

Números Naturales

Con los **números naturales** contamos los elementos de un conjunto (**número cardinal**). O bien expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (**ordinal**).

El conjunto de los **números naturales** está formado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$



La **suma** y el **producto** de dos números naturales es otro número natural.

La **diferencia** de dos números naturales *no* siempre es un número natural, sólo ocurre cuando el minuendo es mayor que sustraendo.

$$5 - 3 \in \mathbb{N}$$

$$3 - 5 \notin \mathbb{N}$$

El **cociente** de dos números naturales *no* siempre es un número natural, sólo ocurre cuando la división es exacta.

$$6 : 2 \in \mathbb{N}$$

$$2 : 6 \notin \mathbb{N}$$

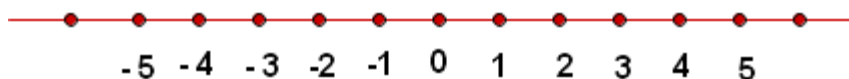
Podemos utilizar **potencias**, ya que es la forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.

La **raíz** de un número natural *no* siempre es un número natural, sólo ocurre cuando la raíz es exacta.

Los números enteros

Los **números enteros** son del tipo:

$$\mathbb{Z} = \{\dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$$



Nos permiten expresar: el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, las profundidades con respecto al nivel del mar, etc.

La **suma**, la **diferencia** y el **producto** de dos números enteros es otro número entero.

El **cociente** de dos números enteros *no* siempre es un número entero, sólo ocurre cuando la división es exacta.

$$6 : 2 \in \mathbb{Z}$$

$$2 : 6 \notin \mathbb{Z}$$

Podemos operar con **potencias**, pero el **exponente** tiene que ser un número **natural**.

$$(-2)^3 = -8 \in \mathbb{Z}$$

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{-8} \notin \mathbb{Z}$$

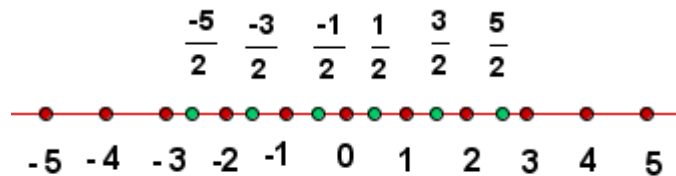
La **raíz** de un **número entero** *no siempre es un número entero*, sólo ocurre cuando la raíz es exacta o si se trata de una raíz de índice par con radicando positivo.

$$\sqrt{-4} \notin \mathbb{Z}$$

Los números racionales

Se llama **número racional** a todo número que puede representarse como el **cociente de dos enteros**, con **denominador distinto de cero**.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$$



Los **números decimales** (decimal exacto, periódico puro y periódico mixto) son **números racionales**; pero los números decimales ilimitados no.

La **suma**, la **diferencia**, el **producto** y el **cociente** de **dos números racionales** es otro **número racional**.

Podemos operar con **potencias**, pero el **exponente** tiene que ser un número **entero**.

La **raíz** de un **número racional** *no siempre es un número racional*, sólo ocurre cuando la raíz es exacta y si el índice es par el radicando ha de ser positivo.

$$\sqrt{-\frac{4}{5}} \notin \mathbb{Q}$$

Los números irracionales

Un **número** es **irracional** si posee **infinitas cifras decimales no periódicas**, por tanto **no se pueden expresar en forma de fracción**.

El **número irracional** más conocido es π , que se define como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

$$\mu = 3.141592653589\dots$$

Otros **números irracionales** son:

El número e aparece en procesos de crecimiento, en la desintegración radiactiva, en la fórmula de la catenaria, que es la curva que podemos apreciar en los tendidos eléctricos.

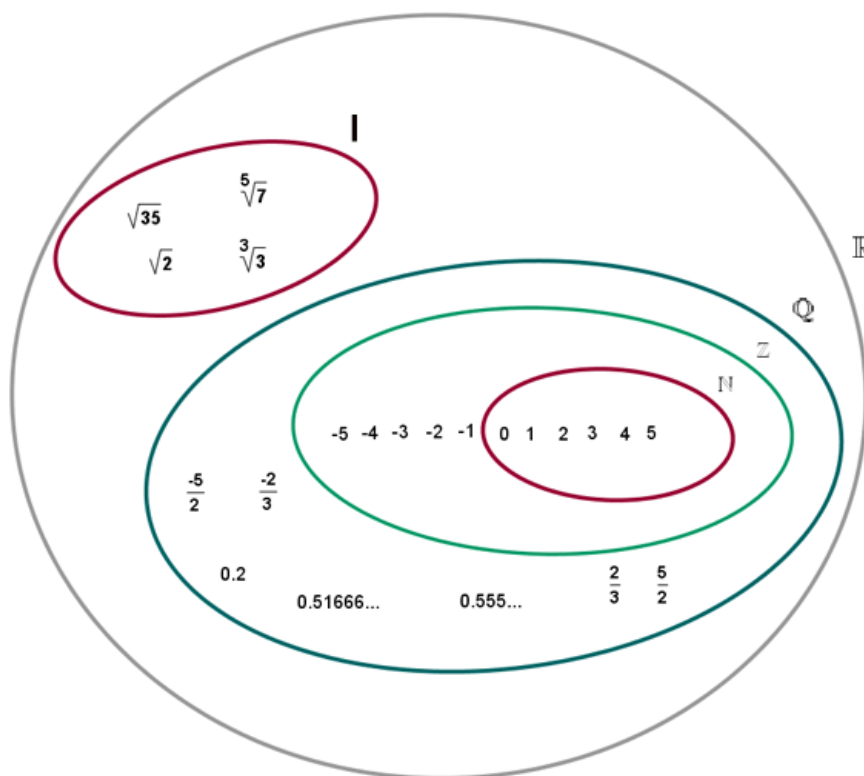
$$e = 2.718281828459\dots$$

El **número áureo**, Φ , utilizado por artistas de todas las épocas (Fidias, Leonardo da Vinci, Alberto Durero, Dalí,..) en las proporciones de sus obras.

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033988749\dots$$

Números reales

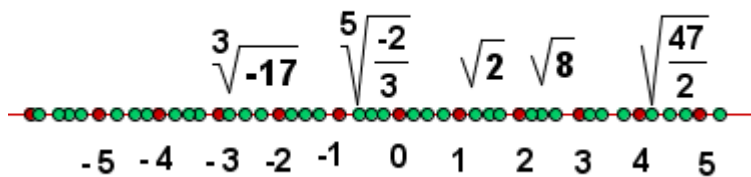
El **conjunto formado** por los números **racionales** e **irracionales** es el conjunto de los **números reales**, se designa por \mathbb{R} .



Con los **números reales** podemos realizar **todas las operaciones**, excepto la **radicación de índice par y radicando negativo** y la **división por cero**.

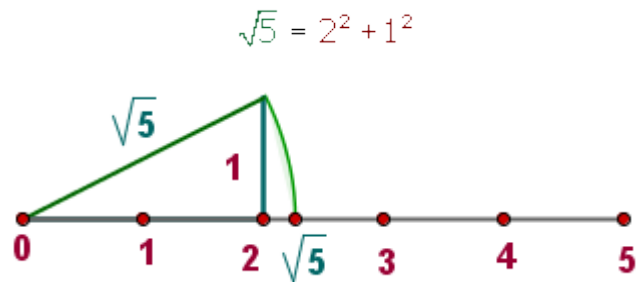
La recta real

A todo **número real** le corresponde un punto de la recta y a **todo punto de la recta un número real**.



Representación de los números reales

Los **números reales** pueden ser representados en la recta con tanta aproximación como queramos, pero hay casos en los que podemos representarlos de forma exacta.



Intervalo abierto y cerrado

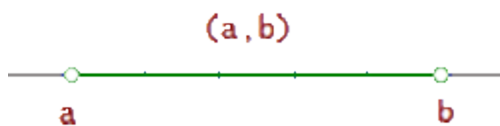
Definición de intervalo

Se llama **intervalo** al conjunto de números reales comprendidos entre otros dos dados: **a** y **b** que se llaman **extremos del intervalo**.

Intervalo abierto

Intervalo abierto, (a, b) , es el conjunto de todos los números reales mayores que **a** y menores que **b**.

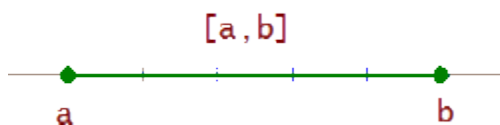
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



Intervalo cerrado

Intervalo cerrado, $[a, b]$, es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que **a** y menores o iguales que **b**.

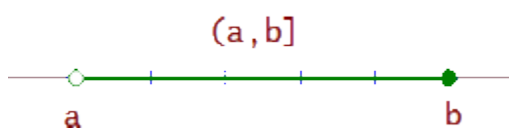
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



Intervalo semiabierto por la izquierda

Intervalo semiabierto por la izquierda, $(a, b]$, es el conjunto de todos los números reales mayores que **a** y menores o iguales que **b**.

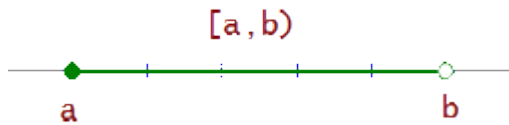
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$



Intervalo semiabierto por la derecha

Intervalo semiabierto por la derecha, $[a, b)$, es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b .

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} / a \leq x < b \}$$



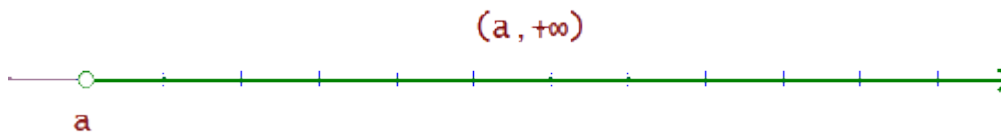
Cuando queremos nombrar un conjunto de puntos formado por dos o más de estos intervalos, se utiliza el signo \cup (**unión**) entre ellos.

Semirrectas

Las **semirrectas** están determinadas por un número. En una **semirrecta** se encuentran todos los números mayores (o menores) que él.

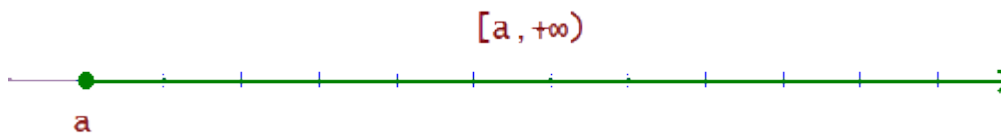
$$x > a$$

$$(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} / a < x < +\infty \}$$



$$x \geq a$$

$$[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} / a \leq x < +\infty \}$$



$$x < a$$

$$(-\infty, a) = \{ x \in \mathbb{R} / -\infty < x < a \}$$



$$x \leq a$$

$$(-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq a \}$$

Valor absoluto de un número real

Valor absoluto de un número real a , se escribe $|a|$, es el **mismo número** a cuando es **positivo o cero**, y **opuesto** de a , si a es **negativo**.

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si } a < 0 \\ a & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$$

$$|5| = 5 \quad |-5| = 5 \quad |0| = 0$$

$$|x| = 2 \quad x = -2 \quad x = 2$$

$$|x| < 2 \quad -2 < x < 2 \quad x \in (-2, 2)$$

$$|x| > 2 \quad x < -2 \text{ ó } x > 2 \quad (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$|x - 2| < 5 \quad -5 < x - 2 < 5$$

$$-5 + 2 < x < 5 + 2 \quad -3 < x < 7$$

Propiedades del valor absoluto

1 Los **números opuestos** tienen **igual valor absoluto**.

$$|a| = |-a|$$

$$|5| = |-5| = 5$$

2 El **valor absoluto de un producto** es igual al **producto de los valores absolutos** de los factores.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|5 \cdot (-2)| = |5| \cdot |(-2)| \quad |-10| = |5| \cdot |2| \quad 10 = 10$$

3 El **valor absoluto de una suma** es menor o igual que la **suma de los valores absolutos de los sumandos**.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|5 + (-2)| \leq |5| + |(-2)| \quad |3| = |5| + |2| \quad 3 \leq 7$$

Distancia

La **distancia** entre **dos números reales** a y b , que se escribe $d(a, b)$, se define como el **valor absoluto de la diferencia de ambos números**:

$$d(a, b) = |b - a|$$

La **distancia** entre -5 y 4 es:

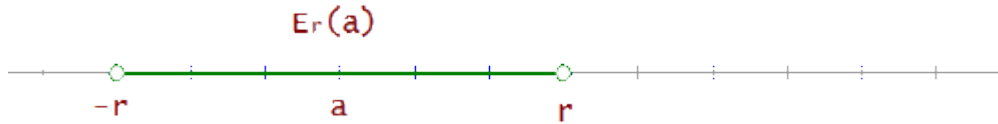
$$d(-5, 4) = |4 - (-5)| = |4 + 5| = |9|$$

Entornos

Definición de entorno

Se llama **entorno de centro a y radio r**, y se denota por $E_r(a)$ o $E(a,r)$, al **intervalo abierto** $(a-r, a+r)$.

$$E_r(a) = (a-r, a+r)$$



Los **entornos** se expresan con ayuda del **valor absoluto**.

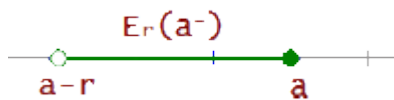
$E_r(0) = (-r, r)$ se expresa también $|x| < r$, o bien, $-r < x < r$.

$E_r(a) = (a-r, a+r)$ se expresa también $|x-a| < r$, o bien, $a-r < x < a+r$.

Entornos laterales

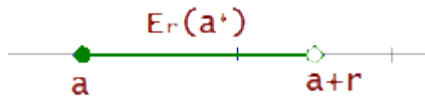
Por la izquierda

$$E_r(a^-) = (a-r, a)$$



Por la derecha

$$E_r(a^+) = (a, a+r)$$



Entorno reducido

Se emplea cuando se quiere saber qué pasa en las proximidades del punto, sin que interese lo que ocurre en dicho punto.

$$E_r^*(a) = \{ x \in (a-r, a+r), x \neq a \}$$

