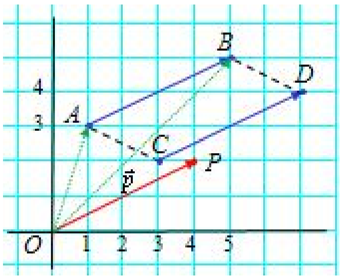
Tema 9 (I). Vectores **Resumen**

Vector fijo y vector libre

El vector que tiene por origen el punto *A* y por extremo el punto *B*, se llama vector fijo $\overrightarrow{AB}$.

- Módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del segmento *AB*. Se denota $|\overrightarrow{AB}|$. Se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras.
- Dirección de $\overrightarrow{AB}$ es la de la recta que contiene a los puntos *A* y *B*.
- Sentido de $\overrightarrow{AB}$ es el que indica el traslado de *A* a *B*.
- Dos vectores fijos son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, entonces el polígono de vértices *A*, *B*, *D* y *C* (en ese orden) es un paralelogramo.



- Se llama vector libre a un vector y a todos los equipolentes a él. Así, en la figura los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{OP}$ son el mismo libre. El vector $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, con origen en *O* y extremo en *P* puede ser el representante de todos ellos. La ventaja de este último consiste en que para determinarlo basta con dar sólo las coordenadas del punto *P*, extremo del vector.

Ejemplo:

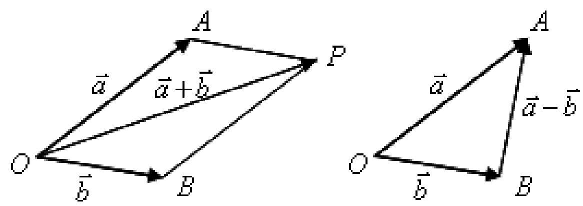
El vector $\overrightarrow{AB}$ de extremos *A*(1, 3) y *B*(5, 5) es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}$, de extremos *C*(3, 2) y *D*(7, 4); y ambos equipolentes al vector $\overrightarrow{OP}$ con origen en *O*(0, 0) y extremo en *P*(4, 2). Todos ellos definen al vector $\vec{p}$ = (4, 2).

Puede observarse que las coordenadas de $\vec{p}$ = (4, 2) se obtienen restando las de los puntos *B*(5, 5) y *A*(1, 3), o las de los puntos *D*(7, 4) y *C*(3, 2). Esto es: $\overrightarrow{AB}$ = (5, 5) – (1, 3) = (4, 2); o también, $\overrightarrow{CD}$ = (7, 4) – (3, 2) = (4, 2).

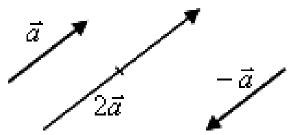
Nota: Como regla mnemotécnica puede servir: $\overrightarrow{AB}$ = punto *B*(5, 5) – punto *A*(1, 3).

Operaciones con vectores libres: suma, resta y multiplicación de un vector por un número

- Interpretación geométrica de las operaciones con vectores libres



Suma y resta de vectores



Multiplicación de un vector por un número

- Coordenadas de los vectores suma, resta o del producto:

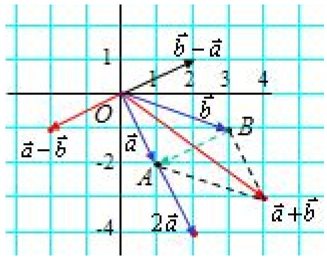
Si: $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$, entonces:

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$
- $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$. Si λ > 0, $\lambda\vec{a}$ tiene el mismo sentido que $\vec{a}$; si λ < 0, sentido contrario.

Ejemplo:

Si A = (1, –2) y B = (3, –1), se tendrá: $\vec{a}$ = (1, –2); $\vec{b}$ = (3, –1);

- $\vec{a}+\vec{b}$ = (1, –2) + (3, –1) = (4, –3).
- $\vec{a}-\vec{b}$ = (1, –2) – (3, –1) = (–2, –1).
- $2\vec{a}$ = 2(1, –2) = (2, –4)



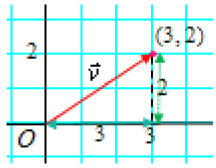
Puede observarse que:

- $\overline{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ = (1, –2) – (3, –1) = (–2, –1);
- $\overline{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ = (3, –1) – (1, –2) = (2, 1)

Módulo de un vector

Es su longitud. Se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras.

- El módulo de un vector $\vec{v}=(a_1,b_1)$, se define como: $|\vec{v}|=+\sqrt{a_1^2+b_1^2}$.



Ejemplo:

a) Si $\vec{v}$ = (3, 2), $|\vec{v}|=+\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. b) Si $\vec{v}$ = (2, –1), $|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$.

Distancia entre dos puntos

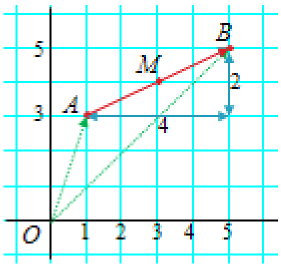
La distancia entre dos puntos A y B, $d(A, B)$, es igual al módulo del vector $\overrightarrow{AB}$. Si las coordenadas de esos puntos fuesen $A=(a_1,b_1)$ y $B=(a_2,b_2)$, entonces

$$\overrightarrow{AB}=(a_2-a_1,b_2-b_1)\ \Rightarrow\ d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$$

Ejemplo:

Si A = (1, 3) y B = (5, 5), la distancia, $d(A, B)$ es:

$$d(A,B)=\sqrt{(3-1)^2+(-1-(-2))^2}=\sqrt{5}$$



Observa que coincide con el módulo del vector $\overline{AB}$ y del vector $\overline{BA}$:

$$\overline{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(3,-1)-(1,-2)=(2,1).$$

Punto medio de un segmento de extremos $A=(a_1,a_2)$ y $B=(b_1,b_2)$:

$$M=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right).$$

Ejemplo:

Para los puntos A = (1, 3) y B = (5, 5) el punto medio es $M=\left(\frac{1+5}{2},\frac{3+5}{2}\right)=(3,\ 4)$.