Concepto de función

Dados dos conjuntos A y B, llamamos **función a la correspondencia de A en B** en la cual **todos los elementos de A tienen a lo sumo una imagen en B**, es decir una imagen o ninguna.

Función real de variable real es toda correspondencia f que asocia a cada elemento de un determinado subconjunto de números reales, llamado dominio, otro número real.

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{f(x) = y}$$

El subconjunto en el que se define la función se llama **dominio o campo existencia de la función**. Se designa por D.

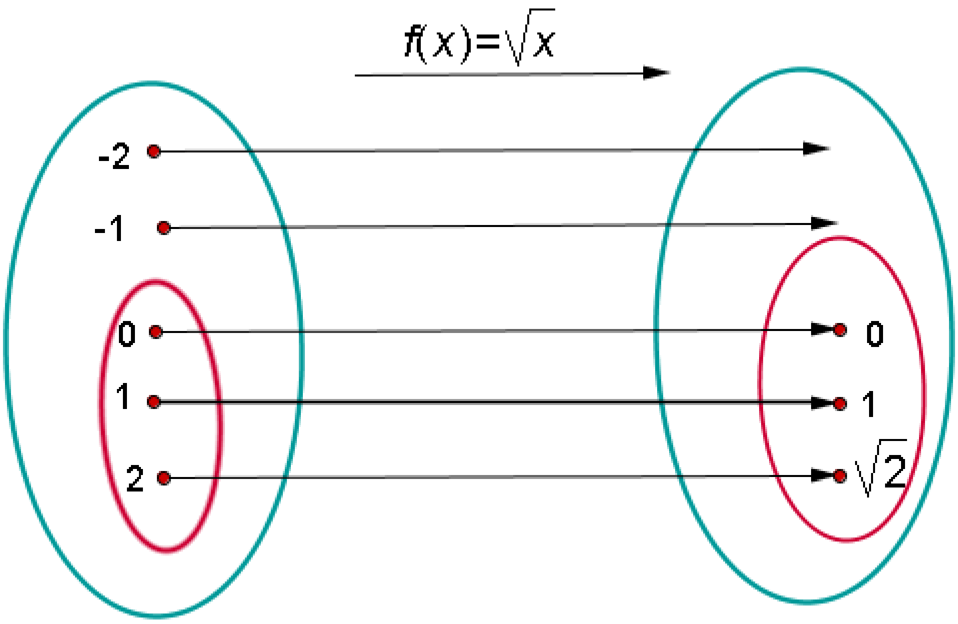
El número **x** perteneciente al **dominio** de la función recibe el nombre de **variable independiente**.

Al número, y, asociado por f al valor x, se le llama variable dependiente. La imagen de x se designa por f(x). Luego

$$\mathbf{y = f(x)}$$

Se denomina **recorrido** de una función al **conjunto de los valores reales que toma la variable y o f(x)**.

$$x \longrightarrow \sqrt{x}$$



Conjunto inicial **Conjunto final**

Dominio **Conjunto imagen o recorrido**

El dominio es el conjunto de elementos que tienen imagen.

D = {x ∈ ℝ/ ∃f (x)}

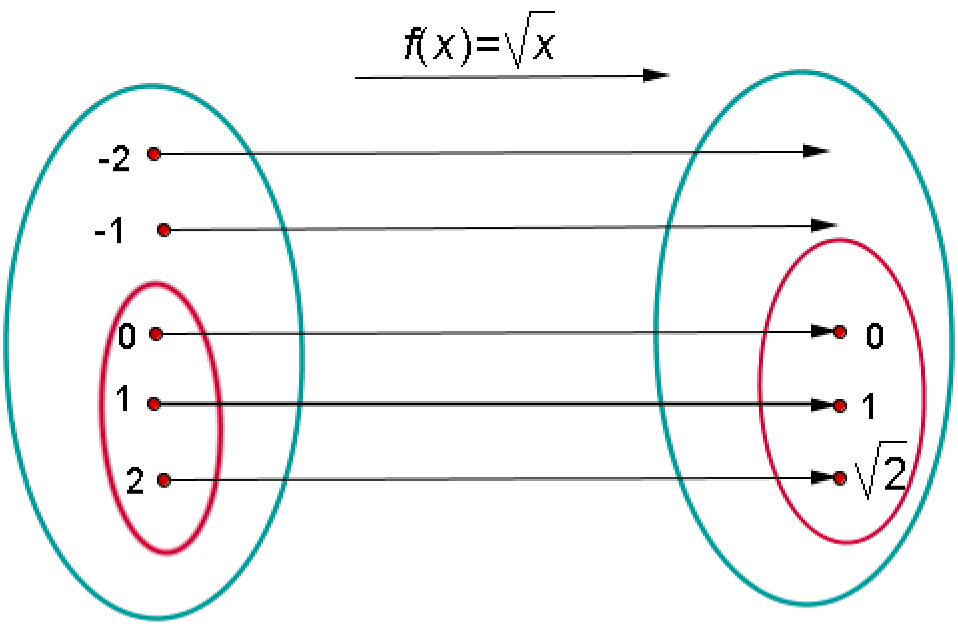
El recorrido es el conjunto de elementos que son imágenes.

R = {f (x) / x ∈D}

Dominio de una función

El dominio es el conjunto de elementos que tienen imagen.

D = {x ∈ ℝ/ ∃f (x)}



Conjunto inicial **Conjunto final**

Dominio **Conjunto imagen o recorrido**

Estudio del dominio de una función

Dominio de la función polinómica entera

El dominio es R, cualquier número real tiene imagen.

$f(x)= x^2 - 5x + 6$ **D=R**

Dominio de la función racional

El dominio es R menos los valores que anulan al denominador (no puede existir un número cuyo denominador sea cero).

$$f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}$$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ $\quad D = \mathbb{R} - \{2,3\}$

Dominio de la función irracional de índice impar

El dominio es R.

$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ $\quad D = \mathbb{R}$

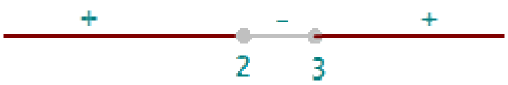
$f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}}$ $\quad D = \mathbb{R} - \{2,3\}$

Dominio de la función irrracional de índice par

El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero.

$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$ $\quad D = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$



$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x + 4}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 & (-\infty, 2] \cup [3, \infty) \\ x + 4 = 0 & x \neq -4 \end{cases}$$

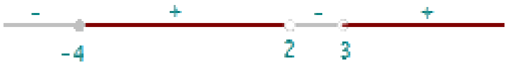
$D = (-\infty, -4) \cup (-4, 2] \cup [3, \infty)$

$$f(x) = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$x^2 - 5x + 6 > 0$ $\quad D = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x + 4}{x^2 - 5x + 6}}$$

$$\frac{x+4}{x^2 - 5x + 6} \geq 0 \qquad D = [-4, 2) \cup (3, \infty)$$



Dominio de la función logarítmica

El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor que cero.

$$f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \qquad D = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$

Dominio de la función exponencial

El dominio es R.

Dominio de la función seno

El dominio es R.

Dominio de la función coseno

El dominio es R.

Dominio de la función tangente

$$D = \mathbb{R} - \left\{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$$

Dominio de la función cotangente

$$D = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi, 0, \pi, \ldots\}$$

Dominio de la función secante

$$D = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$$

Dominio de la función cosecante

$$D = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi, 0, \pi, \ldots\}$$

Dominio de operaciones con funciones

Si realizamos operaciones con funciones, el dominio de la función resultante será:

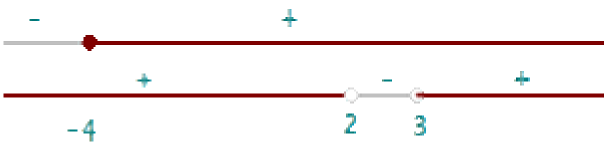
$$D(f+g) = D(f-g) = D(f\cdot g) = D(f) \cap D(g)$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) - \{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) = 0\}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 & [-4, \infty) \\ x^2 - 5x + 6 > 0 & (-\infty, 2) \cup (3, \infty) \end{cases}$$

$$\mathbf{D = [-4, 2) \cup (3, \infty)}$$

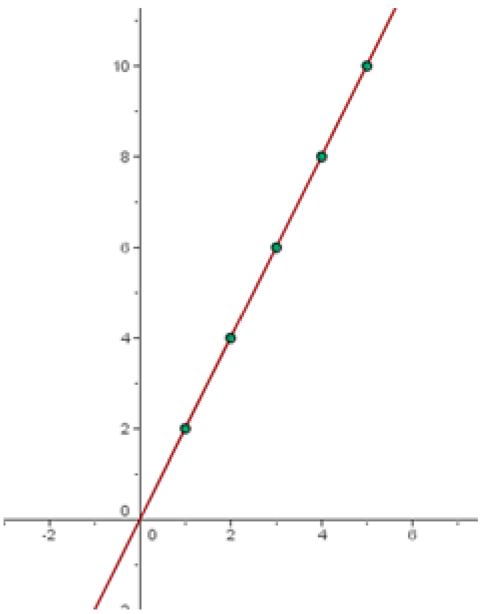


Gráfica de funciones

Si f es una función real, **a cada par (x, y)** = (x, f(x)) determinado por la función f **le corresponde** en el plano cartesiano **un único punto P(x, y)** = P(x, f(x)). El valor de x debe pertenecer al dominio de definición de la función.

Como el conjunto de puntos pertenecientes a la función es ilimitado, se disponen en una tabla de valores algunos de los pares correspondientes a puntos de la función. Estos valores, llevados sobre el plano cartesiano, determinan puntos de la gráfica. Uniendo estos puntos con línea continua se obtiene la r**epresentación gráfica de la función**.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
f(x)	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**



Grafo de una función

Grafo de una función es el conjunto de pares formados por los valores de la variable y sus imágenes correspondientes.

G(f) = {x, f(x) /x ∈D(f)}

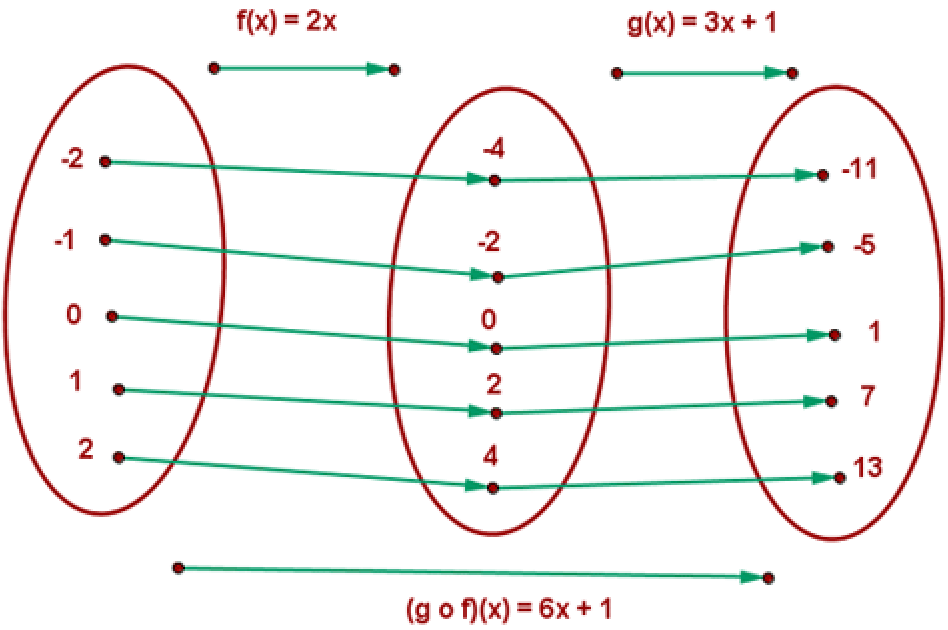
Sistema de coordenadas cartesianas

Un sistema de coordenadas cartesianas es un par de rectas graduadas, perpendiculares, que se cortan en un punto O(0,0), llamado **origen de coordenadas**. A la recta horizontal se llama **eje de abscisas**, y a su perpendicular por O, **eje de ordenadas**.

Se puede representar una función en el plano haciendo corresponder a cada par del grafo un punto determinado, marcando en el eje de abscisas el valor de su variable y en el de ordenadas, su correspondiente imagen.

Composición de funciones

Si tenemos dos funciones: f(x) y g(x), de modo que el dominio de la 2ª esté incluido en el recorrido de la 1ª, se puede definir una nueva función que asocie a cada elemento del dominio de f(x) el valor de g[f(x)].



(g o f) (x) = g [f(x)] = g (2x) = 3 (2x) +1 = 6x + 1

(g o f) (1) = 6 · 1 + 1 = 7

Dominio

$D_{(g \circ f)} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\}$

Propiedades

Asociativa:

f o (g o h) = (f o g) o h

No es conmutativa.

f o g ≠ g o f

El elemento neutro es la **función identidad**, **i(x) = x**.

f o i = i o f = f

Ejemplo:

Sean las funciones:

$$f(x) = 3x + 2 \qquad g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$$

$$g \circ f = g\left[f(x)\right] = g\left(3x+2\right) =$$

$$= \frac{3x+2+3}{2\left(3x+2\right)+1} = \frac{3x+5}{6x+5}$$

$$f \circ g = f\left[g(x)\right] = f\left(\frac{x+3}{2x+1}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{x+3}{2x+1}\right) + 2 = \frac{7x+11}{2x-1}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{2x+1} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

$$g \circ f = g\left[f(x)\right] = g\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) = \sqrt{\frac{x+2}{2x+1}}$$

$$f \circ g = f\left[g(x)\right] = f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x-1} \qquad g(x) = \frac{2x-1}{2x+1} \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

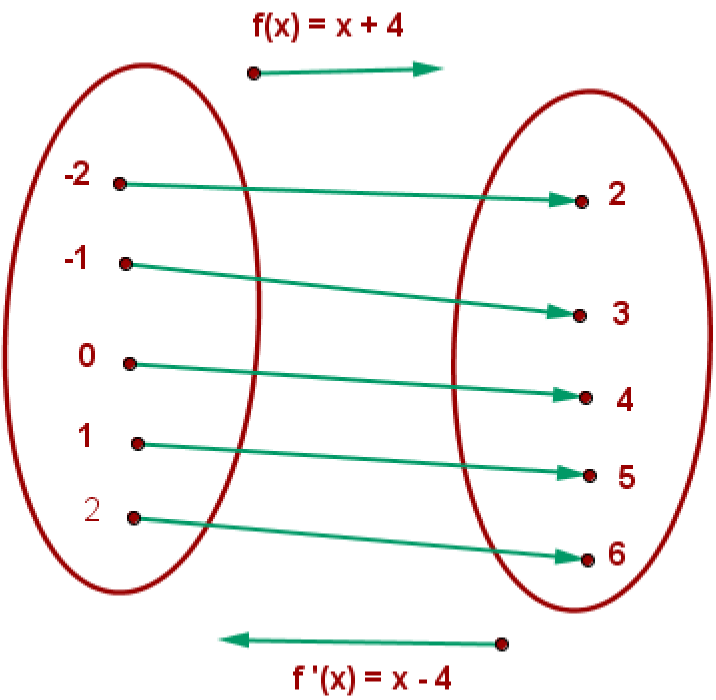
$$g \circ f = g\left[f(x)\right] = g\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{2x-1}\right)-1}{2\left(\frac{1}{2x-1}\right)+1} = \frac{-2x+3}{2x+1}$$

$$h\circ g\circ f = h\left[g\circ f(x)\right] = h\left(\frac{-2x+3}{2x+1}\right) = \frac{1}{\frac{-2x+3}{2x+1}} = \frac{2x+1}{-2x+3}$$

Función inversa o recíproca

Se llama **función inversa o reciproca de *f* a otra función *f^{-1}*** que cumple que:

Si f(a) = b, entonces *f^{-1}*(b) = a.



Podemos observar que:

El dominio de f^{-1} es el recorrido de *f*.

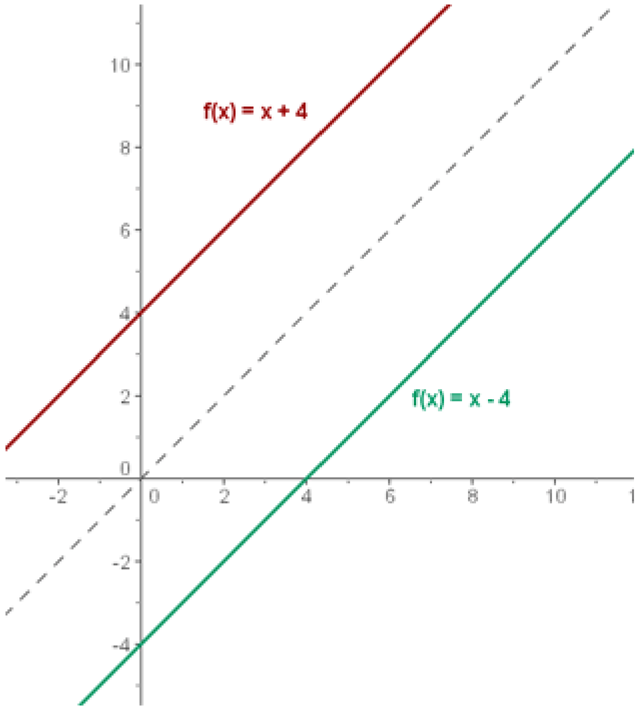
El recorrido de f^{-1} es el dominio de *f*.

Si queremos hallar el recorrido de una función tenemos que hallar el dominio de su función inversa.

Si dos **funciones** son **inversas** su **composición** es la **función identidad**.

$$f \text{ o } f^{-1} = f^{-1} \text{ o } f = x$$

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



Hay que distinguir entre la **función inversa**, $f^{-1}(x)$, y la **inversa de una función**, $\frac{1}{f(x)}$.

Cálculo de la función inversa

1 Se escribe la ecuación de la función con x e y.

2 Se despeja la variable x en función de la variable y.

3 Se intercambian las variables.

Calcular la **función inversa** de:

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$$

$$y=\frac{2x+3}{x-1} \qquad y(x-1)=2x+3$$

$$2xy-y=2x+3 \qquad 2xy-2x=y+3$$

$$x(y-2)\,y+3 \qquad x=\frac{y+3}{y-2}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$$

Vamos a comprobar el resultado para x = 2

$$f(2) = \frac{7}{1} = 7$$

$$f^{-1}(7) = \frac{10}{5} = 2$$

Calculamos ahora la inversa de:

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$y = \sqrt[3]{x-1} \qquad y^3 = x - 1$$

$$x = y^3 + 1 \qquad f^{-1}(x) = x^3 + 1$$

La inversa de:

$$f(x) = x^2$$

$$y = x^2 \qquad x = \pm\sqrt{y}$$

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$$

No es una función

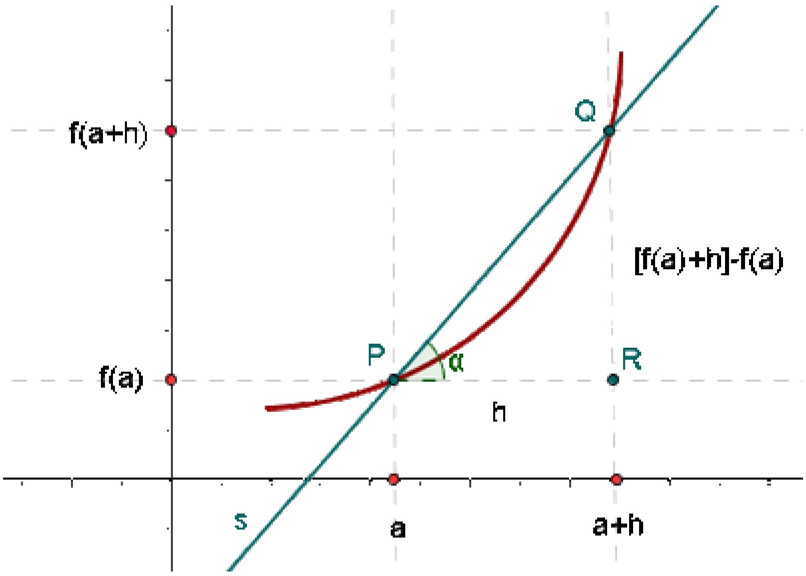
Estudio de una función

Crecimiento y decrecimiento: Tasa de variación

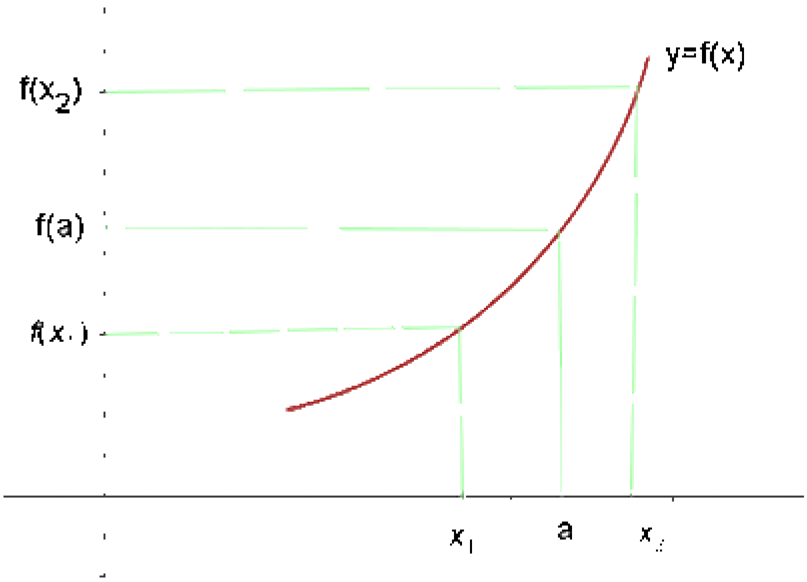
El incremento de una función se llama tasa de variación, y mide el cambio de la función al pasar de un punto a otro.

La tasa de variación es:

T.V.= f(x+h) - f(x)



Función estrictamente creciente



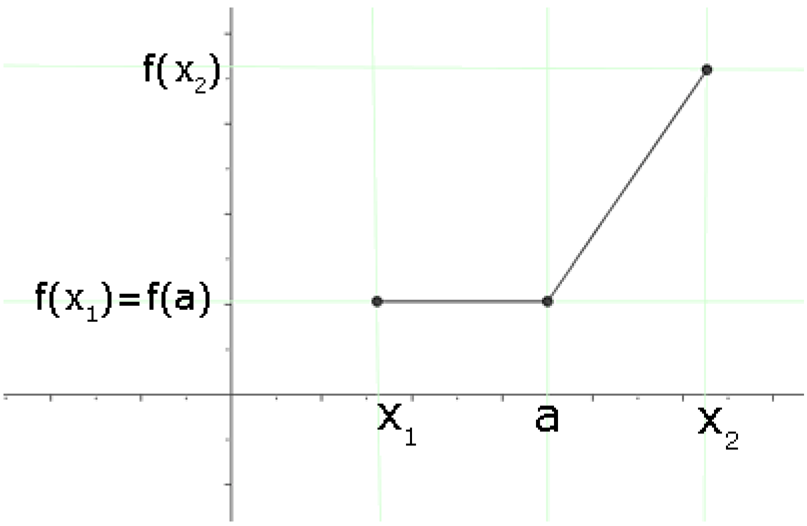
f es estrictamente creciente en a si sólo si existe un entorno de a, tal que para toda x que pertenezca la entorno de a se cumple:

$$x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$$

$$x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

La tasa de variación es positiva.

Función creciente



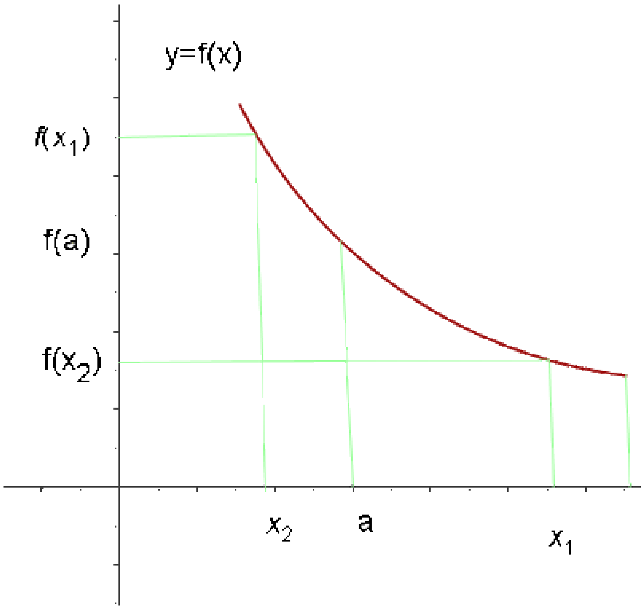
f es creciente en a si sólo si existe un entorno de a, tal que para toda x que pertenezca la entorno de a se cumple:

$x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$

$x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$

La tasa de variación es positiva o igual a cero.

Función estrictamente decreciente



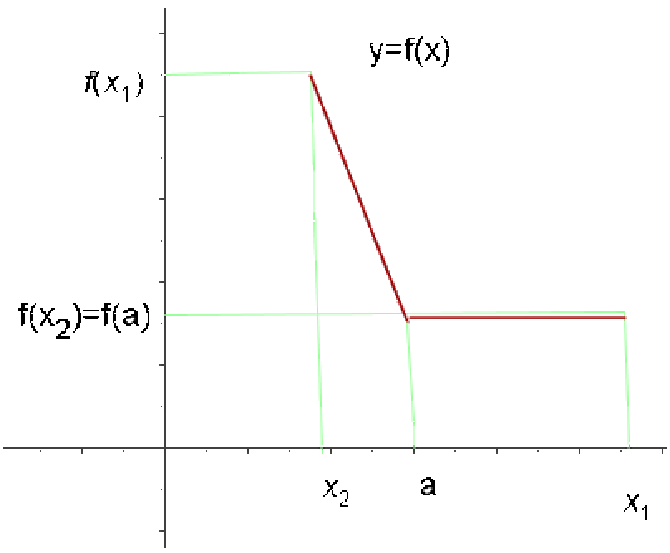
f es estrictamente decreciente en a si sólo si existe un entorno de a, tal que para toda x que pertenezca la entorno de a se cumple:

$x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$

$x < a \Rightarrow f(x) > f(a)$

La tasa de variación es negativa.

Función decreciente



f es decreciente en a si sólo si existe un entorno de a, tal que para toda x que pertenezca la entorno de a se cumple:

$$x > a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$$

$$x < a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$$

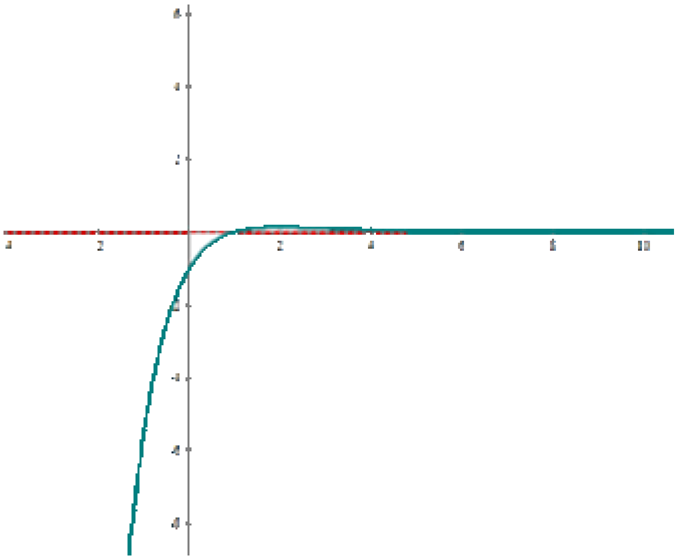
La tasa de variación es negativa o igual a cero.

Funciones acotadas

Función acotada superiormente

Una función f está acotada superiormente si existe un número real k tal que para toda x es $f(x) \leq k$.

El número k se llama cota superior.

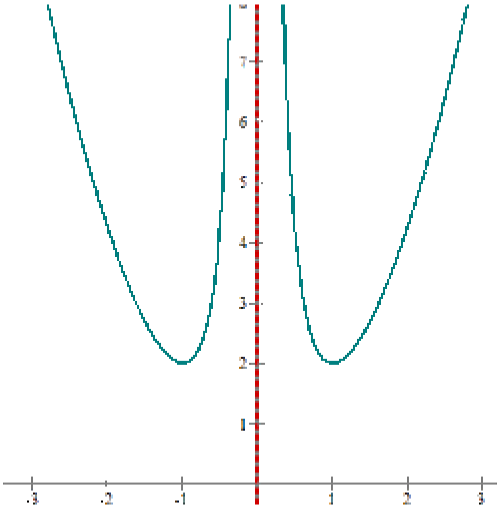


k=0.135

Función acotada inferiormente

Una función f está acotada inferiormente si existe un número real k' tal que para toda x es $f(x) \geq k'$.

El número k' se llama cota inferior.



k′ = 2

Función acotada

Una función esta acotada si lo está a superior e inferiormente.

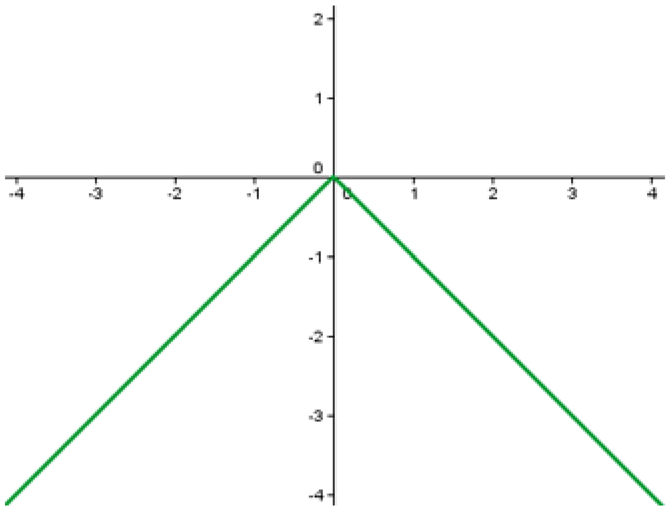
k′ ≤ f(x) ≤ k

k = ½ k′ = -½

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Máximo absoluto

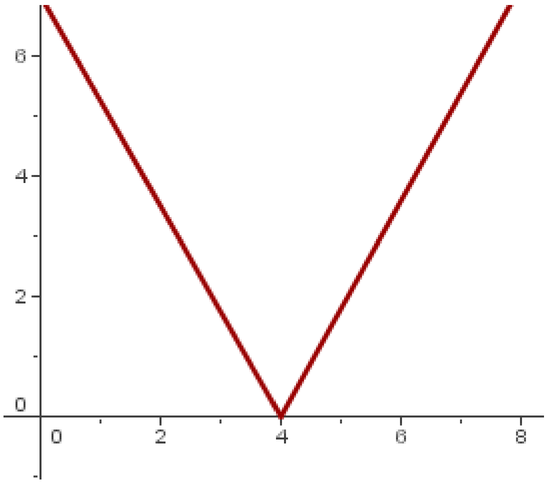
Una función tiene su máximo absoluto en el x = a si la ordenada es mayor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.



a = 0

Mínimo absoluto

Una función tiene su mínimo absoluto en el x = b si la ordenada es menor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.

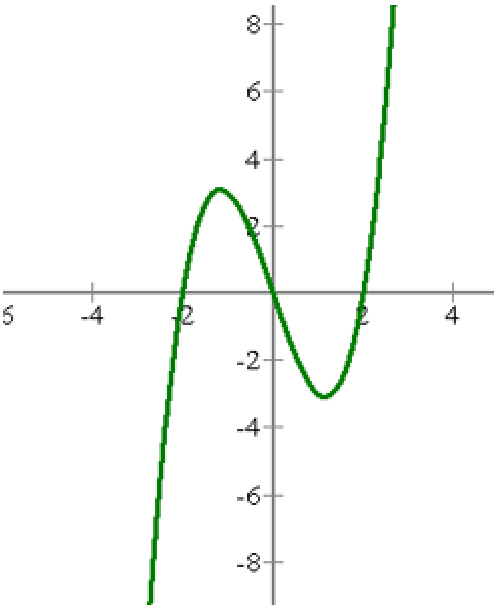


b = 0

Máximo y mínimo relativo

Una función f tiene un máximo relativo en el punto a, si f(a) es mayor o igual que los puntos próximos al punto a.

Una función f tiene un mínimo relativo en el punto b, si f(b) es menor o igual que los puntos próximos al punto b.



a = 3.08   b = -3.08

Funciones simétricas

Simetría respecto del eje de ordenadas. Función par

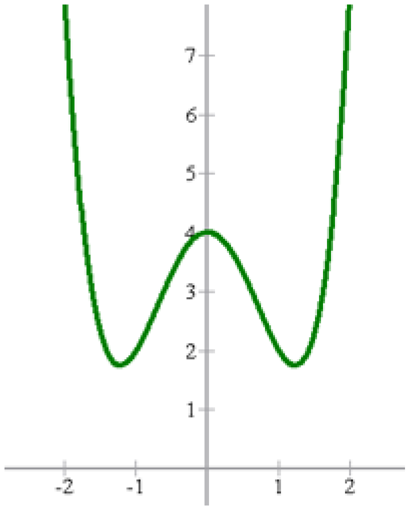
Una función f es simétrica respecto del eje de ordenadas cuando para todo x del dominio se verifica:

$$\mathbf{f(-x) = f(x)}$$

Las funciones simétricas respecto del eje de ordenadas reciben el nombre de funciones pares.

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 4 = x^4 - 3x^2 + 4 = f(x)$$



Simetría respecto al origen. Función impar

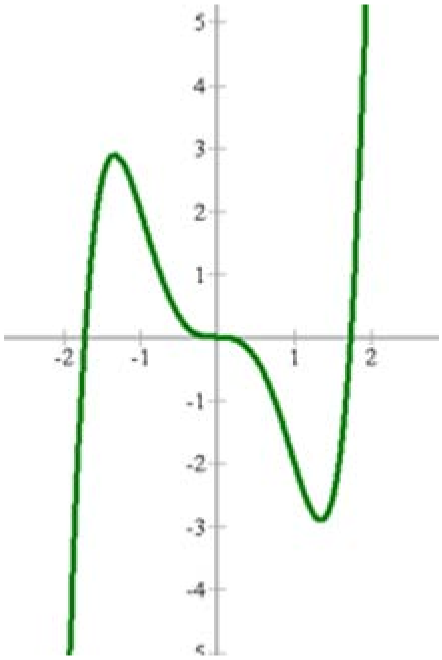
Una función f es simétrica respecto al origen cuando para todo x del dominio se verifica:

$$\mathbf{f(-x) = -f(x)}$$

Las funciones simétricas respecto al origen reciben el nombre de funciones impares.

$$f(x) = x^5 - 3x^3$$

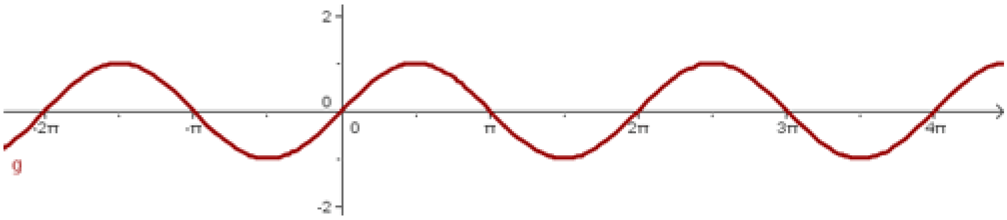
$$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 = -x^5 + 3x^3 = -(x^5 - 3x^3) = -f(x)$$



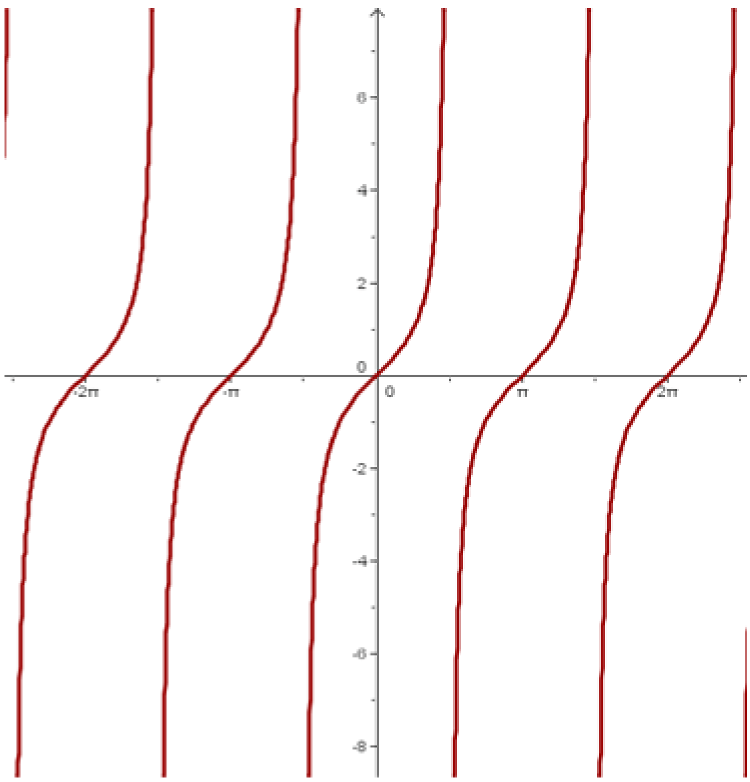
Funciones periódicas

Una función f(x) es periódica, de período T, si para todo número entero z, se verifica:

f(x) = f(x + zT)

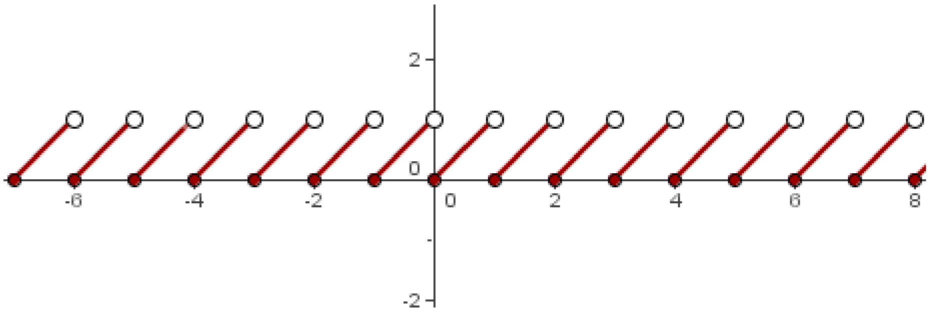


La función f(x) = sen x es periódica de periodo 2π, ya que cumple que: sen (x + 2π) = sen x



La función f(x) = tg x es periódica de periodo π, ya que cumple que:

tg (x + π) = tg x



La función mantisa, f(x) = x - E(x), es periódica de periodo 1.

Si tenemos una función periódica **f(x) de periodo T**, la función **g(x) = f(kx) tiene de periodo**:

$$T' = \frac{T}{k}$$

Ejemplos:

Hallar el periodo de las funciones:

1f(x) = sen 2x

$$T' = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

2f(x) = tg (1/2)x

$$T' = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$$

3f(x) = E (1/2)x

$$T' = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$