INECUACIONES

Inecuaciones de primer grado

Resolución de inecuaciones de primer grado

Consideremos la inecuación:

$$2-\left[-2\cdot(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

La resolveremos aplicando los siguientes pasos:

1º Quitar corchetes.

$$2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

2º Quitar paréntesis.

$$2+2x+2+\frac{x-3}{2}\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

3º Quitar denominadores.

$$24+24x+24+6\cdot(x-3)\leq 8x-(5x-3)+36x$$

$$24+24x+24+6x-18\leq 8x-5x+3+36x$$

4º Agrupar los términos en x a un lado de la desigualdad y los términos independientes en el otro.

$$24x+6x-8x+5x-36x\leq 3-24-24+18$$

5º Efectuar las operaciones

$$-9x\leq -27$$

6º Como el coeficiente de la x es negativo multiplicamos por−1, por lo que cambiará el sentido de la desigualdad.

$$9x\geq 27$$

7º Despejamos la incógnita.

$$x\geq 3$$

Obtenemos la solución como una desigualdad, pero ésta también podemos expresarla:

De forma gráfica:

Como un intervalo:

[3, +∞)

Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Su solución es uno de los semiplanos que resulta de representar la ecuación resultante, que se obtiene al transformar la desigualdad en una igualdad.

$2x + y \leq 3$

1º Transformamos la desigualdad en igualdad.

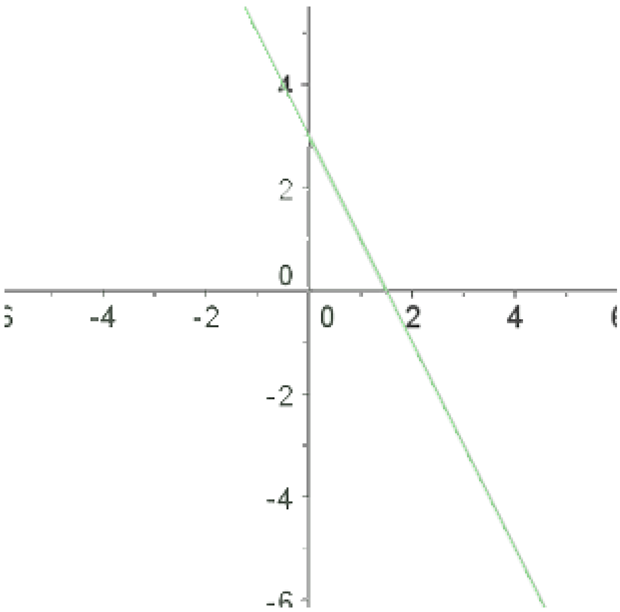
$2x + y = 3$

2º Damos a una de las dos variables dos valores, con lo que **obtenemos dos puntos.**

$x = 0; \quad 2 \cdot 0 + y = 3; \quad y = 3; \qquad (0, 3)$

$x = 1; \quad 2 \cdot 1 + y = 3; \quad y = 1; \qquad (1, 1)$

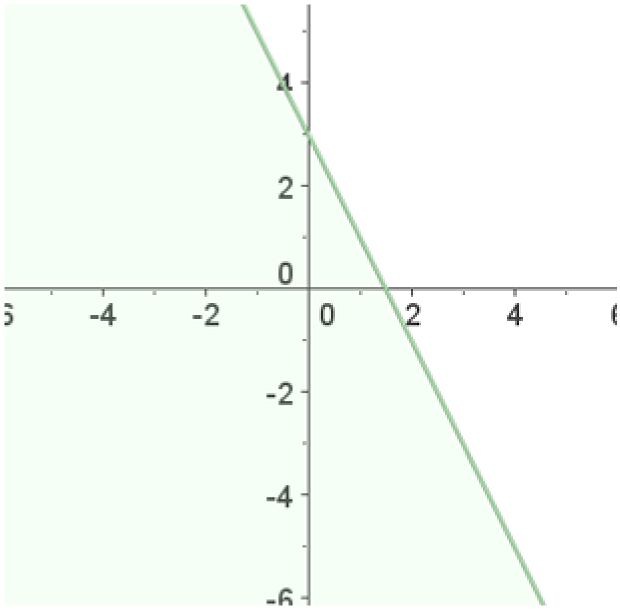
3º Al representar y unir estos puntos **obtenemos una recta**.



4º Tomamos un punto, por ejemplo el (0, 0), los **sustituimos en la desigualdad**. **Si se cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto, si no la solución será el otro semiplano.**

$2x + y \leq 3$

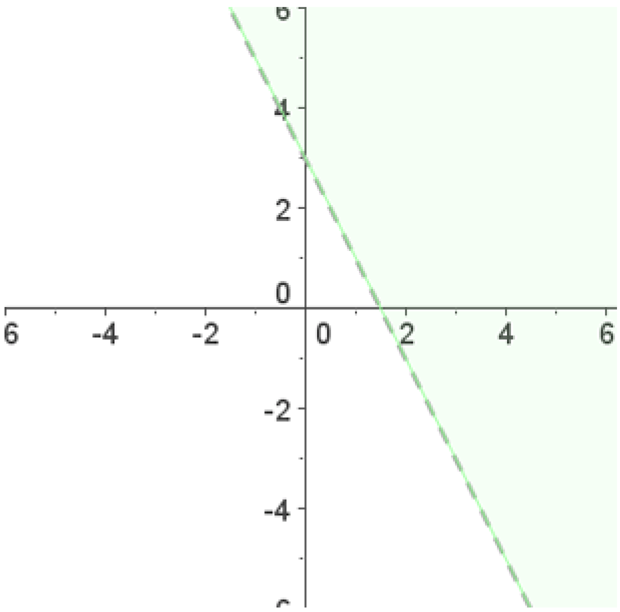
$2 \cdot 0 + 0 \leq 3$ $\quad$ $0 \leq 3$ $\quad$ **Sí**



$2x + y > 3$

$2 \cdot 0 + 0 > 3$ $\quad$ $0 > 3$ $\quad$ **No**

En este caso (mayor que, pero no igual) los puntos de la recta no pertenecen a la solución.



Inecuaciones de segundo grado

Consideremos la inecuación:

$x^2 - 6x + 8 > 0$

La resolveremos aplicando los siguientes pasos:

1ºIgualamos el polinomio del primer miembro a cero y obtenemos las raíces de la ecuación de segundo grado.

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

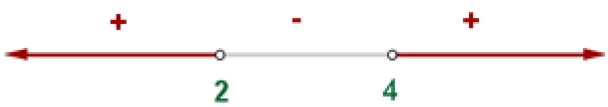
2º Representamos estos valores en la recta real. Tomamos un punto de cada intervalo y evaluamos el signo en cada intervalo:

$P(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 > 0$

$P(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 17 - 18 < 0$

$P(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 33 - 30 > 0$

3º La solución está compuesta por los intervalos (o el intervalo) que tengan el mismo signo que el polinomio.



$S = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

$x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

$(x + 1)^2 \geq 0$

Como un número elevado al cuadrado es siempre positivo la solución es $\mathbb{R}$

		Solución
$x^2 + 2x + 1 \geq 0$	$(x + 1)^2 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 + 2x + 1 > 0$	$(x + 1)^2 > 0$	$\mathbb{R} - \{-1\}$
$x^2 + 2x + 1 \leq 0$	$(x + 1)^2 \leq 0$	$x = -1$
$x^2 + 2x + 1 < 0$	$(x + 1)^2 < 0$	$\varnothing$

$x^2 + x + 1 > 0$

$x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Cuando no tiene raíces reales, le damos al polinomio cualquier valor si:

El signo obtenido coincide con el de la desigualdad, la solución es $\mathbb{R}$.

El signo obtenido no coincide con el de la desigualdad, no tiene solución.

	Solución
$x^2 + x + 1 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 + x + 1 > 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 + x + 1 \leq 0$	$\varnothing$
$x^2 + x + 1 < 0$	$\varnothing$

Inecuaciones racionales

Las **inecuaciones racionales** se resuelven de un modo similar a las de **segundo grado**, pero hay que tener presente que **el denominador no puede ser cero**.

$$\frac{x-2}{x-4} \geq 0$$

1º Hallamos las raíces del numerador y del denominador.

$x - 2 = 0 \qquad x = 2$

$x - 4 = 0 \qquad x = 4$

2º Representamos estos valores en la recta real, teniendo en cuenta que las raíces del denominador, independientemente del signo de la desigualdad, tienen que ser abiertas.

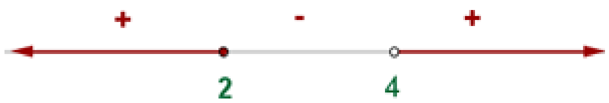
3ºTomamos **un punto de cada intervalo y evaluamos el signo** en cada intervalo:

$$\frac{x-2}{x-4} \geq 0 \qquad x \neq 4$$

$$x = 0 \qquad \frac{0-2}{0-4} > 0$$

$$x = 3 \qquad \frac{3-2}{3-4} < 0$$

$$x = 5 \qquad \frac{5-2}{5-4} > 0$$



4º **La solución está compuesta por los intervalos** (o el intervalo) qu**e tengan el mismo signo que la fracción polinómica**.

S = (-∞, 2] $\cup$**(4, ∞)**

$$\frac{x+3}{x-2} < 2$$

Pasamos el 2 al primer miembro y ponemos a común denominador.

$$\frac{x+3}{x-2} - 2 < 0 \qquad \frac{x+3-2(x-2)}{x-2} < 0 \qquad \frac{-x+7}{x-2} < 0$$

Hallamos las raíces del numerador y del denominador.

$-x + 7 = 0 \qquad x = 7$

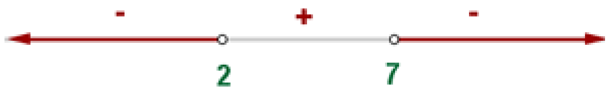
$x - 2 = 0 \qquad x = 2$

Evaluamos el signo:

$x = 0 \qquad \dfrac{0+7}{0-2} < 0$

$x = 3 \qquad \dfrac{3+7}{3-2} > 0$

$x = 8 \qquad \dfrac{-8+7}{8-2} < 0$



S = (-∞, 2) $\cup$(7, ∞)