EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1 ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios?

a) $\frac{1}{3}x^2$ **b)** abc **c)** $\frac{1}{x}$ **d)** $x^2 + y^2$

La única expresión que indica la suma de varios monomios no semejantes es la d: $x^2 + y^2$.

3.2 Indica los coeficientes y los grados de los siguientes monomios.

a) $2a^2bc$ **b)** $-x^5$ **c)** $3x^2y^2$ **d)** ac

a) Coef: 2
Grado: 4

b) Coef: -1
Grado: 5

c) Coef: 3
Grado: 4

d) Coef: 1
Grado: 2

3.3 Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones para $x = 5$ e $y = 4$.

a) $x^2 + 2xy + y^2$

b) $2x^2 + 2(xy - y^2)$

c) $(x - xy) + 3y^3$

d) $4x^2 - xy + y$

a) $5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 4 + 4^2 = 81$

b) $2 \cdot 5^2 + 2(5 \cdot 4 - 4^2) = 58$

c) $(5 - 5 \cdot 4) + 3 \cdot 4^3 = 177$

d) $4 \cdot 5^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 84$

3.4 La medida del radio menor de una corona circular es r, y la del mayor es R. Escribe la expresión algebraica de su área.

Expresión algebraica: $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r)$

3.5 Dados los monomios $A(x) = \frac{2}{5}x^2$, $B(x) = 3x^3$, $C(x) = x^3$ y $D(x) = -x^2 + 5x$, resuelve estas operaciones.

a) $A(x) \cdot A(x) + B(x)$

b) $[A(x) - B(x)] \cdot C(x)$

c) $A(x) + C(x) \cdot C(x)$

d) $A(x) \cdot A(x) + C(x)$

e) $[C(x) + D(x)] + B(x)$

f) $A(x) \cdot B(x) \cdot D(x)$

g) $[B(x) + C(x)] \cdot [D(x) + A(x)]$

h) $A(x) \cdot [C(x) + A(x)] \cdot B(x)$

a) $\frac{2}{5}x^2 \cdot x^2 + 3x^3 = \frac{4}{25}x^4 + 3x^3$

b) $\left[\frac{2}{5}x^2 - 3x^3\right] \cdot x^3 = -3x^6 + \frac{2}{5}x^5$

c) $\frac{2}{5}x^2 + x^3 \cdot x^3 = x^6 + \frac{2}{5}x^2$

d) $\frac{2}{5}x^2 \cdot x^2 + x^3 = \frac{4}{25}x^4 + x^3$

e) $[x^3 + (-x^2 + 5x)] + 3x^3 = 4x^3 - x^2 + 5x$

f) $\frac{2}{5}x^2 \cdot 3x^3 \cdot (-x^2 + 5x) = -\frac{6}{5}x^7 + 6x^6$

g) $[3x^3 + x^3] \cdot \left[-x^2 + 5x + \frac{2}{5}x^2\right] = -\frac{12}{5}x^5 + 20x^4$

h) $\frac{2}{5}x^2 \cdot \left[x^3 + \frac{2}{5}x^2\right] \cdot 3x^3 = \frac{6}{5}x^8 + \frac{12}{25}x^7$

3.6 Dados los polinomios $P(x) = x^3 + x^2 + 1$, $Q(x) = 2x^4 - x^2 + 3x$ y $R(x) = -x^3 + 3x$, realiza las siguientes operaciones.

a) $P(x) - Q(x) + R(x)$ **b)** $P(x) \cdot Q(x) + R(x)$ **c)** $[P(x) - Q(x)] \cdot R(x)$ **d)** $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$

a) $x^3 + x^2 + 1 - (2x^4 - x^2 + 3x) + (-x^3 + 3x) = -2x^4 + 2x^2 + 1$

b) $(x^3 + x^2 + 1) \cdot (2x^4 - x^2 + 3x) + (-x^3 + 3x) = 2x^7 + 2x^6 - x^5 + 4x^4 + 2x^3 - x^2 + 6x$

c) $[(x^3 + x^2 + 1) - (2x^4 - x^2 + 3x)] \cdot (-x^3 + 3x) = 2x^7 + x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 5x^3 - 9x^2 + 3x$

d) $(x^3 + x^2 + 1) \cdot [(2x^4 - x^2 + 3x) + (-x^3 + 3x)] = 2x^7 + x^6 - 2x^5 + x^4 - x^3 - x^2$

3.7 Calcula las siguientes potencias:

a) $(m + 2n)^2$ **b)** $(-5 + 9b)^2$ **c)** $(-3x + y)^3$ **d)** $(2 - 3b)^3$

a) $(m + 2n)^2 = m^2 + 4n^2 + 4mn$

b) $(-5 + 9b)^2 = 25 - 90b + 81b^2$

c) $(-3x + y)^3 = -27x^3 + y^3 + 27x^2y - 9xy^2$

d) $(2 - 3b)^3 = 8 - 36b + 54b^2 - 27b^3$

3.8 Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para $a = 6$ y $b = 4$ utilizando su factorización.

a) $a^2 + 2ab + b^2$ | **b) $a^2 - 2ab + b^2$**

a) $(a + b)^2 = 100$ | b) $(a - b)^2 = 4$

3.9 Utiliza la factorización de $a^2 - b^2$ para calcular mentalmente las siguientes operaciones.

a) $25^2 - 5^2$ | **b) $65^2 - 35^2$**

c) $125^2 - 25^2$ | **d) $600^2 - 400^2$**

a) $25^2 - 5^2 = (25 + 5) \cdot (25 - 5) = 30 \cdot 20 = 600$

b) $65^2 - 35^2 = (65 + 35) \cdot (65 - 35) = 100 \cdot 30 = 3000$

c) $125^2 - 25^2 = (125 + 25) \cdot (125 - 25) = 150 \cdot 100 = 15\,000$

d) $600^2 - 400^2 = (600 + 400) \cdot (600 - 400) = 1000 \cdot 200 = 200\,000$

3.10 Si es posible, expresa los siguientes polinomios en forma de potencia.

a) $4x^2 + 4x + 1$ | **b) $100y^2 + 4 - 40y$**

a) $(2x + 1)^2$ | b) $(10y - 2)^2$

3.11 Efectúa las siguientes divisiones.

a) $(x^7 - x^5 + x^3 - x) : (x^4 - x^2 + 1)$ | **b) $(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) : (x^2 - x + 2)$**

c) $(x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 5x + 6) : (x^2 + 3x - 2)$ | **d) $(6x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 14) : (2x^2 - 3x + 7)$**

a) Cociente: x^3, y resto: $-x$ | b) Cociente: $x^2 - 4x + 5$, y resto: $x - 4$

c) Cociente: $x^3 - 5x^2 + 17x - 58$, y resto: $203x - 110$ | d) Cociente: $3x^2 + 4x - 2$, y resto: $-31x$

3.12 La división de $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + k$ entre $x - 3$ da de resto 0. ¿Cuánto vale k?

$k = -90$

3.13 Escribe el dividendo de una división de polinomios en la que el divisor es $x - 2$; el cociente, $4x^2 + x + 2$, y el resto, -2.

Se aplica: dividendo = divisor · cociente + resto.

Dividendo $= 4x^3 - 7x^2 - 6$

3.14 Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini, y escribe el cociente y el resto.

a) $(3x^3 + 2x + 1) : (x + 1)$ | **b) $(x^5 - 2x^4 + 6) : (x - 1)$**

c) $(3x^3 + 3x^2 - 12x - 12) : (x + 2)$ | **d) $(x^3 - 2x^2 - x + 2) : (x - 2)$**

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & & -3 & 3 & -5 \\ \hline & 3 & -3 & 5 & -4 \end{array}$$
Cociente: $3x^2 - 3x + 5$

Resto: -4

b)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{array}$$
Cociente: $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$

Resto: 5

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 3 & -12 & -12 \\ -2 & & -6 & 6 & 12 \\ \hline & 3 & -3 & -6 & 0 \end{array}$$
Cociente: $3x^2 - 3x - 6$

Resto: 0

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & & 2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$
Cociente: $x^2 - 1$

Resto: 0

3.15 Comprueba con la regla de Ruffini si los números 2 y -3 son soluciones de la ecuación $x^4 + 3x^3 - x - 3 = 0$.

¿Es solución $x = -3$?

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ -3 & & -3 & 0 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$x = -3$ sí es solución.

¿Es solución $x = 2$?

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & & 2 & 10 & 20 & 38 \\ \hline & 1 & 5 & 10 & 19 & 35 \end{array}$$

$x = 2$ no es solución.

3.16 Indica en notación ordinaria el dividendo, el divisor, el cociente y el resto de la división:

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \end{array}$$

Dividendo: $2x^3 + 3x^2 - 4$
Divisor: $x + 1$
Cociente: $2x^2 + x - 1$
Resto: -3

3.17 Utiliza la regla de Ruffini para hallar el número k de forma que, al dividir el polinomio $x^3 + 2x^2 + k + 1$ entre $x + 4$, el resto sea 0.

$$\begin{array}{r|rrrl} & 1 & 2 & 0 & k + 1 \\ -4 & & -4 & 8 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 8 & -32 + k + 1 = 0 \end{array}$$

$k = 31$

3.18 ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones?

a) Un factor de $x^2 - 1$ es $x + 1$.

b) Un factor de $x^2 + 1$ es $x - 1$.

a) Para $x = -1$, el valor numérico de $x^2 - 1$ es 0.
Luego $x + 1$ es un factor.

b) Para $x = 1$, el valor numérico de $x^2 + 1$ es 2.
Luego $x - 1$ no es factor.

3.19 Sin hacer la división, di si estas divisiones son exactas o no. En caso de que no sean exactas, indica cual es el resto.

a) $(x^5 + x^3 + 4x^2 + 6x + 2) : (x - 1)$

b) $(3x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1) : (x - 2)$

a) Valor numérico para $x = 1$: $1 + 1 + 4 + 6 + 2 = 14$
Resto: 14. La división no es exacta.

b) Valor numérico para $x = 2$: $48 + 8 - 12 + 2 + 1 = 47$
Resto: 47. La división no es exacta.

3.20 Sin realizar la división, explica razonadamente si $4x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 6x + 4$ es divisible entre $x - 2$.

El valor numérico para $x = 2$ es $4 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 4 = 0$.

Resto: 0. La división es exacta.

3.21 Si se divide el polinomio $3x^3 - 2x^2 + kx + 1$ entre $x - 1$, el resto es 2. ¿Cuánto vale k?

El resto de la división de $(3x^3 - 2x^2 + kx + 1) : (x - 1)$ es igual al valor numérico del polinomio para $x = 1$.

Valor numérico para $x = 1$: $3 - 2 + k + 1 = 2 \Rightarrow k = 0$

3.22 Halla el número m para que el polinomio $P(x)$ sea divisible entre $x + 4$.

$P(x) = x^3 + 2x^2 + m$

Valor numérico para $x = -4$: $(-4)^3 + 2 \cdot 4^2 + m = 0 \Rightarrow m = 32$

3.23 Calcula las raíces de los siguientes polinomios y factorízalos.

a) $P(x) = x^2 - 144$

b) $Q(x) = x^2 + 12x + 32$

c) $R(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

d) $S(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

a) $x^2 - 144 = (x - 12)(x + 12)$
Las raíces del polinomio son: $x = 12$, $x = -12$.

b) Raíces posibles: $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$
Se comprueba y se obtiene: $x = -4$, $x = -8$.
Factorización: $x^2 + 12x + 32 = (x + 4)(x + 8)$

c) Raíces posibles: $x = \pm 1, \pm 2$
Raíces de la ecuación: $1, -1, -2$
Factorización: $x^2 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

d) Raíces posibles: $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
Se comprueba y se obtiene: $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$.

3.24 Dado el siguiente polinomio:

$P(x) = 27x^3 - 108x^2 - 3x + 12$

a) ¿Cuántas raíces reales puede tener como máximo?

b) ¿Puede ser $x = 5$ raíz del polinomio?

c) ¿Es $x = 1$ raíz del polinomio? ¿Y $x = 4$?

a) Solo puede tener 3 raíces como máximo, ya que es un polinomio de grado 3.

b) No, porque $x = 5$ no se encuentra entre los divisores de 12, que es el término independiente del polinomio.

c) $x = 1$ no es raíz del polinomio porque $P(1) = -72$, pero $x = 4$ sí es raíz porque $P(4) = 0$.

3.25 ¿Es cierto que la suma de los n primeros números naturales es $S_n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$?

Para $n = 1$ es inmediato: $\dfrac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$

Para $n = 2$: $1 + 2 = \dfrac{2 \cdot (2+1)}{2} = 3$

Para $n = 3$: $1 + 2 + 3 = \dfrac{3 \cdot (3+1)}{2} = 6$

Suponemos que es cierto para n.

Para $n + 1$: $\underbrace{1 + 2 + \dots n}_{S_n} + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = S_{n+1}$

3.26 Comprueba que para cualquier número natural n se cumple que $2^n > n$.

Para $n = 1$: $2^1 = 2 > 1$

Para $n = 2$: $2^2 = 4 > 2$

Para $n = 3$: $2^3 = 8 > 3$

Suponemos que es cierto para n.

Para $n + 1$: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > n \cdot 2 = n + n > n + 1$, ya que $n > 1$.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Lenguaje algebraico. Operaciones con monomios

3.27 Expresa en lenguaje algebraico.

a) El área de un rectángulo de base b y altura h.

b) El área de un cuadrado de lado l.

c) El volumen de un cubo de arista x.

d) El volumen de un cilindro de radio de la base r y altura h.

e) El perímetro de un triángulo isósceles de lados iguales x y lado desigual y.

a) $A = b \cdot h$

b) $A = l^2$

c) $V = x^3$

d) $V = \pi r^2 h$

e) $P = 2x + y$

3.28 Completa la columna correspondiente al valor numérico de los monomios para los valores de las variables que se indican y calcula su grado.

Monomio	x, y	Valor numérico	Grado
$5x^2y$	$x = 2$ $y = 1$	$5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$	$2 + 1 = 3$
$\frac{4}{3}xy^3$	$x = 3$ $y = 1$	$\frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 1 = 4$	$1 + 3 = 4$
$\frac{xy}{2}$	$x = 1$ $y = 4$	$\frac{1 \cdot 4}{2} = 2$	$1 + 1 = 2$
$3x^2y^4$	$x = -2$ $y = -1$	$3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$	$2 + 4 = 6$

3.29 Dados los monomios $A(x) = 6x^2$, $B(x) = 3x^4$, $C(x) = \frac{1}{2}x^4$ y $D(x) = -2x$, realiza las siguientes operaciones.

a) $A(x) + D(x)$

b) $B(x) - C(x)$

c) $A(x) - B(x) + C(x)$

d) $A(x) \cdot D(x)$

e) $B(x) : C(x)$

f) $D(x) \cdot B(x)$

g) $A(x) \cdot B(x) \cdot C(x)$

h) $A(x) : D(x) \cdot B(x)$

a) $6x^2 + (-2x) = 6x^2 - 2x$

b) $3x^4 - \frac{1}{2}x^4 = \frac{5}{2}x^4$

c) $6x^2 - 3x^4 + \frac{1}{2}x^4 = 6x^2 - \frac{5}{2}x^4$

d) $6x^2 \cdot (-2x) = -12x^3$

e) $3x^4 : \frac{1}{2}x^4 = 6$

f) $-2x \cdot 3x^4 = -6x^5$

g) $6x^2 \cdot 3x^4 \cdot (-2x) = 9x^{10}$

h) $6x^2 : (-2x) \cdot 3x^4 = -3x \cdot 3x^4 = -9x^5$

3.30 Averigua en qué monomios se convierten las siguientes expresiones al sumar términos semejantes.

a) $-3x^2 + 5x^2 - 4x^2$

b) $\dfrac{6abc - 12abc + 4abc}{2}$

c) $5x^2y - 6x^2y + 3x^2y$

d) $-4z^3p^4 + 7p^4z^3$

a) $-3x^2 + 5x^2 - 4x^2 = -2x^2$

b) $\dfrac{(6 - 12 + 4)abc}{2} = \dfrac{-2abc}{2} = -abc$

c) $5x^2y - 6x^2y + 3x^2y = 2x^2y$

d) $-4z^3p^4 + 7p^4z^3 = 3z^3p^4$

Operaciones con polinomios

3.31 Dados los polinomios:

$$P(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$$

$$Q(x) = 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2$$

$$R(x) = -4x^4 + x^2 - 4$$

Realiza las siguientes operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$ **b)** $Q(x) - R(x)$ **c)** $R(x) - Q(x) + P(x)$ **d)** $P(x) + Q(x) + R(x)$

a) $P(x) + Q(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 + 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2 = 2x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{3}x + 3$

b) $Q(x) - R(x) = \left(3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) - (-4x^4 + x^2 - 4) = 4x^4 + 3x^3 - \frac{2}{3}x + 6$

c) $R(x) - Q(x) + P(x) = -4x^4 + x^2 - 4 - \left(3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 =$

$= -4x^4 + x^2 - 4 - 3x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - 2 + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 =$

$= -4x^4 - 3x^3 + \frac{2}{3}x - 6 + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = -2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{3}x - 5$

d) $P(x) + Q(x) + R(x) = \left(2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1\right) + \left(3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) + (-4x^4 + x^2 - 4) =$

$= -2x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{3}x - 1$

3.32 Rellena en tu cuaderno cada recuadro con el coeficiente adecuado.

a) $(2x^2 + \square x - 1) - (-3x^2 - 5x + \square) = 5x^2 + 2x + 4$

b) $(3x^4 - x + 2) - (\square x^4 + \square x + \square) = 4x^4 + 3x + 3$

c) $(5x^3 + \square x^2 + \square) + (\square x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

a) $(2x^2 + \mathbf{(-3)}x - 1) - (-3x^2 - 5x + \mathbf{(-5)}) = 5x^2 + 2x + 4$

b) $(3x^4 - x + 2) - (\mathbf{(-1)}x^4 + \mathbf{(-4)}x + \mathbf{(-1)}) = 4x^4 + 3x + 3$

c) $(5x^3 + \mathbf{(-4)}x^2 + \mathbf{(-1)}) + (\mathbf{(-3)}x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

3.33 Dados los polinomios:

$P(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1$ $Q(x) = 3x^3 - 4x - 2$ $R(x) = 4x^2 - 5x + 3$

Realiza las siguientes operaciones:

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$

b) $[R(x)]^2 - P(x)$

c) $x \cdot [Q(x) + x^2 \cdot P(x)]$

d) $2x \cdot Q(x) + 3P(x) + x^2 \cdot R(x)$

a) $\left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) \cdot [(3x^3 - 4x - 2) + (4x^2 - 5x + 3)] = \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) \cdot (3x^3 + 4x^2 - 9x + 1) =$

$= \frac{3}{2}x^7 + 8x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{35}{2}x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 9x + 1$

b) $[4x^2 - 5x + 3]^2 - \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) = \frac{31}{2}x^4 - 42x^3 + 49x^2 - 30x + 8$

c) $x \cdot \left[(3x^3 - 4x - 2) + x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right)\right] = \frac{1}{2}x^7 + 2x^6 + 3x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x$

d) $2x \cdot (3x^3 - 4x - 2) + 3\left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) + x^2 \cdot (4x^2 - 5x + 3) = \frac{23}{2}x^4 + x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

Identidades notables

3.34 Efectúa estas operaciones.

a) $(2x^2 - 3y)^2$

b) $(3x - 2y)^3$

c) $(3x^3 - \sqrt{x})^2$

d) $(2x^4 + x^2)^2$

e) $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b)$

f) $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt)$

a) $(2x^2 - 3y)^2 = 4x^4 + 9y^2 - 12x^2y$

b) $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 8y^3 - 54x^2y + 36xy^2$

c) $(3x^3 - \sqrt{x})^2 = 9x^6 + x - 6x^3\sqrt{x}$

d) $(2x^4 + x^2)^2 = 4x^8 + 4x^6 + x^4$

e) $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b) = 25a^2 - 9b^2$

f) $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt) = 4x^2y^2 - 16z^2t^2$

3.35 Factoriza utilizando las identidades notables.

a) $x^4 - y^4$

b) $4x^2 - 12x + 9$

c) $x^4 + 1 + 2x^2$

d) $x^3 + 27y^3 + 9x^2y + 27y^2x$

a) $(x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2) = (x^2 + y^2) \cdot (x - y) \cdot (x + y)$

b) $(2x - 3)^2$

c) $(x^2 + 1)^2$

d) $(x + 3y)^3$

División de polinomios. Regla de Ruffini

3.36 Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(6x^3 - 2x^2 - 1) : (x^2 + x + 2)$

b) $(-3x^4 + x^2 - 2x + 3) : (3x^2 - 2x + 1)$

c) $(x^6 - 2x^3 + 3x - 3) : (-2x^3 + x - 2)$

a) Cociente: $6x - 8$

Resto: $-4x + 15$

b) Cociente: $-x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}$

Resto: $-\frac{8}{9}x + \frac{25}{9}$

c) Cociente: $-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

Resto: $\frac{1}{4}x^2 + x$

3.37 Efectúa estas divisiones y comprueba que se cumple la regla de la división.

a) $\frac{3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1}$

b) $\frac{4x^2 - 1}{x^2 + 3}$

Resolvemos realizando las divisiones:

a) $\frac{3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1} = 3 + \frac{-9x + 4}{x^2 + 2x - 1}$

b) $\frac{4x^2 - 1}{x^2 + 3} = 4 + \frac{-13}{x^2 + 3}$

3.38 Ejecuta las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini, e indica el cociente y el resto.

a) $(3x^4 - 2x^2 + x - 3) : (x + 1)$

b) $(x^5 - 2x^3 - x + 1) : (x - 1)$

c) $(2x^3 - x^2 + 3x - 1) : (x + 2)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & & -3 & 3 & -1 & 0 \\ \hline & 3 & -3 & 1 & 0 & \mathbf{-3} \end{array}$$

Cociente: $3x^3 - 3x^2 + x$
Resto: -3

b)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & \mathbf{-1} \end{array}$$

Cociente: $x^4 + x^3 - x^2 - x - 2$
Resto: -1

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & & -4 & 10 & -26 \\ \hline & 2 & -5 & 13 & \mathbf{-27} \end{array}$$

Cociente: $2x^2 - 5x + 13$
Resto: -27

3.39 Calcula el resto de las siguientes divisiones sin necesidad de realizarlas. ¿Qué teorema has utilizado?

a) $(x^7 - 3x^2 + 1) : (x - 1)$ **b) $(x^{101} - 2) : (x + 1)$** **c) $(x^5 - 2x^3 + 3) : (x - 3)$**

a) $P(1) = 1^7 - 3 \cdot 1^2 + 1 = -1$ Resto $= -1$

b) $P(-1) = (-1)^{101} - 2 = -1 - 2 = -3$ Resto $= -3$

c) $P(3) = 3^5 - 2 \cdot 3^3 + 3 = 243 - 54 + 3 = 192$ Resto $= 192$

Hemos utilizado el teorema del resto.

3.40 Halla el valor de *k* en los siguientes polinomios teniendo en cuenta los datos indicados.

a) $x^3 + (k + 2)x + 1$ es divisible entre $(x + 1)$.

b) $(x^4 + kx^2 + 2x + 1) : (x - 1)$ tiene -4 de resto.

c) $x^4 + 3x^3 + kx^2 + x - 6$ tiene por factor $(x + 3)$.

a) Igualamos el valor del polinomio en -1 a cero:

$P(-1) = (-1)^3 + (k + 2) \cdot (-1) + 1 = -1 - k - 2 + 1 = -k - 2 = 0 \Rightarrow k = -2$

b) Igualamos el valor del polinomio en 1 a -4:

$P(1) = 1^4 + k \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + k + 2 + 1 = 4 + k = -4 \Rightarrow k = -8$

c) Igualamos el valor del polinomio en -3 a 0:

$P(-3) = (-3)^4 + 3 \cdot (-3)^3 + k \cdot (-3)^2 + (-3) - 6 = 81 - 81 + 9k - 3 - 6 = 9k - 9 = 0 \Rightarrow k = 1$

Factorización de polinomios

3.41 Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 3(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)$

b) $Q(x) = 2(x - 5)^3$

c) $R(x) = (x + 6)^2 \cdot (x - 1)^2$

a) Raíces: $+1, -2, +4$ b) Raíces: 5 (triple) c) Raíces: -6 (doble), $+1$ (doble)

3.42 Escribe un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = -4$. ¿Existen más polinomios que verifiquen esas condiciones? ¿Por qué?

$(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 4) = 0 \Rightarrow$ Polinomio: $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$

Pueden existir infinitos polinomios que cumplan estas condiciones, dependiendo del valor que se dé al coeficiente de su término de mayor grado.

3.43 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x$

b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

c) $R(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

d) $S(x) = x^3 - 9x$

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{1 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 6) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

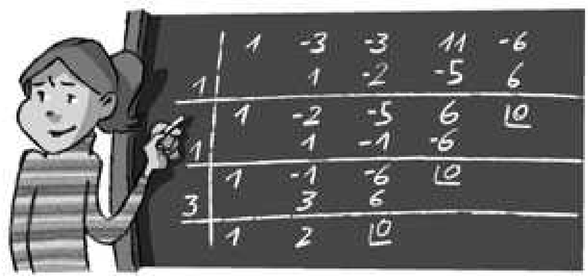
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2 & & 2 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \mathbf{0} \end{array} \qquad x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{1 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

c) $R(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 - 4x + 4) = (x - 2)^3$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 12 & -8 \\ 2 & & 2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \mathbf{0} \end{array} \qquad x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{1 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases}$$

d) $S(x) = x^3 - 9x = x \cdot (x^2 - 9) = x \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

3.44 Observa el siguiente esquema y escribe el polinomio inicial y su expresión factorizada.



$P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

$P(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$

3.45 Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 3x - 18$ sabiendo que verifica las siguientes condiciones: $P\left(\frac{3}{2}\right) = 0$; $P(-2) = 0$ y $P(-3) = 0$

Como conocemos las raíces del polinomio, por el teorema del factor sólo nos falta conocer el coeficiente:

$$P(x) = k \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = k \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) \cdot (x + 3) = k \cdot \left(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 9\right) =$$

$$= k \cdot x^3 + \frac{7}{2}k \cdot x^2 - \frac{3}{2}k \cdot x - 9k$$

Igualando coeficientes resulta: $k = 2$.

CUESTIONES PARA ACLARARSE

3.46 ¿Cuál de estas expresiones algebraicas es un monomio? Explica tu respuesta.

a) $\sqrt{12x}$ **b)** $\dfrac{4}{x}$ **c)** $3x^{-2}$ **d)** $x^2\sqrt{3}$

Para ser un monomio, el exponente debe ser natural. Vamos a ver el exponente de cada expresión:

a) Exp $\frac{1}{2}$. b) Exp -1. c) Exp -2. d) Exp 2.

Por tanto, el único monomio es el apartado d.

3.47 ¿Cuáles de los siguientes monomios son de grado 7?

a) $3x^7$ **b)** $9bc^4e$ **c)** $6xy^5$ **d)** $13z^6j$ **e)** $-6za^3bm^2$ **f)** $5x^2y^2z^3$

Los monomios de grado 7 son: $3x^7$, $13z^6j$, $-6za^3bm^2$, $5x^2y^2z^3$.

3.48 ¿Puedes realizar la división $(3x^3 - 4x + 1) : (x^2 - 1)$ utilizando la regla de Ruffini? Justifica tu respuesta.

Sí, el divisor $(x^2 - 1) = (x + 1) \cdot (x - 1)$, con lo cual se aplica la regla de Ruffini primero con la raíz $+1$ y después con -1, o al contrario.

3.49 Un polinomio es de grado 7 y otro es de grado 6. Indica el grado de los polinomios que resultan de estas operaciones entre ellos.

a) Suma **b) Producto** **c) Cociente**

a) La suma tendrá grado 7, ya que es el mayor de los grados de los dos polinomios.

b) El producto tendrá grado $7 + 6 = 13$.

c) El cociente tendrá grado $7 - 6 = 1$.

3.50 Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios de grado 3. ¿Puede el polinomio $P(x) + Q(x)$ ser de grado 2? Pon un ejemplo que justifique tu respuesta.

La suma será de grado 2 si los coeficientes de los términos de grado 3 son opuestos y los de grado 2 no lo son.
Ejemplo: $(-4x^3 + 2x^2 + 3x - 1) + (4x^3 + 5x - 3) = 2x^2 + 8x - 4$

3.51 Si $P(0) = -7$, ¿puede ser $P(x) = ax^2 + bx + 8$? Razona la respuesta.

Si $P(x) = ax^2 + bx + 8$, entonces $P(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 8 = 8$ para cualquier valor de a y b. Por tanto, $P(0) \neq -7$.

3.52 Indica razonadamente cuáles son las raíces del polinomio $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$.

Este polinomio lo anulan los valores 1, -2 y 3.

3.53 ¿Es el polinomio $M(x)$ de grado 8? $M(x) = 3x^8 - 5x^7 + 4x^5 - x^8 + 2x^3 - 2x^8 + x^2 + 1$

No, porque los monomios de grado 8 se cancelan.

3.54 Calcula el resto de la división $M(x) : (x - 6)$ sabiendo que $M(6) = 3$.

Si $M(6) = 3$, aplicando el teorema del resto sabemos que el resto será 3.

3.55 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $(x + 6)$ divide a $L(x)$, entonces 6 es una raíz de $L(x)$.

b) Si $G(-5) = 0$, $(x + 5)$ es un factor de $G(x)$.

c) Un polinomio de grado 5 no puede tener 6 raíces.

d) Un polinomio con término independiente igual a 0 posee al menos una raíz.

e) $5x^7 - 4x^7 - 2x^7$ es un trinomio.

a) Falsa, ya que si $(x + 6)$ divide a $L(x)$, entonces -6 es una raíz de $L(x)$.

b) Verdadera, por el teorema del factor.

c) Verdadera, el teorema fundamental del álgebra nos indica que como mucho tendrá 5 raíces.

d) Verdadera, ya que $x = 0$ será una raíz.

e) Falsa, es un monomio.

3.56 ¿Es divisible entre $(x + 3)$ el polinomio $x^9 + 3^9$?

Calculemos $P(-3)$: $P(-3) = (-3)^9 + 3^9 = -3^9 + 3^9 = 0$, por lo que el polinomio es divisible entre $(x + 3)$.

3.57 Indica cuál de estos polinomios tiene −8 como raíz y 24 de término independiente.

a) $3x - 24$ **b) $3x + 24$** **c) $24x + 8$** **d) $24(x + 8)$**

El b, porque $3 \cdot (-8) + 24 = 0 \Rightarrow -8$ es raíz, y 24, el término independiente.

3.58 ¿Puede tener el polinomio $Q(x) = x^{10} - ax^6 + 37$ raíces enteras distintas de 1, −1, 37 y −37? Justifica tu respuesta.

No, porque las raíces enteras de un polinomio tienen que estar entre los divisores del número independiente.

3.59 Si el polinomio $P(x) = x^2 - kx + t$ tiene una raíz doble en $x = 2$, ¿cuánto valen k y t?

Tener una raíz doble en $x = 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$, con lo cual $k = 4$ y $t = 4$.

3.60 Calcula el resto de la siguiente división.
$(x^{157} - 49x^{38} + 17) : (x + 1)$

Aplicando el teorema del resto:

$P(-1) = (-1)^{157} - 49 \cdot (-1)^{38} + 17 = -1 - 49 + 17 = -33$

Por tanto, el resto será −33.

3.61 El polinomio $Q(x)$ es de grado 3, y sabemos que $Q(-1) = Q(2) = Q(0) = 0$.
a) ¿Cuál es la posible expresión del polinomio $Q(x)$?
b) Y si además sabemos que $Q(-2) = 16$, ¿cuál es entonces su expresión exacta?

a) Conociendo las raíces podemos expresar el polinomio como: $Q(x) = k \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot x = kx^3 - kx^2 - 2kx$.

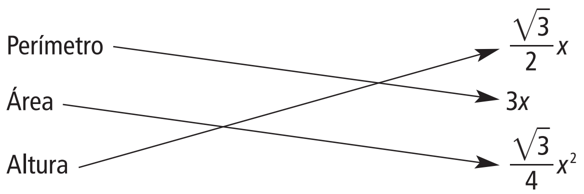
b) Calculamos $Q(-2)$ y lo igualamos a 16:

$Q(-2) = k \cdot (-2 + 1) \cdot (-2 - 2) \cdot (-2) = k \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot (-2) = -8k \Rightarrow -8k = 16 \Rightarrow k = -2$

$Q(x) = -2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot x = -2x^3 + 2x^2 + 4x$

PROBLEMAS PARA APLICAR

3.62 Relaciona en tu cuaderno las magnitudes indicadas correspondientes a un triángulo equilátero de lado x con los monomios de la columna de la derecha.



3.63 Demuestra que si dos números se diferencian en 16 unidades, la diferencia de sus cuadrados es igual a 16 veces la suma. Utiliza el lenguaje algebraico y las igualdades notables.

Si $x - y = 16 \Rightarrow x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y) = 16 \cdot (x + y)$

3.64 Utiliza la notación polinómica para demostrar que la suma de un múltiplo de 12, un múltiplo de 8 y un múltiplo de 20 es a su vez múltiplo de 4.

Sean p, q y r números naturales.

Un múltiplo de 12 será de la forma $12 \cdot p$.

Un múltiplo de 8 será de la forma $8 \cdot q$.

Un múltiplo de 20 será de la forma $20 \cdot r$.

Su suma será: $12p + 8q + 20r$.

Sacando factor común: $12p + 8q + 20r = 4 \cdot (3p + 2q + 5r)$, obteniendo claramente un múltiplo de 4.

3.65 ¿Qué monomio expresa la diagonal de un cubo de lado *x*?

Calculamos primero la diagonal de la base usando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = 2x^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}x$$

Esta diagonal, una arista y la diagonal del cubo forman un triángulo rectángulo, por lo que podemos volver a utilizar el teorema de Pitágoras:

$$D^2 = \left(\sqrt{2}x\right)^2 + x^2 \Rightarrow D^2 = 2x^2 + x^2 \Rightarrow D^2 = 3x^2 \Rightarrow D = \sqrt{3}x$$

Por tanto, el monomio que expresa la diagonal del cubo es $\sqrt{3}x$.

3.66 Sean los polinomios $E(x) = 4\pi x^2$, $F(x) = \frac{5}{3}\pi x^2$ y $G(x) = 2\pi x^2 + 10\pi x$ asociados a distintas figuras geométricas. Relaciona en tu cuaderno las cantidades de estas tres columnas.

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5	**$G(3)$**	**36π**
Área de un cilindro de altura 5 y radio 3	**$E(3)$**	**15π**
Área de una esfera de radio 3	**$F(3)$**	**48π**

Se calcula el valor de los tres polinomios en $x = 3$.

$E(3) = 4\pi 3^2 = 36\pi$ $\quad$ $F(3) = \frac{5}{3}\pi 3^2 = 15\pi$ $\quad$ $G(3) = 2\pi 3^2 + 10\pi 3 = 48\pi$

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5 $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 15\pi$

Área de un cilindro de altura 5 y radio 3 $= 2 \cdot \pi r^2 + 2\,\pi rh = 2 \cdot \pi 3^2 + 2\pi 3 \cdot 5 = 18\pi + 30\pi = 48\pi$

Volumen de una esfera de radio 3 $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5	$F(3) = 15\pi$
Área de un cilindro de altura 5 y radio 3	$G(3) = 48\pi$
Volumen de una esfera de radio 3	$E(3) = 36\pi$

3.67 Calcula *a*, *b* y *c* sabiendo que $x^3 - 6x^2 + ax + b$ es el cubo del binomio $x + c$.

$(x + c)^3 = x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3$

Igualamos los coeficientes correspondientes a los términos de igual grado:

$$-6 = 3c \Rightarrow c = -2$$

$$a = 3c^2 \Rightarrow a = 3 \cdot (-2)^2 \Rightarrow a = 12$$

$$b = c^3 \Rightarrow b = (-2)^3 \Rightarrow b = -8$$

3.68 Halla los valores de *a* y *b* para que los restos de las divisiones de $(ax^2 + bx) \cdot (x - 3)$ entre $(x - 1)$ y $(x + 1)$ sean, respectivamente, -6 y -2.

Utilizamos el teorema del resto, calculando el valor del polinomio en 1 y -1 e igualándolos a los valores del resto que nos da el enunciado.

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = (a \cdot 1^2 + b \cdot 1) \cdot (1 - 3) = (-2) \cdot (a + b) = -6 \Rightarrow a + b = 3 \\ P(-1) = [a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1)] \cdot (-1 - 3) = (-4) \cdot (a - b) = -2 \Rightarrow a - b = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{sumando } 2a = 3 + \frac{1}{2} \\ \text{restando } 2b = 3 - \frac{1}{2} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \begin{array}{l} 2a = \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{4} \\ 2b = \frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{5}{4} \end{array}$$

3.69 Simplifica los siguientes polinomios.

a) $(x - 2) \cdot (x + 2) - (x - 3) \cdot (x + 3) - x(2x + 1) - 4$

b) $(x^2 + 2x + 1) \cdot (x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3$

a) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - x(2x + 1) - 4 = x^2 - 4 - x^2 + 9 - 2x^2 - x - 4 = -2x^2 - x + 1$

b) $(x^2 + 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3 =$

$= x^6 - 2x^5 + 3x^4 + x^2 + 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 2x + x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1 - x^6 + 2x^3 = 6x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

3.70 Calcula los valores de a y b necesarios para que se cumplan estas igualdades.

a) $x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = (x - 2) \cdot (x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1)$

b) $x^6 - x^5 - 2x^4 - 4x^2 + 4x + 8 = (x^2 - x - 2) \cdot (x^4 + ax^3 + bx - 4)$

Multiplicamos e igualamos los coeficientes:

a) $(x - 2)(x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1) = x^5 + ax^4 + bx^3 + 2x^2 + x - 2x^4 - 2ax^3 - 2bx^2 - 4x - 2 =$
$= x^5 + (a - 2)x^4 + (b - 2a)x^3 + (2 - 2b)x^2 - 3x - 2$

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

$b - 2a = -5 \Rightarrow b - 2 \cdot 2 = -5 \Rightarrow b = -1$

$2 - 2b = 4$. Vemos que es correcta con los valores que habíamos obtenido.

b) $(x^2 - x - 2)(x^4 + ax^3 + bx - 4) = x^6 + ax^5 + bx^3 - 4x^2 - x^5 - ax^4 - bx^2 + 4x - 2x^4 - 2ax^3 - 2bx + 8 =$
$= x^6 + (a - 1)x^5 - (a + 2)x^4 + (b - 2a)x^3 - (4 + b)x^2 + (4 - 2b)x + 8$

$a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$

$-a - 2 = -2$ sirve de comprobación.

$b - 2a = 0 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow b = 0$

$-4 - b = -4$ sirve de comprobación.

$4 - 2b = 4$ sirve de comprobación.

3.71 Halla un polinomio de primer grado en la variable x, $R(x)$, que cumpla que $R(-1) = -7$ y $R(2) = 2$.

$R(x)$ será de la forma $R(x) = ax + b$; veamos qué valores toma en cada punto:

$R(-1) = a(-1) + b = -a + b = -7$ $\qquad$ $R(2) = a \cdot 2 + b = 2a + b = 2$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado y se obtienen los valores: $a = 3$ y $b = -4$.

El polinomio resultante es: $R(x) = 3x - 4$.

3.72 Calcula el dividendo de una división sabiendo que el divisor es $x^2 - 3$, el cociente es $4x - 5$ y el resto es $15x - 16$.

$D = d \cdot c + r \Rightarrow D = (x^2 - 3) \cdot (4x - 5) + (15x - 16)$

$D = 4x^3 - 5x^2 - 12x + 15 + 15x - 16$

$D = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

3.73 Estudia el signo de este polinomio por el procedimiento que se indica a continuación.

$Q(x) = (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$

a) Encuentra sus ceros.

b) Divide la recta real en los intervalos que tienen por extremos esos ceros.

c) Elige un punto en cada uno de esos intervalos y calcula el valor numérico de $Q(x)$ en ese punto. El signo de este valor numérico es el signo de $Q(x)$ en todo el intervalo.

a) $Q(x) = 0$ para los valores $x = -2$, $x = 1$ y $x = 3$

b) Los intervalos son: $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, +\infty)$.

c) $Q(-3) = (-3 + 2) \cdot (-3 - 1) \cdot (-3 - 3) = -1 \cdot (-4) \cdot (-6) = -24 \Rightarrow$ signo negativo

$Q(0) = (0 + 2) \cdot (0 - 1) \cdot (0 - 3) = 2 \cdot (-1) \cdot (-3) = +6 \Rightarrow$ signo positivo

$Q(2) = (2 + 2) \cdot (2 - 1) \cdot (2 - 3) = 4 \cdot 1 \cdot (-1) = -4 \Rightarrow$ signo negativo

$Q(4) = (4 + 2) \cdot (4 - 1) \cdot (4 - 3) = 6 \cdot 3 \cdot 1 = +18 \Rightarrow$ signo positivo

3.74 La expresión que calcula el área de un cilindro es:

$$A(r, h) = 2\pi r(r + h)$$

Donde r es el radio de la base, y h, la altura del cilindro.

a) ¿Cuál es el grado del polinomio $A(r, h)$?

b) ¿Qué área tiene el cilindro $A(3, 5)$?

c) Si un bote de refresco cilíndrico tiene aproximadamente 11 centímetros de altura y 6 centímetros de diámetro de la base, ¿qué cantidad de hojalata se ha utilizado en su fabricación?

d) Si el radio y la altura de un cilindro suman 20 centímetros, y el área del mismo es de 120π cm², ¿cuánto mide el radio?

a) $A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ es de grado 2, ya que cada monomio que lo forma también lo es.

b) $A(3, 5) = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot (3 + 5) = 6 \cdot \pi \cdot 8 = 48\pi u^2$

c) Si $h = 11$ y $r = 3 \Rightarrow A(3, 11) = 6 \cdot \pi \cdot 14 = 84\pi$ cm²

d) $A(r, h) = 2\pi r(r + h) \Leftrightarrow 120\pi = 2\pi r \cdot 20 \Rightarrow r = 3$ cm

3.75 Un Ayuntamiento quiere construir un depósito metálico para acumular agua.

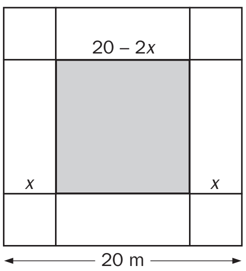
Disponen de una pieza cuadrada de metal de 20 × 20 metros, de la que cortan cuatro cuadrados de lado x en las cuatro esquinas y levantan los cuatro rectángulos resultantes para formar los laterales del depósito, soldando las esquinas.

a) ¿Qué polinomio $V(x)$ expresa el volumen que puede acumular el depósito?

b) Halla los valores numéricos siguientes: $V(0)$, $V(1)$, $V(2)$, $V(3)$ $V(4)$ $V(5)$ $V(6)$.

c) Representa los puntos $[x, V(x)]$ para los valores del apartado anterior.

d) ¿Podrías averiguar para qué valor de x el depósito tiene el máximo volumen?



a) Área de la base: $(20 - 2x) \cdot (20 - 2x)$; altura: $x \Rightarrow V(x) = (20 - 2x)^2 \cdot x$

El polinomio $4x^3 - 80x^2 + 400x$

b) $x = 0 \Rightarrow V(0) = (20 - 2 \cdot 0)^2 \cdot 0 = 0$

$x = 1 \Rightarrow V(1) = (20 - 2 \cdot 1)^2 \cdot 1 = 324$

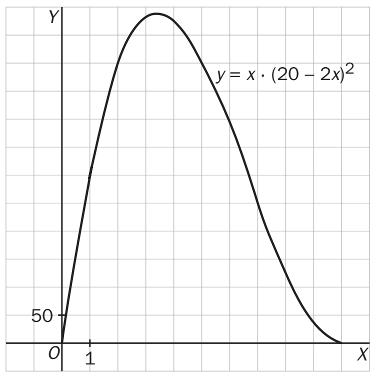
$x = 2 \Rightarrow V(2) = (20 - 2 \cdot 2)^2 \cdot 2 = 512$

$x = 3 \Rightarrow V(3) = (20 - 2 \cdot 3)^2 \cdot 3 = 588$

$x = 4 \Rightarrow V(4) = (20 - 2 \cdot 4)^2 \cdot 4 = 576$

$x = 5 \Rightarrow V(5) = (20 - 2 \cdot 5)^2 \cdot 5 = 500$

$x = 6 \Rightarrow V(6) = (20 - 2 \cdot 6)^2 \cdot 6 = 384$



d) En la gráfica podemos apreciar que cerca de $x = 3$ el volumen del depósito es máximo.

REFUERZO

Operaciones con polinomios

3.76 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 10x - 5$$

$$Q(x) = 6x^4 - 5x^3 + 8x - 5$$

$$R(x) = -x^2 - 3x + 8$$

Realiza estas operaciones:

a) $2x^2 \cdot R(x) - 5P(x) + 3Q(x)$ **b) $Q(x) \cdot R(x) - 2P(x)$**

a) $2 \cdot x^2 \cdot (-x^2 - 3x + 8) - 5 \cdot (3x^3 - 4x^2 + 10x - 5) + 3 \cdot (6x^4 - 5x^3 + 8x - 5) = 16x^4 - 36x^3 + 36x^2 - 26x + 10$

b) $(6x^4 - 5x^3 + 8x - 5) \cdot (-x^2 - 3x + 8) - 2 \cdot (3x^3 - 4x^2 + 10x - 5) =$

$= -6x^6 - 13x^5 + 63x^4 - 54x^3 - 11x^2 + 59x - 30$

3.77 **Completa la siguiente división de polinomios en tu cuaderno rellenando los coeficientes que faltan. Aplica la prueba de la división para comprobar que la has realizado correctamente.**

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\mathbf{2x^4} & + \boxed{(-1)}\mathbf{x^3} & + \boxed{5}\mathbf{x^2} & -\ \mathbf{4x} & +\ \mathbf{1} & \mathbf{x^2 - x + 2} \\
\cline{6-6}
\boxed{-2}\mathbf{x^4} & + \boxed{2}\mathbf{x^3} & - \boxed{4}\mathbf{x^2} & & & \boxed{2}\mathbf{x^2} + \boxed{1}\mathbf{x} \\
\cline{1-5}
 & \mathbf{x^3} & + \ \mathbf{x^2} & -\ \mathbf{4x} & +\ \mathbf{1} & \\
 & \boxed{(-1)}\mathbf{x^3} & + \boxed{1}\mathbf{x^2} & - \boxed{2}\mathbf{x} & & \\
\cline{2-5}
 & & \boxed{2}\mathbf{x^2} & - \boxed{6}\mathbf{x} & +\ \mathbf{1} &
\end{array}
$$

$d(x) \cdot c(x) + r(x) = (x^2 - x + 2) \cdot (2x^2 + x) + (2x^2 - 6x + 1) = 2x^4 + x^3 - 2x^3 - x^2 + 4x^2 + 2x + 2x^2 - 6x + 1 =$

$= 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = D(x)$

3.78 **Utilizando la regla de Ruffini, averigua si $x - 3$ es factor del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15$. ¿Tiene más factores dicho polinomio? ¿Por qué?**

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -4 & 8 & -15 \\
3 & & 3 & -3 & 15 \\
\hline
 & 1 & -1 & 5 & 0
\end{array}
$$

Obtenemos resto 0, es decir, $(x - 3)$ es factor de $P(X)$.

El cociente queda: $x^2 - x + 5$.

Resolvemos: $x^2 - x + 5 = 0$.

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-19}}{2}$. No existe solución; por tanto, $P(x)$ solo tiene un factor de primer grado.

Identidades notables

3.79 **Utiliza las identidades notables para desarrollar o para factorizar en cada caso las siguientes expresiones algebraicas.**

a) $16x^2 + 4y^2 - 16xy$

b) $25z^4y^2 - 16x^2b^6$

c) $(2x - 3y)^3$

d) $(5xy - 2zt) \cdot (5xy + 2zt)$

a) $16x^2 + 4y^2 - 16xy = (4x - 2y)^2$

b) $25z^4y^2 - 16x^2b^6 = (5z^2y + 4xb^3) \cdot (5z^2y - 4xb^3)$

c) $(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

d) $(5xy - 2zt) \cdot (5xy + 2zt) = 25x^2y^2 - 4z^2t^2$

Raíces y factorización de polinomios

3.80 **Indica si los valores $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ son raíces del polinomio $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + 7x - 6$.**

$P(2) = 2^5 + 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2 - 6 = 32 + 16 - 56 + 14 - 6 = 0$; $x_1 = 2$ es raíz de este polinomio.

$P(1) = 1^5 + 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1 - 6 = 1 + 1 - 7 + 7 - 6 = -4$; $x_2 = 1$ no es raíz de este polinomio.

3.81 **Halla el polinomio de cuarto grado cuyo coeficiente principal es 3 y que tiene por raíces $x_1 = 1$ (raíz doble), $x_2 = -2$ y $x_3 = 4$. Desarróllalo.**

$3(x - 1)^2(x + 2)(x - 4) = 3(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 8) = 3(x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 2x^3 + 4x^2 + 16x + x^2 - 2x - 8) =$

$= 3(x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8) = 3x^4 - 12x^3 - 9x^2 + 42x - 24$

3.82 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^3 - x^2 - 5x - 3$ **b)** $x^4 - 5x^2 + 4$

a) $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1) \cdot (x^2 - 2x - 3) = (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) = (x + 1)^2 \cdot (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \mathbf{0} \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

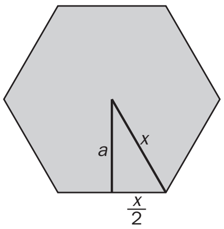
b) $Q(x) = 3x^4 - 5x^3 - 33x^2 + 23x - 12 = (x + 3) \cdot (3x^3 - 14x^2 + 9x - 4) = (x + 3) \cdot (x - 4) \cdot (3x^2 - 2x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -5 & -33 & 23 & -12 \\ -3 & & -9 & 42 & -27 & 12 \\ \hline & 3 & -14 & 9 & -4 & 0 \end{array}$$

$$3x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

AMPLIACIÓN

3.83 ¿Qué expresión algebraica determina el área de un hexágono regular de lado x?



En un hexágono regular, el radio y el lado coinciden. Con estos dos datos y sabiendo que la apotema corta el lado en su punto medio, podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$A = \frac{6x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

3.84 Halla el polinomio de segundo grado que cumple estas tres condiciones:

– Su coeficiente principal es 5.

– Tiene como factor $(x - 3)$.

– El resto de su división entre $(x + 2)$ es 25.

En este polinomio, un factor es $(x - 3)$; para que su coeficiente principal sea 5, multiplicamos el factor por 5. Para que tenga grado 2 deberemos multiplicarlo por un binomio de grado 1 de la forma $(x + b)$, quedando:

$P(x) = 5 \cdot (x - 3) \cdot (x + b)$. Para que el resto al dividirlo entre $x + 2$ sea 25, por el teorema del resto:

$P(-2) = -25b + 50 = 25 \Rightarrow b = 1$

Entonces, $P(x) = 5 \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$

3.85 En el polinomio $Q(y) = 25y^2 - 20y + 4$, cualquier valor numérico para todo valor de y es positivo, salvo en un valor que es 0. Explica por qué, utilizando la factorización por identidades notables. ¿Para qué valor de y es 0 el polinomio?

$Q(y) = (5y - 2)^2$

Al ser un cuadrado, siempre es positivo salvo cuando $5y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{5}$.

3.86 Calcula a y b para que $N(x) = 8x^3 + ax^2 + 54x + b$ sea un cubo perfecto. ¿Qué polinomio al cubo da como resultado $N(x)$?

$8x^3 + ax^2 + 54x + b = (2x + c)^3$; $(2x + c)^3 = 8x^3 + 12cx^2 + 6c^2x + c^3$

Igualando coeficientes: $6c^2 = 54 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = \pm 3$

$12c = a \Rightarrow 12 \cdot 3 = a \Rightarrow a = 36$ o $12 \cdot (-3) = a \Rightarrow a = -36$

$b = c^3 \Rightarrow b = 27$ o $b = -27$

$N(x) = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x + 3)^3$ o $N(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = (2x - 3)^3$

3.87 Halla a y b para que $T(x)$ tenga como raíces las que se indican en cada caso.

a) $T(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 9$. Raíces: 3 y -3

b) $T(x) = 2x^4 + ax^3 - x^2 + bx - 1$. Raíces: 1 y -1

a) $A(x) = x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$; tendrá que ser divisible entre $(x + 3)$ y entre $(x - 3)$.

$$\left.\begin{array}{l} T(3) = 3 \cdot 3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 9 = 81 + 9a + 3b + 9 = 9a + 3b + 90 = 0 \\ a = -1 \end{array}\right\} \text{Sumamos } 18a + 18 = 0$$

$T(-3) = 3 \cdot (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 9 = -81 + 9a - 3b + 9 = 9a - 3b - 72 = 0$ Resto: $6b + 162 = 0$

$b = -27$

b) $A(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$; tendrá que ser divisible entre $(x + 1)$ y entre $(x - 1)$.

$$\left.\begin{array}{l} T(1) = 2 \cdot 1^4 + a \cdot 1^3 - 1^2 + b \cdot 1 - 1 = 2 + a - 1 + b - 1 = a + b = 0 \\ T(-1) = 2 \cdot (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + b \cdot (-1) - 1 = 2 - a - 1 - b - 1 = -a - b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Tiene infinitas solucio-} \\ \text{nes, la única condición} \\ \text{será: } a = -b.\end{array}$$

3.88 Completa esta división.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & \boxed{0} & 1 & \boxed{-10} \\ \boxed{-2} & & \boxed{2} & \boxed{-4} & \boxed{6} \\ \hline & \boxed{-1} & 2 & -3 & -4 \end{array}$$

3.89 ¿Por qué polinomio hemos dividido $-6x^3 + 4x^2 - 3$ para que el cociente de la división sea $c(x) = -6x^2 + 28x - 112$, y el resto, 445?

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x) \Rightarrow d(x) = \frac{D(x) - r(x)}{c(x)} = \frac{-6x^3 + 4x^2 - 448}{-6x^2 + 28x - 112}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} -6x^3 & +\ 4x^2 & & -\ 448 & -6x^2 + 28x - 112 \\ \cline{5-5} +6x^3 & -\ 28x^2 & +\ 112x & & x + 4 \\ \cline{1-4} & -24x^2 & +\ 112x & -\ 448 & \\ & +24x^2 & -\ 112x & +\ 448 & \\ \cline{2-4} & & & 0 & \end{array}$$

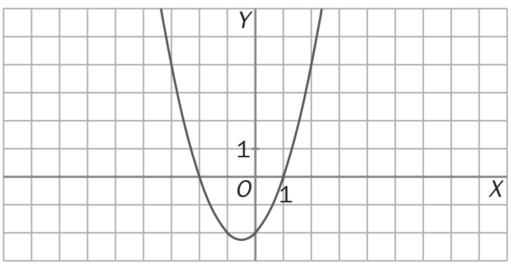
El divisor es $d(x) = x + 4$

3.90 Indica si puede existir alguna diferencia entre dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, que tengan las siguientes características: los factores de $P(x)$ son $(x - 1)$, $(x + 5)$ y $(x - 2)$, y las raíces de $Q(x)$ son -5, 2 y 1. Justifica tu respuesta.

Un polinomio del tipo $A(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x + 5) \cdot (x - 2)$ cumple las dos condiciones.

Luego si cambiamos el valor de a tenemos infinitos polinomios que verifican esas dos condiciones.

3.91 Si las raíces de un polinomio coinciden con los cortes de la gráfica del polinomio con el eje de abscisas, ¿a qué polinomio corresponde esta gráfica?



a) $x^2 + x - 2$ **c) $x^2 + 3x + 2$**

b) $x^2 - x - 2$ **d) $x^2 - 3x + 2$**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Corte con eje } OX\text{: } (-2, 0) \text{ y } (1, 0) \\ \text{Raíces: } -2 \text{ y } 1 \\ \text{Factores: } (x + 2) \text{ y } (x - 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{a)}$$

3.92 **Halla el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, que tenga el mismo coeficiente principal que el polinomio $Q(x) = (3x - 5) \cdot (4x - 1)$, que una de sus raíces sea igual a la raíz negativa del polinomio $T(x) = x^2 - 5x - 6$, y la otra, igual a la suma de las raíces del polinomio $S(x) = (x - 4) \cdot (x + 3)$.**

Misma raíz negativa que $x^2 - 5x - 6$:

	1	-5	-6
-1		-1	6
	1	-6	0
6		6	
	1	0	

Raíz: $x = -1$

Suma de raíces de $(x - 4) \cdot (x + 3)$: $4 + (-3) = 1$

Misma a que $(3x - 5) \cdot (4x - 1) = 12x^2 - 23x + 5 \Rightarrow a = 12$

Polinomio: $P(x) = 12 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

La cesta de la compra

3.93 **Se quiere hacer un estudio sobre el precio de ciertos artículos de consumo habitual en los hogares de una localidad.**

Los artículos de consumo se han dividido en tres grupos: alimentación, limpieza del hogar y aseo personal.

Por estudios anteriores, se sabe que en una familia media, el total de gasto en estos productos se divide en el 65 % para alimentación, 20 % para limpieza del hogar y 15 % para aseo personal.

En dicha localidad existen tres comercios *A*, *B* y *C* que ofrecen dichos productos. Para realizar el estudio, se ha escogido, por sorteo, un artículo de cada grupo de marcas y características determinadas, y se han observado sus precios en cada uno de los comercios.

La tabla siguiente muestra los resultados obtenidos:

	Leche	Detergente	Dentífrico
A	1 €	7,40 €	3 €
B	0,90 €	8 €	3,10 €
C	1,05 €	6,50 €	2,80 €

a) Completa la siguiente tabla de precios relativos elaborada dividiendo cada uno de los precios de la tabla anterior por la media aritmética del precio del artículo en los tres comercios.

	Leche	Detergente	Dentífrico
A	1,017 €	1,014 €	
B	0,915 €		
C	1,068 €		

Como un indicador del gasto que se produce en cada uno de los comercios, se toma el valor del siguiente polinomio:

$$P(x, y, z) = ax + by + cz$$

Donde *x*, *y* y *z* representan los precios relativos de los tres productos elegidos.

b) Indica qué valores darías a las constantes *a*, *b* y *c* del polinomio.

c) ¿Por qué se utilizan, para *x*, *y* y *z*, los valores de la segunda tabla en vez de los de la primera?

d) Calcula el valor del polinomio para cada uno de los tres comercios.

e) ¿Cuál de ellos elegirías para realizar las compras?

a)

	Leche	Detergente	Dentífrico
A	**1,017 €**	**1,014 €**	1,011 €
B	**0,915 €**	1,096 €	1,045 €
C	**1,068 €**	0,890 €	0,944 €

b) $P = 0{,}65x + 0{,}20y + 0{,}15z$

c) Con el fin de que posteriormente los precios intervengan en el indicador en la parte que les corresponde.

d) A: $P = 0{,}65 \cdot 1{,}017 + 0{,}20 \cdot 1{,}014 + 0{,}15 \cdot 1{,}011 = 1{,}015$
B: $P = 0{,}65 \cdot 0{,}915 + 0{,}20 \cdot 1{,}096 + 0{,}15 \cdot 1{,}045 = 0{,}971$
C: $P = 0{,}65 \cdot 1{,}068 + 0{,}20 \cdot 0{,}890 + 0{,}15 \cdot 0{,}944 = 1{,}014$

e) Se elegiría el comercio B.

AUTOEVALUACIÓN

3.A1 Transcribe las dos siguientes expresiones verbales al lenguaje algebraico.
a) El producto de tres números consecutivos.
b) El perímetro de un rectángulo de base b y altura h.

a) $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$

b) $2b + 2h = 2 \cdot (b + h)$

3.A2 Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$.

$$P(x) = \frac{x^3}{2} - 2(x^2 - 1)$$

$$P(2) = \frac{2^3}{2} - 2(2^2 - 1) = 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$P(-1) = \frac{(-1)^3}{2} - 2((-1)^2 - 1) = \frac{-1}{2}$$

3.A3 Si $P(x) = 3x^2 - 2x + 4$, $Q(x) = -2x^3 - x^2 + 5x - 1$ y $R(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2$, realiza las siguientes operaciones.
¿Qué grado tienen los polinomios resultantes?
a) $P(x) - Q(x) + R(x)$ **b) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$**

a) $P(x) - Q(x) + R(x) = (3x^2 - 2x + 4) - (-2x^3 - x^2 + 5x - 1) + (x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2) =$
$= 3x^2 - 2x + 4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 1 + x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2 =$
$= x^4 + x^3 + 8x^2 - 4x + 3 \Rightarrow$ Grado 4

b) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = (3x^2 - 2x + 4) \cdot [(-2x^3 - x^2 + 5x - 1) + (x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2)] =$
$= (3x^2 - 2x + 4) \cdot (x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 3) =$
$= 3x^6 - 9x^5 + 9x^4 + 24x^3 - 9x^2 - 2x^5 + 6x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 6x + 4x^4 - 12x^3 + 12x^2 +$
$+ 32x - 12 = 3x^6 - 11x^5 + 19x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 38x - 12 \Rightarrow$ Grado 6

3.A4 Realiza las siguientes divisiones de polinomios.
a) $(5x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x^3 - x - 1)$
b) $(4x^3 - 2x + 1) : (x^2 + x + 1)$
¿Podrías aplicar la regla de Ruffini? ¿Por qué?

a)
$$\begin{array}{r|l} 5x^4 - 3x^2 + x - 1 & x^3 - x - 1 \\ \cline{2-2} -5x^4 + 5x^2 + 5x & 5x \\ \hline 2x^2 + 6x - 1 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|l} 4x^3 \qquad - 2x + 2 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2} -4x^3 - 4x^2 - 4x & 4x - 4 \\ \hline -4x^2 - 6x + 2 & \\ 4x^2 + 4x + 4 & \\ \hline -2x + 6 & \end{array}$$

No se puede aplicar Ruffini porque los divisores no tienen grado 1.

3.A5 Efectúa las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini. Indica los polinomios cociente y resto.

a) $(2x^3 + 4x^2 - 5x - 3) : (x - 2)$

b) $(x^4 - 3x^2 + 4x - 2) : (x + 3)$

a) Cociente: $2x^2 + 8x + 11$
Resto: 19

b) Cociente: $x^3 - 3x^2 + 6x - 14$
Resto: 40

3.A6 Señala cuál de las siguientes expresiones se corresponde con el desarrollo del cuadrado del binomio $(3ab - c)^2$.

a) $9a^2b^2 - c^2$

b) $9a^2b^2 - 6abc + c^2$

c) $9a^2b^2 + 6abc + c^2$

Solución: b) $9a^2b^2 - 6abc + c^2$

3.A7 Indica a cuál de las siguientes expresiones corresponde el desarrollo de la suma por diferencia $(2x^2y + 3y^2z) \cdot (2x^2y - 3y^2z)$

a) $4x^4y^2 + 9y^4z^2$

b) $4x^2y - 9y^2z$

c) $4x^4y^2 - 9y^4z^2$

Solución: c) $4x^4y^2 - 9y^4z^2$

3.A8 Calcula el valor que debe tener k para que el polinomio $P(x) = x^5 + kx^4 + x^3 - 4x^2 + x - 4$ tenga como factor $(x - 4)$.

$P(4) = 4^5 + k4^4 + 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 4 - 4 = 1024 + 256k + 64 - 64 + 4 - 4 = 1024 + 256k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1024 = -256k \Rightarrow k = -4$

3.A9 ¿Es $(x + 1)$ un factor del polinomio $x^{71} - 1$? Razona tu respuesta.

$P(-1) = (-1)^{71} - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$

No, porque el resto de la división no es 0.

3.A10 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $2x^3 - 14x - 12$

b) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

a) $P(x) = 2x^3 - 14x - 12 = (x + 1)(2x^2 - 2x - 12) = 2(x + 1)(x + 2)(x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -14 & -12 \\ -1 & & -2 & 2 & 12 \\ \hline & 2 & -2 & -12 & 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4} = \frac{2 \pm 10}{4} = \begin{cases} \frac{12}{4} = 3 \\ \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x - 1)(x^2 + 4x - 5) = (x - 1)^2(x + 5)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -9 & 5 \\ 1 & & 1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

¿Dónde está el error?

En la resolución de esta ecuación hay un error.

$$\frac{2x + 3}{4x + 6} = 2 \rightarrow 2x + 3 = 8x + 12 \rightarrow -6x = 9 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

¿Puedes encontrarlo? ¿Sabrías resolver correctamente la ecuación?

La primera idea que surge es que al ser el denominador el doble que el numerador, el cociente no puede ser igual a 2, luego la ecuación no tiene solución.

Resolviendo algebraicamente la ecuación se tiene:

$$2x + 3 = 2(4x + 6) \Rightarrow 2x + 3 = 8x + 12 \Rightarrow 2x - 8x = 12 - 3 \Rightarrow -6x = 9$$

$$x = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

Aunque algebraicamente la ecuación tiene solución, debe hacerse notar al estudiante que antes de iniciar un problema debe analizarlo, y que en este caso la ecuación tiene un dominio cuyos valores deben ser diferentes de $-\frac{3}{2}$, o sea, $4x + 6 \neq 0$.

D: $R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Como el resultado es $-\frac{3}{2}$, la ecuación no tiene solución en su dominio.