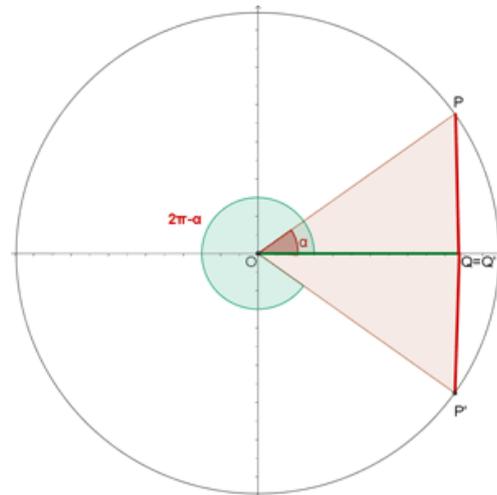
Son aquéllos cuya suma es 360° ó 2π radianes.

$$\operatorname{sen} (2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos} (2\pi - \alpha) = \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{tg} (2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Ejemplo:



$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 330^\circ &= \operatorname{sen} (360^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{cos} 330^\circ &= \operatorname{cos} (360^\circ - 30^\circ) = \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} 330^\circ &= \operatorname{tg} (360^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

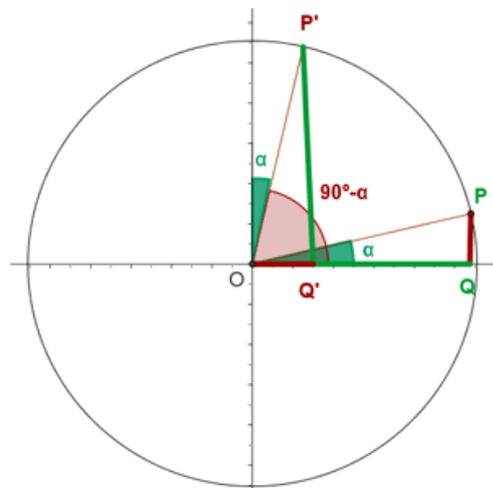
Ángulos complementarios

Son aquéllos cuya suma es 90° ó $\frac{\pi}{2}$ radianes.

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{cotg} \alpha$$



Ejemplo:

$$\text{sen } 60^\circ = \text{sen } (90^\circ - 30^\circ) = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \text{cos } (90^\circ - 30^\circ) = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \text{tg } (90^\circ - 30^\circ) = \text{cotg } 30^\circ = \sqrt{3}$$