

Potencias

Potencias con exponente entero

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0$$

$$e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Con exponente racional o fraccionario

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Propiedades

1. $a^0 = 1$.

2. $a^1 = a$

3.Producto de potencias con la misma base: Es otra potencia con **la misma base** y cuyo **exponente** es la **suma de los exponentes**.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(-2)^5 \cdot (-2)^2 = (-2)^{5+2} = (-2)^7 = -128$$

4.División de potencias con la misma base: Es otra potencia con la **misma base** y cuyo **exponente** es la **diferencia de los exponentes**.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3 = -8$$

5.Potencia de una potencia: Es otra potencia con la **misma base** y cuyo **exponente** es el **producto de los exponentes**.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$[(-2)^3]^2 = (-2)^6 = 64$$

6.Producto de potencias con el mismo exponente: Es otra potencia con el **mismo exponente** y cuya **base** es el **producto de las bases**

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$(-2)^3 \cdot (3)^3 = (-6)^3 = -216$$

7.Cociente de potencias con el mismo exponente: Es otra potencia con el **mismo exponente** y cuya **base** es el **cociente de las bases**.

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

$$(-6)^3 : 3^3 = (-2)^3 = -8$$

Radicales

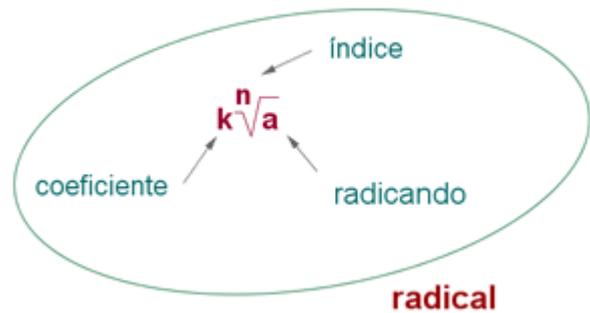
Un **radical** es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, en la que $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$; con tal que cuando a sea negativo, n ha de ser impar.

$$\sqrt{64} = \pm 8$$

$$\sqrt{-64} \notin \mathbb{R}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$



Potencias y radicales

Se puede expresar un **radical** en forma de **potencia**:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$$

Radicales equivalentes

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones que dice que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número la fracción es equivalente, obtenemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}} \quad \sqrt[n]{a^m} = n\sqrt[k]{a^{mk}}$$

Si se multiplican o dividen el **índice** y el **exponente** de un **radical** por un mismo **número natural**, se obtiene otro **radical equivalente**.

$$\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$$

Simplificación de radicales

Si existe un **número natural** que divida al **índice** y al **exponente** (o los exponentes) del radicando, se obtiene un **radical simplificado**.

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[2]{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

Reducción de radicales a índice común

1 Hallamos el **mínimo común múltiplo de los índices**, que será el común índice

2 Dividimos el común índice por cada uno de los índices y cada resultado obtenido se **multiplica por sus exponentes** correspondientes.

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}$$

$$\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$$

$$\text{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12$$

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[12]{2^6} & \sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4} & \sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^3)^3} \\ \sqrt[12]{2^6} & \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} & \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9} \end{array}$$

Extracción e introducción de factores en un radical

Extracción de factores fuera del signo radical

Se **descompone** el radicando **en factores**. Si:

1 Un **exponente es menor** que el índice, el factor correspondiente **se deja en el radicando**.

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3}$$

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$$

2 Un **exponente es igual** al índice, el factor correspondiente **sale fuera del radicando**.

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

3 Un **exponente es mayor que el índice**, se **divide** dicho exponente **por el índice**. El **cociente** obtenido es el **exponente del factor fuera** del radicando y el **resto** es el **exponente del factor dentro** del radicando.

$$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2 \sqrt{3} \quad \begin{array}{r} 4 \underline{) 2} \\ 0 \quad 2 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3 \sqrt[3]{3^2} \quad \begin{array}{r} 5 \underline{) 3} \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

$$\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2 \sqrt{2 \cdot 5}$$

$$\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$$

Introducción de factores dentro del signo radical

Se **introducen** los **factores** elevados al **índice** correspondiente del **radical**.

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

$$2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$2^2 \cdot 3^3 \sqrt[4]{6}$$

$$= \sqrt[4]{(2^2)^4 \cdot (3^3)^4 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$$

Suma de radicales

Solamente pueden **sumarse** (o **restarse**) **dos radicales** cuando son **radicales semejantes**, es decir, si son **radicales** con el **mismo índice** e **igual radicando**.

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} + c\sqrt[n]{k} = (a+b+c)\sqrt[n]{k}$$

Ejemplos:

$$2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 - 4 + 1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = (3 - 2 - 1)\sqrt[4]{5} = 0$$

$$\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} = \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Producto de radicales

Radicales del mismo índice

Para **multiplicar radicales** con el **mismo índice** se **multiplican los radicandos** y se **deja el mismo índice**.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} =$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Cuando terminemos de realizar una operación **extraeremos factores del radical**, si es posible.

Radicales de distinto índice

Primero se **reducen a índice común** y luego se **multiplican**.

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} =$$

$$m.c.m.(2, 3, 4) = 12$$

$$\sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{(3^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3 \sqrt[12]{3^{11}}$$

$$\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} =$$

$$m.c.m.(2, 3) = 6$$

$$\sqrt[6]{12^3} \cdot \sqrt[6]{36^2} = \sqrt[6]{(2^2 \cdot 3)^3 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^2} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{2^{10} \cdot 3^7} = 6 \sqrt[6]{2^4 \cdot 3}$$

Cociente de radicales

Radicales del mismo índice

Para dividir radicales con el mismo índice se **dividen los radicandos** y se **deja el mismo índice**.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} =$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

Radicales de distinto índice

Primero se **reducen a índice común** y luego se **dividen**.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2}$$

Cuando terminemos de realizar una operación **simplificaremos el radical**, si es posible.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2}$$

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} =$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} &= \sqrt[6]{\frac{(256)^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\frac{(2^8)^3}{(2^4)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}} = \\ &= \sqrt[6]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^8} = 2^2 \sqrt[3]{2^2} = 4 \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

Potencia de radicales

Para elevar un **radical** a una **potencia**, se eleva a dicha **potencia** el **radicando** y se deja el **mismo índice**.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(\sqrt[3]{18})^2 =$$

$$(\sqrt[3]{18})^2 = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{(2 \cdot 3^2)^2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^4} = 3\sqrt[3]{12}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 =$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 = \frac{\sqrt[3]{(12)^4} \cdot \sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}} = \frac{\sqrt[3]{(2^2 \cdot 3)^4} \cdot 18}{\sqrt{(2 \cdot 3)^4}} =$$

$$= \frac{18 \cdot \sqrt[3]{2^8 \cdot 3^4}}{\sqrt{2^4 \cdot 3^4}} = 18 \sqrt[6]{\frac{(2^8 \cdot 3^4)^2}{(2^4 \cdot 3^4)^3}} = 18 \sqrt[6]{\frac{2^{16} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^{12}}} =$$

$$= 18 \sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}} = 18 \sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} = 18 \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

Raíz de un radical

La **raíz de un radical** es otro **radical** de **igual radicando** y cuyo **índice** es el **producto de los dos índices**.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

$$\sqrt{2 \sqrt[3]{2} \sqrt[4]{2}} =$$

$$\sqrt{2 \sqrt[3]{2} \sqrt[4]{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} \sqrt[4]{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4} \sqrt[4]{2}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{4} \sqrt[4]{(2^4)^4} \cdot 2} = \sqrt{\sqrt[3]{4} \sqrt[4]{2^{16}} \cdot 2} = \sqrt[24]{2^{17}}$$

Racionalización de radicales

La **racionalización de radicales** consiste en **quitar los radicales del denominador**, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos.

1 Racionalización del tipo $\frac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por \sqrt{c}

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b \cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

2Racionalización del tipo $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m} \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m \cdot c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{2 \sqrt[5]{8}}{3\sqrt[5]{2^5}} = \frac{2 \sqrt[5]{8}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

3Racionalización del tipo $\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{c}}}$, y en general cuando el denominador sea un **binomio con al menos un radical**.

Se multiplica el numerador y denominador por el **conjugado del denominador**.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$$a + b \quad \rightarrow \quad a - b$$

$$-a + b \quad \rightarrow \quad -a - b$$

$$a - b \quad \rightarrow \quad a + b$$

$$-a - b \quad \rightarrow \quad -a + b$$

También tenemos que tener en cuenta que: "suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados".

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{-1} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{(4 - 2\sqrt{2}) \cdot (4 + 2\sqrt{2})} = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{(4 - 2\sqrt{2}) \cdot (4 + 2\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{16 - 4 \cdot 2} = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{8} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot (5 + 2\sqrt{6})}{(5 - 2\sqrt{6}) \cdot (5 + 2\sqrt{6})} = \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{12}}{5^2 - (2\sqrt{6})^2} =$$

$$= \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{2^2 \cdot 3}}{25 - 4 \cdot 6} = \frac{10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}}{25 - 24} = 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$$