TEMA 3 – ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

EJERCICIO 1 : Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x^2-1}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{1-x}{6}$ **b)** $x^4-26x^2+25=0$ **c)** $4.(5x+1)^2-9=0$ **d)** $2x^4+9x^2-68=0$

e) $x^4-4x^2+3=0$ **f)** $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{5}{2}$ **g)** $3\sqrt{x+2}-x=4$ **h)** $\frac{2x}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{5}{6}$

i) $x^4-9x^2=0$ **j)** $\sqrt{x+1}+5=x$ **k)** $\frac{1}{x}-\frac{3}{x}=x-3$ **l)** $3x^4-10x^2-8=0$

m) $\frac{(2x+5)(3x-1)}{3}+\frac{x^2+5}{2}=\frac{7x-5}{6}+1$ **n)** $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=2$ **ñ)** $\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x}=\frac{-7}{4}$

o) $x+\frac{8}{2x}=5$ **p)** $2x+\sqrt{6x+1}=3$ **q)** $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x-1}=\frac{15}{4}$ **r)** $\frac{81}{x^3}-1=2$

s) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=3$ **t)** $x(4x+1)(2x-7)(x^2-4)=0$ **u)** $x(9x^2-1)(2x+3)=0$ **v)** $\sqrt{x+1}-x=-5$

w) $2x\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-5x+6\right)=0$ **x)** $\frac{1}{x}+\frac{5x-1}{x+2}=-7$ **y)** $x^4-3x^2-4=0$ **z)** $\sqrt{5x-1}-3=-5x$

1) $\frac{5}{2x+3}+\frac{4x}{2x-3}=3$

Solución:

a) Multiplicamos los dos miembros por 6: $3\left(2x^2-1\right)-2\left(x-1\right)=1-x \rightarrow 6x^2-3-2x+2=1-x \rightarrow$

$$\rightarrow 6x^2-x-2=0 \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{12}=\frac{1\pm 7}{12}\begin{cases}\frac{8}{12}=\frac{2}{3}\\[4pt] \frac{-6}{12}=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=\frac{2}{3}$ y $x_2=\frac{-1}{2}$.

b) Por ser bicuadrada, hacemos el cambio $x^2=z$:

$$z^2-26z+25=0 \rightarrow z=\frac{26\pm\sqrt{676-100}}{2}=\frac{26\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{26\pm 24}{2}\begin{cases}\frac{2}{2}=1\\[4pt] \frac{50}{2}=25\end{cases}$$

Si $z=1 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

Si $z=25 \rightarrow x^2=25 \rightarrow x=\pm 5$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=5$ y $x_4=-5$.

c) Sabemos que si $a^2=b^2$, entonces, o bien $a=b$ o bien $a=-b$.

En este caso: $4\left(5x+1\right)^2-9=0 \rightarrow \left(5x+1\right)^2=\frac{9}{4} \rightarrow \left(5x+1\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

Así:

$5x+1=\frac{3}{2} \rightarrow 10x+2=3 \rightarrow 10x=1 \rightarrow x=\frac{1}{10}$

$5x+1=-\frac{3}{2} \rightarrow 10x+2=-3 \rightarrow 10x=-5 \rightarrow x=\frac{-5}{10}=\frac{-1}{2}$

Las soluciones son $x_1=\frac{1}{10}$ y $x_2=\frac{-1}{2}$.

d) $2x^4 + 9x^2 - 68 = 0$ equivale a $2z^2 + z - 68 = 0$, siendo $z = x^2$.

$$z = \frac{-9 \pm \sqrt{81+544}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{625}}{4} = \frac{-9 \pm 25}{4} \begin{cases} \frac{-34}{4} = \frac{-17}{2} \\ \frac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

Si $z = \frac{-17}{2} \rightarrow x^2 = \frac{-17}{2} \rightarrow$ no hay solución real.

Si $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Las soluciones pedidas son $x_1 = 2$ y $x_2 = 2$.

e) Hacemos el cambio: $x^2 = z \rightarrow x^4 = z^2$

Así obtenemos: $z^2 - 4z + 3 = 0 \rightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$

Si $z = 3 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Por tanto, hay cuatro soluciones: $x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = -1,\ x_4 = 1$

Si $z = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

f) $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{x^2}{2x} + \frac{4}{2x} = \frac{5x}{4x} \rightarrow x^2 + 4 = 5x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

g) $3\sqrt{x+2} - x = 4 \rightarrow 3\sqrt{x+2} = 4 + x$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$\left(3\sqrt{x+2}\right)^2 = (4+x)^2 \rightarrow 9(x+2) = 16 + 8x + x^2 \rightarrow 9x + 18 = 16 + 8x + x^2 \rightarrow$

$\rightarrow 0 = x^2 - x - 2 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

h) $\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{12x^2}{6x(x+1)} - \frac{6(x+1)}{6x(x+1)} = \frac{5x(x+1)}{6x(x+1)} \rightarrow 12x^2 - 6x - 6 = 5x^2 + 5x \rightarrow 7x^2 - 11x - 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121+168}}{14} = \frac{11 \pm \sqrt{289}}{14} = \frac{11 \pm 17}{14} \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-6}{14} = \frac{-3}{7} \end{cases}$

i) $x^4 - 9x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow$ Hay tres soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ x_3 = 3$

j) $\sqrt{x+1} + 5 = x \rightarrow \sqrt{x+1} = x - 5$

Elevamos al cuadrado y operamos: $\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (x-5)^2 \rightarrow x + 1 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow 0 = x^2 - 11x + 24 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121-96}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 8 \\ x = 3 \text{ (no válida)} \end{cases}$

k) $\frac{1}{x} - \frac{3}{x} = x - 3 \rightarrow \frac{1}{x} - \frac{3}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} \rightarrow 1 - 3 = x^2 - 3x \rightarrow 0 = x^2 - 3x + 2 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

l) Haciendo $x^2 = z$, se obtiene: $3z^2 - 10z - 8 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{10 \pm \sqrt{100+96}}{6} = \dfrac{10 \pm 14}{6}$ $\begin{cases} \dfrac{24}{6} = 4 \\ \dfrac{-4}{6} = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$

Si $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Si $z = \dfrac{-2}{3} \rightarrow x^2 = \dfrac{-2}{3} \rightarrow$ no hay solución real.

Las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

m) Multiplicamos ambos miembros por 6: $2(2x+5)(3x-1) + 3(x^2+5) = 7x - 5 + 6 \rightarrow$

$\rightarrow 12x^2 - 4x + 30x - 10 + 3x^2 + 15 - 7x + 5 - 6 = 0 \rightarrow \rightarrow 15x^2 + 19x + 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{-19 \pm \sqrt{361-240}}{30} = \dfrac{-19 \pm \sqrt{121}}{30} = \dfrac{-19 \pm 11}{30}$ $\begin{cases} \dfrac{-30}{30} = -1 \\ \dfrac{-8}{30} = \dfrac{-4}{15} \end{cases}$ Las soluciones son $x_1 = -1$ y $x_2 = \dfrac{-4}{15}$.

n) $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{x-2}$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x - 2 = 4 + x - 4\sqrt{x} \rightarrow 4\sqrt{x} = 6 \rightarrow 2\sqrt{x} = 3$

Volvemos a elevar al cuadrado: $4x = 9 \rightarrow x = \dfrac{9}{4}$ es la posible solución.

Lo comprobamos: $\sqrt{\dfrac{9}{4}} + \sqrt{\dfrac{9}{4} - 2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ Luego $x = \dfrac{9}{4}$ es la solución buscada.

ñ) Multiplicamos ambos miembros por $4x(x+2)$:

$4x - 4(x+2)^2 = -7x(x+2) \rightarrow 4x - 4(x^2 + 4x + 4) = -7x^2 - 14x \rightarrow$

$\rightarrow 4x - 4x^2 - 16x - 16 = -7x^2 - 14x \rightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+192}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} = \dfrac{-2 \pm 14}{6}$ $\begin{cases} 2 \\ \dfrac{-16}{6} = \dfrac{-8}{3} \end{cases}$

Comprobamos estas soluciones sobre la ecuación:

$\dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{2} = \dfrac{1-8}{4} = \dfrac{-7}{4} \rightarrow$ 2 es solución.

$\dfrac{1}{\dfrac{-8}{3}+2} - \dfrac{\dfrac{-8}{3}+2}{\dfrac{-8}{3}} = \dfrac{1}{\dfrac{-2}{3}} - \dfrac{\dfrac{-2}{3}}{\dfrac{-8}{3}} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{8} = \dfrac{-14}{8} = \dfrac{-7}{4} \rightarrow \dfrac{-8}{3}$ es solución.

Las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = \dfrac{-8}{3}$.

o) Multiplicamos ambos miembros por $2x$:

$2x^2 + 8 = 10x \rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

Comprobación de las posibles soluciones: $4 + \dfrac{8}{8} = 4 + 1 = 5 \rightarrow 4$ es solución ; $1 + \dfrac{8}{2} = 1 + 4 = 5 \rightarrow 1$ es solución

Las soluciones son $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$.

p) $\sqrt{6x+1} = 3-2x \Rightarrow$ Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$6x+1 = 9-12x+4x^2 \rightarrow 4x^2-18x+8=0 \rightarrow 2x^2-9x+4=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4} = \frac{9\pm\sqrt{49}}{4} = \frac{9\pm 7}{4} \begin{cases} \frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ \frac{16}{4}=4 \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones sobre la ecuación:

$$2\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{6}{2}+1} = 1+\sqrt{4} = 1+2 = 3 \rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ es solución}$$

$$8+\sqrt{24+1} = 8+\sqrt{25} = 8+5 = 13 \rightarrow x=4 \text{ no es solución}$$

La única solución es $x=\frac{1}{2}$.

q) Hacemos común denominador: $\rightarrow$

$$4x(x-1)+8x(x+1) = 15(x+1)(x-1) \rightarrow$$
$$4x^2-4x+8x^2+8x = 15x^2-15 \rightarrow$$
$$\rightarrow 12x^2+4x = 15x^2-15 \rightarrow 3x^2-4x-15=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{4\pm\sqrt{16+180}}{6} = \frac{4\pm\sqrt{196}}{6} = \frac{4\pm 14}{6} \begin{cases} \frac{18}{6}=3 \\ \frac{-10}{6}=\frac{-5}{3} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$$\frac{3}{3+1}+\frac{6}{3-1} = \frac{3}{4}+\frac{6}{2} = \frac{3+12}{4} = \frac{15}{4} \rightarrow 3 \text{ es solución.}$$

$$\frac{\frac{-5}{3}}{\frac{-5}{3}+1}+\frac{\frac{-10}{3}}{\frac{-5}{3}-1} = \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}}+\frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{8}{3}} = \frac{5}{2}+\frac{10}{8} = \frac{20+10}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} \rightarrow -\frac{5}{3} \text{ es solución.}$$

Las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = \frac{-5}{3}$.

r) Multiplicamos ambos miembros por x^3:$\Rightarrow \frac{81}{x^3} = 3 \rightarrow 81 = 3x^3 \rightarrow x^3 = 27 \rightarrow x = 3$

Comprobamos si es, o no, solución en la ecuación inicial: $\frac{81}{27}-1 = 3-1 = 2 \rightarrow x=3$ es solución

s) $\sqrt{x+4} = 3-\sqrt{x-1}$ Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$x+4 = 9+x-1-6\sqrt{x-1} \rightarrow 6\sqrt{x-1} = 4 \rightarrow 3\sqrt{x-1} = 2$$

Volvemos a elevar al cuadrado: $9(x-1) = 4 \rightarrow 9x-9 = 4 \rightarrow 9x = 13 \rightarrow x = \frac{13}{9}$

Comprobamos si es, o no, solución: $\sqrt{\frac{13}{9}+4} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$; $3-\sqrt{\frac{13}{9}-1} = 3-\sqrt{\frac{4}{9}} = 3-\frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

Ambos miembros coinciden, luego $x = \frac{13}{9}$ es la solución buscada.

t) Para que el producto de varios factores sea 0, alguno de ellos tiene que ser 0. Así:

$$x(4x+1)(2x-7)(x^2-4)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ 4x+1=0 \quad\rightarrow\quad x=\dfrac{-1}{4} \\ 2x-7=0 \quad\rightarrow\quad x=\dfrac{7}{2} \\ x^2-4=0 \quad\rightarrow\quad x=\pm 2 \end{cases}$$

Las soluciones son $x=0,\ x=\dfrac{-1}{4},\ x=\dfrac{7}{2},\ x=2$ y $x=-2$.

u) Tenemos un producto de factores igualado a 0, luego se ha de cumplir que:

$x=0$

$9x^2-1=0 \quad\rightarrow\quad x^2=\dfrac{1}{9} \quad\rightarrow\quad x=\pm\dfrac{1}{3}$

$2x+3=0 \quad\rightarrow\quad x=\dfrac{-3}{2}$

$\Rightarrow$ Las soluciones son $x_1=0,\ x_2=\dfrac{1}{3},\ x_3=-\dfrac{1}{3}$ y $x_4=\dfrac{-3}{2}$.

v) $\sqrt{x+1}-x=-5 \rightarrow \sqrt{x+1}=x-5 \Rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$x+1=(x-5)^2 \quad\rightarrow\quad x+1=x^2-10x+25 \quad\rightarrow\quad x^2-11x+24=0 \quad\rightarrow$

$\rightarrow\quad x=\dfrac{11\pm\sqrt{121-96}}{2}=\dfrac{11\pm\sqrt{25}}{2}=\dfrac{11\pm 5}{2} \begin{cases} 8 \\ 3 \end{cases}$

Comprobamos estas soluciones sobre la ecuación:

$\sqrt{8+1}-8=\sqrt{9}-8=3-8=-5 \quad\rightarrow\quad x=8$ es solución.

$\sqrt{3+1}-3=\sqrt{4}-3=2-3=-1 \quad\rightarrow\quad x=3$ no es solución.

w) Tenemos un producto de factores igualado a 0, luego se ha de cumplir:

$x=0$

$\sqrt{x}-1=0 \quad\rightarrow\quad \sqrt{x}=1 \quad\rightarrow\quad x=1$

$x^2-5x+6=0 \quad\rightarrow\quad x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

Las soluciones son $x=0,\ x=1,\ x=2$ y $x=3$.

x) Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $x(x+2)$:

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{5x+1}{x+2}=-7 \quad\rightarrow\quad x+2+x(5x-1)=-7x(x+2) \quad\rightarrow$

$\rightarrow\quad x+2+5x^2-x=-7x^2-14x \quad\rightarrow\quad 12x^2+14x+2=0 \quad\rightarrow\rightarrow\quad 6x^2+7x+1=0 \quad\rightarrow$

$\rightarrow\quad x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-24}}{12}=\dfrac{-7\pm\sqrt{25}}{12}=\dfrac{-7\pm 5}{12} \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{2}{12}=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$

Comprobamos si son o no solución, sustituyendo en la ecuación inicial:

$\dfrac{1}{-1}+\dfrac{-5-1}{-1+2}=-1-6=-7 \quad\rightarrow\quad x=-1$ es solución.

$\dfrac{1}{-\frac{1}{6}}+\left(-\dfrac{5}{6}-1\right):\left(-\dfrac{1}{6}+2\right)=-6-\dfrac{11}{6}:\dfrac{11}{6}=-6-1=-7 \quad\rightarrow\quad x=-\dfrac{1}{6}$ es solución.

y) Haciendo $x^2=z$, obtenemos $\rightarrow\quad z^2-3z-4=0 \quad\rightarrow\rightarrow\quad z=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\dfrac{3\pm 5}{2} \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

Así: $z=4 \quad\rightarrow\quad x^2=4 \quad\rightarrow\quad x=\pm 2$

$z=-1 \quad\rightarrow\quad x^2=-1 \quad\rightarrow$ no hay solución.

Las soluciones son: $x_1=2,\ x_2=-2$

z) $\sqrt{5x-1}-3=-5x \rightarrow \sqrt{5x-1}=3-5x \Rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$5x-1=(3-5x)^2 \;\rightarrow\; 5x-1=9-30x+25x^2 \;\rightarrow\; 25x^2-35x+10=0 \;\rightarrow\rightarrow\; 5x^2-7x+2=0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-40}}{10}=\dfrac{7\pm3}{10} \begin{cases} 1 \\ \dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5} \end{cases}$

Comprobamos estas soluciones sobre la ecuación:

$\sqrt{5\cdot1-1}-3=\sqrt{4}-3=2-3=-1\neq-5 \;\rightarrow\; x=1$ no es solución.

$\sqrt{5\cdot\dfrac{2}{5}-1}-3=\sqrt{1}-3=-2=-5\cdot\dfrac{2}{5} \;\rightarrow\; x=\dfrac{2}{5}$ es solución.

1) Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $(2x+3)\,(2x-3)$:

$\dfrac{5}{2x+3}+\dfrac{4x}{2x-3}=3 \;\rightarrow\; 5(2x-3)+4x(2x+3)=3(2x+3)(2x-3) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 10x-15+8x^2-12x=3(4x^2-9) \;\rightarrow\; 8x^2+22x-15=12x^2-27 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4x^2-22x-12=0 \;\rightarrow\; 2x^2-11x-6=0 \;\rightarrow\rightarrow\; x=\dfrac{11\pm\sqrt{121+48}}{4}=\dfrac{11\pm\sqrt{169}}{4}=\dfrac{11\pm13}{4}= \begin{cases} -\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2} \\ 6 \end{cases}$

Comprobamos estas soluciones en la ecuación:

$\dfrac{5}{-1+3}+\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=3 \;\rightarrow\; x=-\dfrac{1}{2}$ es solución.

$\dfrac{5}{12+3}+\dfrac{24}{12-3}=\dfrac{5}{15}+\dfrac{24}{9}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{9}{3}=3 \;\rightarrow\; x=6$ es solución.

Las soluciones son: $x_1=-\dfrac{1}{2},\; x_2=6$

<u>EJERCICIO 2</u> : Escribe una ecuación cuyas soluciones sean $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}$ y $-\dfrac{3}{2}$.

Solución:

La ecuación $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=0$ tiene como soluciones las pedidas.

Multiplicando estos tres factores se llega a la ecuación buscada:

$\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=0 \;\rightarrow\; x^3+\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{8}=0 \;\rightarrow\; 8x^3+12x^2-2x-3=0$ es la solución.

SISTEMAS DE INECUACIONES

<u>EJERCICIO 3</u> : Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{2y}{5}=5 \\ \dfrac{2x+1}{3}=y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{6x-1}{7}=3(y-1) \\ 6y+x=3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \sqrt{2y+1}+x=2 \\ x-4y=4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{y}{3}=2 \\ \dfrac{y-1}{3}=3x-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3xy-3=-5y \\ x+y=-5 \end{cases}$ **f)** $\left.\begin{matrix} 2x-y=12 \\ \dfrac{3}{2}x+5y=4 \end{matrix}\right\}$ **g)** $\begin{cases} \dfrac{x+2}{5}-y=-8 \\ \dfrac{y+1}{2}+\dfrac{x-1}{4}=2 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 5y-2x=\dfrac{5}{2} \\ 4x+\dfrac{5}{3}y=2 \end{cases}$

i) $\left.\begin{matrix} \dfrac{x+1}{3}-\dfrac{4y}{2}=8 \\ \dfrac{2y-5}{6}+\dfrac{5x}{2}=3 \end{matrix}\right\}$ **j)** $\begin{cases} y+2x=2 \\ \dfrac{10x+3}{5}=5y-1 \end{cases}$ **k)** $\begin{cases} y^2-x^2=5 \\ \dfrac{10x+8}{3}=2y+\dfrac{10}{3} \end{cases}$ **l)** $\left.\begin{matrix} 3x^2-5y^2=-2 \\ x^2-6y^2=-5 \end{matrix}\right\}$

m) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$ **n)** $\begin{cases} \sqrt{x-2}+y=3 \\ -5+2x=x-y \end{cases}$ **ñ)** $\left.\begin{matrix} xy+2=4x \\ y-x=1 \end{matrix}\right\}$ **o)** $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \\ xy=6 \end{cases}$

Solución:

a) Comenzamos por simplificar cada una de las ecuaciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x-1}{2}+\frac{2y}{5}=5\\ \frac{2x+1}{3}=y\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c}5(x-1)+4y=50\\ 2x+1=3y\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c}5x+4y=55\\ 2x-3y=-1\end{array}\right\}$$

Despejamos y de la 1ª ecuación y de la 2ª, e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l}y=\frac{-5x+55}{4}\\ y=\frac{2x+1}{3}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{-5x+55}{4}=\frac{2x+1}{3} \rightarrow 3(-5x+55)=4(2x+1) \rightarrow$$

$\rightarrow -15x+165=8x+4 \rightarrow 161=23x \rightarrow x=\frac{161}{23}=7 \rightarrow y=\frac{2\cdot 7+1}{3}=\frac{15}{3}=5$ La solución es: $x=7,\ y=5$

b) $$\left.\begin{array}{l}\frac{6x-1}{7}=3(y-1)\\ 6y+x=3\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c}6x-1=21y-21\\ x+6y=3\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c}6x-21y=-20\\ x+6y=3\end{array}\right\}$$

Aplicamos el método de reducción en x multiplicando la segunda ecuación por -6:

$$\begin{array}{r}6x-21y=-20\\ \underline{-6x-36y=-18}\\ -57y=-38\end{array} \rightarrow y=\frac{38}{57} \rightarrow y=\frac{2}{3}$$

Luego: $x=3-6y=3-6\cdot\frac{2}{3}=3-4=-1 \quad \Rightarrow$ La solución es: $x=-1,\ y=\frac{2}{3}$

c) Despejamos x de la 2ª ecuación y sustituimos en la primera:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{2y+1}+x=2\\ x-4y=4\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}\sqrt{2y+1}+x=2\\ x=4y+4\end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{2y+1}+4y+4=2 \rightarrow \sqrt{2y+1}=-2-4y$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$2y+1=(-2-4y)^2 \rightarrow 2y+1=4+16y+16y^2 \rightarrow 16y^2+14y+3=0$

$$y=\frac{-14\pm\sqrt{196-192}}{32}=\frac{-14\pm\sqrt{4}}{32}=\frac{-14\pm 2}{32} \begin{cases}-\frac{16}{32}=-\frac{1}{2}\\ -\frac{12}{32}=-\frac{3}{8}\end{cases}$$

Así:

$y=-\frac{1}{2} \rightarrow x=4\left(-\frac{1}{2}\right)+4=-2+4=2$

$y=-\frac{3}{8} \rightarrow x=4\left(-\frac{3}{8}\right)+4=-\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2}$

Comprobamos si ambas soluciones son válidas sustituyendo en la 1ª ecuación:

$\sqrt{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1}+2=\sqrt{0}+2=2 \rightarrow x=2,\ y=-\frac{1}{2}$ es solución del sistema.

$\sqrt{2\left(-\frac{3}{8}\right)+1}+\frac{5}{2}=\sqrt{-\frac{3}{4}+1}+\frac{5}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3\neq 2 \rightarrow\rightarrow x=\frac{5}{2},\ y=-\frac{3}{8}$ no es solución del sistema.

d) Simplificamos cada una de las ecuaciones del sistema: $$\left.\begin{array}{l}\frac{x+3}{2}+\frac{y}{3}=2\\ \frac{y-1}{3}=3x-1\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c}3(x+3)+2y=12\\ y-1=3(3x-1)\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c}3x+2y=3\\ 9x-y=2\end{array}\right\}$$

Aplicamos el método de reducción en y, multiplicando por 2 la 2ª ecuación:

$$\begin{array}{l}3x+2y=3\\ \underline{18x-2y=4}\\ 21x\qquad=7\end{array} \rightarrow x=\frac{7}{21} \rightarrow x=\frac{1}{3} \rightarrow y=9\cdot\frac{1}{3}-2=3-2=1$$

La solución del sistema es: $x=\frac{1}{3},\ y=1$

e) Despejamos x de la 2ª ecuación y sustituimos en la primera:

$$\left.\begin{array}{r} 3xy-3=-5y \\ x=-y-5 \end{array}\right\} \to 3(-y-5)y-3=-5y \to -3y^2-15y-3=-5y \to\to 3y^2+10y+3=0 \to$$

$$\to y=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{-10\pm 8}{6}= \begin{cases} -\frac{2}{6}=-\frac{1}{3} \\ -\frac{18}{6}=-3 \end{cases}$$

Así: $y=-\frac{1}{3} \to x=\frac{1}{3}-5=-\frac{14}{3}$; $y=-3 \to x=3-5=-2$. Las soluciones del sistema son: $x_1=-\frac{14}{3};\ y_1=-\frac{1}{3}$; $x_2=-2;\ y_2=-3$

f) Método de sustitución $\to$ Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\left.\begin{array}{l} y=2x-12 \\ \frac{3}{2}x+5(2x-12)=4 \end{array}\right\} \to \frac{3}{2}x+10x-60=4$$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por 2: $3x+20x-120=8 \to 23x=128 \to x=\frac{128}{23}$

Se calcula el valor de y: $y=2\cdot\frac{128}{23}-12 \to y=\frac{256-276}{23} \to y=\frac{-20}{23}$

Comprobamos con la calculadora:

2 $\boxed{\times}$ 128 $\boxed{a^{b/c}}$ 23 $\boxed{-}$ 20 $\boxed{a^{b/c}}$ 3 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ 12

3 $\boxed{a^{b/c}}$ 2 $\boxed{\times}$ 128 $\boxed{a^{b/c}}$ 23 $\boxed{+}$ 5 $\boxed{\times}$ 20 $\boxed{a^{b/c}}$ 23 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ 4

g) Comenzamos por simplificar el sistema: $\begin{cases} \frac{x+2}{5}-y=-8 \\ \frac{y+1}{2}+\frac{x-1}{4}=2 \end{cases} \to \begin{cases} x+2-5y=-40 \\ 2(y+1)+x-1=8 \end{cases} \to \begin{cases} x-5y=-42 \\ 2y+x=7 \end{cases}$

Utilizaremos el método de reducción en x, multiplicando la primera ecuación por –1:

$$\begin{array}{r} -x+5y=42 \\ x+2y=\ \ 7 \\ \hline 7y=49 \end{array} \to y=7$$

Calculamos el valor de x: $x=7-2y \to x=7-2\cdot 7 \to x=7-14 \to x=-7$

La solución que cumple el sistema es: $x=-7,\ y=7$

Comprobamos dicha solución: $\begin{array}{l} \frac{-7+2}{5}-7=-1-7=-8 \\ \frac{7+1}{2}+\frac{-7-1}{4}=4-2=2 \end{array}$

h) Utilizaremos el método de reducción en y; para ello multiplicamos la 2ª ecuación por –3:

$$\begin{array}{l} -2x\ +5y=\frac{5}{2} \\ -12x-5y=-6 \\ \hline -14x\qquad =\frac{5}{2}-6 \end{array} \to -14x=\frac{-7}{2} \to x=\frac{1}{4}$$

Calculamos y sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación: $5y-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{2} \to 5y-\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \to 5y=3 \to y=\frac{3}{5}$

La solución buscada es: $x=\frac{1}{4},\ y=\frac{3}{5}$

Comprobamos la solución: $\begin{cases} 5\cdot\frac{3}{5}-2\cdot\frac{1}{4}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \\ 4\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}=1+1=2 \end{cases}$

i) Comenzamos por simplificar cada una de las ecuaciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+1}{3}-\frac{4y}{2}=8\\ \frac{2y-5}{6}+\frac{5x}{2}=3\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}2(x+1)-12y=48\\ 2y-5+15x=18\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}2x-12y=46\\ 15x+2y=23\end{array}\right\} \rightarrow\rightarrow \left.\begin{array}{r}x-6y=23\\ 15x+2y=23\end{array}\right\}$$

Despejamos x de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $x=23+6y$

$$15(23+6y)+2y=23 \rightarrow 345+90y+2y=23 \rightarrow\rightarrow 92y=-322 \rightarrow y=\frac{-322}{92} \rightarrow y=\frac{-7}{2}$$

Calculamos el valor de x: $x=23+6\left(\frac{-7}{2}\right) \rightarrow x=23-21 \rightarrow x=2$

Comprobamos con la calculadora:

2 $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{-}$ 12 $\boxed{x}$ 7 $\boxed{a^{b/c}}$ 2 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ 46

15 $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{x}$ 7 $\boxed{a^{b/c}}$ 2 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ 23

j) Comenzamos por simplificar la segunda ecuación transformándola en otra equivalente:

$$10x+3=5(5y-1) \rightarrow 10x+3=25y-5 \rightarrow 10x-25y=-8$$

El sistema es: $\begin{cases} y+2x=2\\ 10x-25y=-8\end{cases}$ Resolvemos por el método de sustitución: $y=2-2x$

$$10x-25(2-2x)=-8 \rightarrow 10x-50+50x=-8 \rightarrow 60x=42 \rightarrow x=\frac{42}{60} \rightarrow x=\frac{7}{10}$$

Luego: $y=2-2\cdot\frac{7}{10} \rightarrow y=2-\frac{7}{5} \rightarrow y=\frac{3}{5}$ La solución al sistema es: $x=\frac{7}{10},\ y=\frac{3}{5}$

Comprobamos la solución:

$$\frac{3}{5}+2\cdot\frac{7}{10}=\frac{3}{5}+\frac{14}{10}=\frac{20}{10}=2$$

$$\frac{10\cdot\frac{7}{10}+3}{5}-5\cdot\frac{3}{5}=\frac{10}{5}-3=\frac{-5}{5}=-1$$

k) Transformamos la segunda ecuación en una equivalente sin denominadores:

$$10x+8=6y+10 \rightarrow 10x-6y=2 \rightarrow 5x-3y=1$$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} y^2-x^2=5\\ 5x-3y=1\end{cases}$

Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $x=\frac{1+3y}{5}$

$$y^2-\frac{(1+3y)^2}{25}=5 \rightarrow 25y^2-(1+6y+9y^2)=125 \rightarrow 25y^2-1-6y-9y^2-125=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y^2-6y-126=0 \rightarrow 8y^2-3y-63=0 \rightarrow\rightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{9+2016}}{16}=\frac{3\pm\sqrt{2025}}{16}=\frac{3\pm 45}{16} \begin{cases} 3\\ \frac{-21}{8}\end{cases}$$

Si $y=3 \rightarrow x=\frac{1+9}{5}=2$

Si $y=\frac{-21}{8} \rightarrow x=\frac{1-\frac{63}{8}}{5}=\frac{\frac{-55}{8}}{5}=\frac{-11}{8}$

Las soluciones al sistema son: $\begin{array}{l} x_1=2 \rightarrow y_1=3\\ x_2=\frac{-11}{8} \rightarrow y_2=\frac{-21}{8}\end{array}$

l) Multiplicamos la segunda ecuación por –3 para aplicar el método de reducción:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ -3x^2 + 18y^2 = 15 \\ \hline 13y^2 = 13 \end{array} \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

Como $x^2 = 6y^2 - 5 \rightarrow$ si $y = 1 \rightarrow x^2 = 6 - 5 = 1 \rightarrow x = \pm 1$; si $y = -1 \rightarrow x^2 = 6 - 5 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

Las soluciones son: $x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 1$, $x_2 = 1 \rightarrow y_2 = -1$, $x_3 = -1 \rightarrow y_3 = 1$, $x_4 = -1 \rightarrow y_4 = -1$

m) Despejamos y de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$y = \frac{6}{x}$$

$$x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 13 \rightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} = 13 \rightarrow x^4 + 36 = 13x^2$$

Hacemos el cambio: $x^2 = z \rightarrow x^4 = z^2$

Así obtenemos: $z^2 - 13z + 36 = 0 \rightarrow z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$; $z = 9$, $z = 4$

Si $z = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$; Si $x = -3 \rightarrow y = -2$; Si $x = 3 \rightarrow y = 2$

Si $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$; Si $x = -2 \rightarrow y = -3$; Si $x = 2 \rightarrow y = 3$

n) El sistema inicial es equivalente a $\begin{cases} \sqrt{x-2} + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Aplicamos el método de igualación: $\left.\begin{array}{l} y = 3 - \sqrt{x-2} \\ y = 5 - x \end{array}\right\} \rightarrow 3 - \sqrt{x-2} = 5 - x \rightarrow x - 2 = \sqrt{x-2}$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la última igualdad: $(x-2)^2 = x - 2 \rightarrow (x-2)^2 - (x-2) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (x-2)(x-2-1) = 0 \rightarrow (x-2)(x-3) = 0$; $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$; $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

Si $x = 2 \rightarrow y = 3$

Si $x = 1 \rightarrow y = 2$

Comprobamos las soluciones sobre el sistema: $\begin{cases} \sqrt{x-2} + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{2-2} + 3 = 3 \\ 2 + 3 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{3-2} + 2 = 1 + 2 = 3 \\ 2 + 3 = 5 \end{cases}$

Luego ambas soluciones son válidas: $x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 3$, $x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 2$

ñ) Despejamos y de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$y = 1 + x$$

$$x(1 + x) + 2 = 4x \rightarrow x + x^2 + 2 - 4x = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$; $2 \rightarrow y = 3$; $1 \rightarrow y = 2$ $\Rightarrow$ Las soluciones son: $x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 3$, $x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 2$

o) Empezamos simplificando la primera ecuación multiplicándola por xy:: $6x^2+6y^2=13xy$

Como $xy=6$:$\Rightarrow$ $6x^2+6y^2=13\cdot 6 \quad\rightarrow\quad x^2+y^2=13$

Por tanto, el sistema a resolver es: $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$

Despejamos y en la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $y=\dfrac{6}{x}$; $x^2+\dfrac{36}{x^2}=13 \quad\rightarrow\quad x^4-13x^2+36=0$

Ecuación bicuadrada: $x^2=\dfrac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\dfrac{13\pm 5}{2}$ $\begin{cases} 9 \rightarrow x=\pm 3 \\ 4 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$

Si $x=3 \rightarrow y=2$
Si $x=2 \rightarrow y=3$
Si $x=-3 \rightarrow y=-2$
Si $x=-2 \rightarrow y=-3$

Comprobemos si las dos primeras soluciones son, o no, válidas: $\begin{cases} \dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{6} \\ 3\cdot 2=6 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{4+9}{6}=\dfrac{13}{6} \\ 3\cdot 2=6 \end{cases}$

Análogamente se cumpliría para las otras dos. Luego, las soluciones son: $\begin{array}{l} x_1=3 \rightarrow y_1=2 \\ x_2=2 \rightarrow y_2=3 \\ x_3=-3 \rightarrow y_3=-2 \\ x_4=-2 \rightarrow y_4=-3 \end{array}$

PROBLEMAS

<u>EJERCICIO 4</u> : Un grupo de amigos alquilan un piso por 600 € al mes para vivir en él. Con el fin de ahorrar en los gastos del piso, deciden que dos personas más compartan con ellos el piso; de esta manera pagarían 80 € menos. Calcula cuántas personas van a vivir inicialmente en el piso y la cantidad que pagaría cada una por el alquiler.

Solución:

$x \rightarrow$ nº de personas que alquilan el piso
$y \rightarrow$ precio que paga cada una por el alquiler

El sistema a resolver será: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{600}{x}=y \\ \dfrac{600}{x-2}=y+80 \end{array}\right\}$ $\rightarrow$ Aplicamos el método de sustitción: $\dfrac{600}{x-2}=\dfrac{600}{x}+80 \rightarrow \dfrac{600}{x-2}=\dfrac{600+80x}{x} \rightarrow$

$\rightarrow \quad 600x = 600(x-2)+80x\,(x-2) \quad\rightarrow\rightarrow\quad 600x=600x-1200+80x^2-160x \quad\rightarrow$

$\rightarrow \quad 80x^2-160x-1\,200=0 \quad\rightarrow\quad x^2-2x-15=0 \quad\rightarrow\rightarrow\quad x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\dfrac{2\pm 8}{2}$ $\begin{cases} 5 \\ -3 \rightarrow \text{NO SIRVE} \end{cases}$

Luego el número de personas que alquilan el piso es 5, y cada una paga mensualmente $\dfrac{600}{5}=120$ €.

<u>EJERCICIO 5</u> : Hace cinco años, la edad de un padre era seis veces superior a la del hijo; sin embargo, en la actualidad solo es 5 años más que el triple de la edad del hijo. Calcula las edades actuales de ambos.

Solución:

EDAD DEL	HACE 5 AÑOS	HOY
PADRE	$6x$	$6x+5$
HIJO	x	$x+5$

En la actualidad: edad del padre = 3 · edad hijo + 5 $\rightarrow$
$\rightarrow \quad 6x+5=3(x+5)+5 \quad\rightarrow\quad 6x+5=3x+15+5 \quad\rightarrow\quad 3x=15 \quad\rightarrow\quad x=5$
La edad actual del padre es de 35 años, y la del hijo, 10 años.

<u>EJERCICIO 6</u> : Halla dos números que sumen 14 y tales que la diferencia de sus cuadrados sea 28.

Solución: Llamamos x e y a los dos números buscados y planteamos un sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=14 \\ x^2-y^2=28 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=14-y \\ x^2-y^2=28 \end{array}\right\} \rightarrow (14-y)^2-y^2=28 \rightarrow 196-28y+y^2-y^2=28 \rightarrow$$

$\rightarrow\ 196-28=28y \ \rightarrow\ 168=28y \ \rightarrow\ y=\dfrac{168}{28}=6 \ \rightarrow\ x=14-6=8$ Los números buscados son 8 y 6.

<u>EJERCICIO 7</u> : Antonio gastó la tercera parte del dinero de una herencia en un televisor nuevo, $\dfrac{3}{5}$ del resto en reformar la casa, el 10 de la cantidad inicial en ropa y el resto, 260 €, los ahorró. ¿Cuánto dinero heredó?

Solución: $x=$ "dinero heredado" $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \text{Televisor} \rightarrow \dfrac{x}{3} \rightarrow \text{le quedan } \dfrac{2}{3}x \text{ por gastar} \\ \text{Casa} \rightarrow \dfrac{3}{5} \text{ de } \dfrac{2}{3}x=\dfrac{6}{15}x=\dfrac{2}{5}x \\ \text{Ropa} \rightarrow 10\% \text{ de } x=\dfrac{x}{10} \\ \text{Ahorro} \rightarrow 260\ € \end{array}$$

La ecuación que resuelve el problema será: $\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{5}x+\dfrac{x}{10}+260=x$

Multiplicamos ambos miembros por 30: $10x+12x+3x+7800=30x \ \rightarrow\ 7800=5x \ \rightarrow$

$\rightarrow\ x=\dfrac{7800}{5} \ \rightarrow\ x=1560$ € es la cantidad heredada.

<u>EJERCICIO 8</u> : El área de un rombo es de 240 cm^2. Calcula la longitud de las diagonales sabiendo que suman 46 cm.

Solución: Llamamos x y $46-x$ a las longitudes de ambas diagonales.

$$A_{ROMBO}=\frac{\text{Diagonal mayor}\cdot\text{Diagonal menor}}{2}$$

Así: $240=\dfrac{x(46-x)}{2} \ \rightarrow\ 480=46x-x^2 \ \rightarrow\ x^2-46x+480=0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ x=\frac{46\pm\sqrt{2116-1920}}{2}=\frac{46\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{46\pm 14}{2}\ \begin{array}{l} \nearrow 30 \\ \searrow 16 \end{array}$$

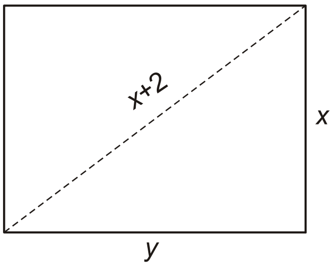
Si $x=30 \ \rightarrow\ 46-30=16$

Si $x=16 \ \rightarrow\ 46-16=30$

Luego, la longitud de las diagonales es de 16 cm y 30 cm.

<u>EJERCICIO 9</u> : La diagonal de un rectángulo mide 2 cm más que uno de los lados. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que su perímetro es de 14 cm.

Solución:



$$\begin{cases} 2x+2y=14 \quad \to \quad x+y=7 \\ (x+2)^2 = x^2+y^2 \end{cases}$$

Despejamos y en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$y = 7-x$

$$(x+2)^2 = x^2+(7-x)^2 \quad \to \quad x^2+4x+4 = x^2+49+x^2-14x \quad \to$$

$$\to \quad x^2-14x-4x+49-4=0 \quad \to \quad x^2-18x+45=0 \quad \to\to \quad x=\frac{18\pm\sqrt{324-180}}{2}=\frac{18\pm12}{2} \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow 15 \end{array}$$

Calculamos el valor de y: $\begin{array}{l} \text{Si } x=3 \quad \to \quad y=7-3=4 \\ \text{Si } x=15 \quad \to \quad y=7-15=-8 \quad \to \quad \text{no sirve } (\text{una longitud no puede ser negativa}) \end{array}$

Luego las dimensiones del rectángulo son 3 cm y 4 cm.

<u>EJERCICIO 10</u> : Un grupo de estudiantes organiza una excursión para lo cuál alquilan un autocar cuyo precio es de 540 €. Al salir, aparecen 6 estudiantes más y esto hace que cada uno de los anteriores pague 3 € menos. Calcula el número de estudiantes que fueron a la excursión y que cantidad pagó cada uno.

Solución:

x = "nº de estudiantes que van a la excursión"

y = "precio que paga cada estudiante"

El sistema a resolver será: $\begin{cases} \dfrac{540}{x}=y \\ \dfrac{540}{x-6}=y+3 \end{cases} \quad \to \quad$ Aplicamos el método de sustitución:

$$\frac{540}{x-6}=\frac{540}{x}+3 \quad \to \quad 540x = 540(x-6)+3x(x-6) \quad \to \quad 540x = 540x-3240+3x^2-18x \quad \to$$

$$\to \quad 3x^2-18x-3240=0 \quad \to \quad x^2-6x-1080=0 \quad \to\to \quad x=\frac{6\pm\sqrt{36+4320}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4356}}{2}=\frac{6\pm66}{2} \begin{array}{l} \nearrow 36 \\ \searrow -30 \ \text{ no sirve} \end{array}$$

El precio por alumno será: $y=\dfrac{540}{36}=15$

Luego, van 36 estudiantes a la excursión y cada uno paga 15 €.

<u>EJERCICIO 11</u> : Un bodeguero quiere mezclar vino de calidad superior cuyo precio es de 6 €/*l* con otro más corriente de 2 €/*l*. Dispone en total de 315 *l*. Calcula el número de litros de cada clase para que la mezcla cueste 4,4 €/*l*.

Solución:

x = litros del vino que cuesta 6 €/*l*,

y = litros del vino que cuesta 2 €/*l*,

El sistema a resolver será: $\left.\begin{array}{r} x+y=315 \\ 6x+2y=315\cdot 4{,}4 \end{array}\right\} \quad \to \quad \left.\begin{array}{r} x+y=315 \\ 6x+2y=1386 \end{array}\right\} \quad \to \quad \begin{array}{r} -2x-2y=-630 \\ \underline{6x+2y=1386} \\ 4x \quad\quad =756 \end{array} \quad \to x=189$

Luego, $y = 315 - 189 = 126$. Ha de mezclar 189 *l* de vino bueno con 126 *l* del más corriente.

<u>EJERCICIO 12</u> : Pablo tiene unos ingresos anuales de 24 000 €. Parte de ese dinero está en una cuenta en la que le dan el 4% anual; el resto lo gasta. Calcula la cantidad de dinero gastado y ahorrado, sabiendo que al final del año recibe 360 € de intereses.

Solución:

x = "Dinero gastado"

y = "Dinero ahorrado"

$$\begin{cases} x+y=24000 \\ 4\% \text{ de } y=360 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x+y=24000 \\ \dfrac{4y}{100}=360 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x=24000-y-15000 \\ y=\dfrac{36000}{4}=9000 \end{cases}$$

Gasta 15 000 € y ahorra 9 000 €.

EJERCICIO 13 : Halla las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que tiene 48 cm² de área y que su diagonal mide 10 cm.

Solución: Llamamos x a la base e y a la altura del rectángulo. Por tanto, tenemos que: $\begin{cases} x\cdot y = 48 \\ x^2+y^2 = 10^2 \end{cases}$

Despejamos y en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$y = \frac{48}{x}$$

$$x^2+\left(\frac{48}{x}\right)^2 = 100 \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{2304}{x^2} = 100 \quad \rightarrow \quad x^4+2304 = 100x^2 \quad \rightarrow \quad x^4-100x^2+2304 = 0$$

Hacemos el cambio: $x^2 = z \quad \rightarrow \quad x^4 = z^2$

Así obtenemos: $z^2-100z+2304 = 0 \quad \rightarrow \quad z = \frac{100\pm\sqrt{10000-9216}}{2} = \frac{100\pm\sqrt{784}}{2} = \frac{100\pm 28}{2} \begin{cases} \frac{128}{2} = 64 \\ \frac{72}{2} = 36 \end{cases}$

Si $z = 64 \quad \rightarrow \quad x^2 = 64 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{64} = \pm 8 \quad \rightarrow \quad x = 8 \quad \rightarrow \quad y = 6$

Si $z = 36 \quad \rightarrow \quad x^2 = 36 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{36} = \pm 6 \quad \rightarrow \quad x = 6 \quad \rightarrow \quad y = 8$

(Observa que las soluciones negativas no son válidas, pues x representa una longitud).
El rectángulo es, por tanto, de 8 cm x 6 cm.

EJERCICIO 14 : Un rectángulo tiene 60 cm² de área. Su perímetro es de 34 cm. Halla sus dimesiones.

Solución: Llamamos x a la base del rectángulo e y a su altura.

Por tanto, tenemos que: $\begin{cases} x\cdot y = 60 \\ 2x+2y = 34 \quad \rightarrow \quad x+y = 17 \end{cases}$

Despejamos y en la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$y = 17-x$$

$$x\cdot(17-x) = 60 \quad \rightarrow \quad 17x - x^2 = 60 \quad \rightarrow \quad x^2 - 17x + 60 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{17\pm\sqrt{289-240}}{2} = \frac{17\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{17\pm 7}{2} \begin{cases} x = 12 \quad \rightarrow \quad y = 5 \\ x = 5 \quad \rightarrow \quad y = 12 \end{cases}$$

El rectángulo es, por tanto, de 12 cm x 5 cm.

EJERCICIO 15 : El producto de dos números es 28 y la suma de sus cuadrados es 65. ¿De qué números se trata?

Solución: Llamamos x e y a los números que buscamos. Por tanto, tenemos que: $\begin{cases} x\cdot y = 28 \\ x^2+y^2 = 65 \end{cases}$

Despejamos y en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$y = \frac{28}{x}$$

$$x^2+\left(\frac{28}{x}\right)^2 = 65 \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{784}{x^2} = 65 \quad \rightarrow \quad x^4+784 = 65x^2$$

Hacemos el cambio: $x^2 = z \quad \rightarrow \quad x^4 = z^2$

Así obtenemos: $z^2 - 65z + 784 = 0 \quad \rightarrow\rightarrow \quad z = \frac{65\pm\sqrt{4225-3136}}{2} = \frac{65\pm\sqrt{1089}}{2} = \frac{65\pm 33}{2} \begin{cases} z = 49 \\ z = 16 \end{cases}$

Si $z = 49 \quad \rightarrow \quad x^2 = 49 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{49} = \pm 7 \begin{cases} \text{Si } x = -7 \quad \rightarrow \quad y = -4 \\ \text{Si } x = 7 \quad \rightarrow \quad y = 4 \end{cases}$

Si $z = 16 \quad \rightarrow \quad x^2 = 16 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \begin{cases} \text{Si } x = -4 \quad \rightarrow \quad y = -7 \\ \text{Si } x = 4 \quad \rightarrow \quad y = 7 \end{cases}$

INECUACIONES

<u>EJERCICIO 16</u> : Resuelve las siguientes inecuaciones y escribe la solución en forma de intervalo:

a) $5x+4<-6$ **b)** $\frac{5x-1}{8}+2x\geq x-\frac{x+1}{8}$ **c)** $2x-\frac{3x+1}{3}\geq 2(3x-2)$ **d)** $\frac{4}{3}+2x\leq 3$

e) $\frac{3(x+1)}{2}>2x$ **f)** $(5-x)(x+3)>0$ **g)** $\frac{x+7}{3-x}\geq 0$ **h)** $2x+5\leq x^2-2x-16$

i) $\frac{x+2}{x^2}\leq 0$ **j)** $x^2+3x-6>8-2x$ **k)** $x^2+3x-4\geq 0$ **l)** $x^2-3x>0$

m) $(x-2)(x+1)\leq 0$ **n)** $\frac{x+1}{x-3}>0$ **ñ)** $x(x+4)\leq 0$

Solución:

a) $5x+4<-6 \;\rightarrow\; 5x<-6-4 \;\rightarrow\; 5x<-10 \;\rightarrow\; x<-2$ La solución en forma de intervalo será: $(-\infty, -2)$

b) Multiplicamos por 8 la inecuación y agrupamos los términos como en las ecuaciones:

$5x-1+16x\geq 8x-x-1 \;\rightarrow\; 21x-1\geq 7x-1 \;\rightarrow\; 14x\geq 0 \;\rightarrow\; x\geq 0$ La solución buscada es $[0, +\infty)$.

c) Multiplicamos la inecuación por 3, quitamos paréntesis y agrupamos los términos como en las ecuaciones:

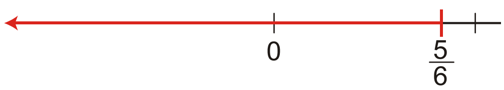
$6x-3x-1\geq 6(3x-2) \;\rightarrow\; 6x-3x-1\geq 18x-12 \;\rightarrow\; -1+12\geq 18x-3x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 11\geq 15x \;\rightarrow\; x\geq\frac{11}{15}$

La solución en forma de intervalo es $\left(-\infty, \frac{11}{15}\right]$.

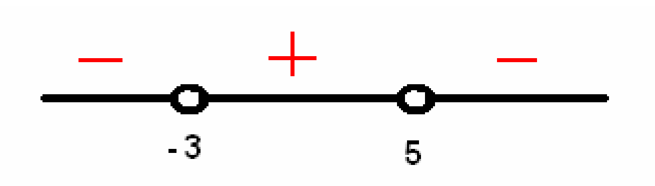
d) Multiplicamos todo por 3 para quitar el denominador: $4+6x\leq 9 \;\rightarrow\; 6x\leq 5 \;\rightarrow\; x\leq\frac{5}{6}$

La solución en forma de intervalo es $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right]$.



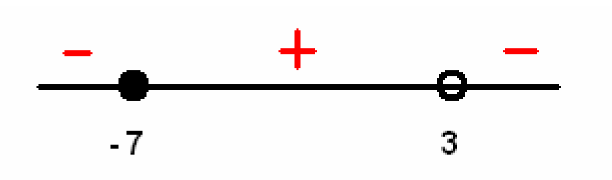
e) $3x + 3 > 4x \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow$ La solución es el intervalo $(-\infty,3)$

f) El factor $5-x=0$ si $x=5$, y el factor $x+3=0$, si $x=-3$.



La solución será el intervalo $(-3, 5)$

g) Igualamos, por separado el numerador y el denominador a cero:
El numerador: $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$ (Se coge porque es $\geq$)
El denominador $3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$ (El denominador nunca se coge)
Estudiamos los signos

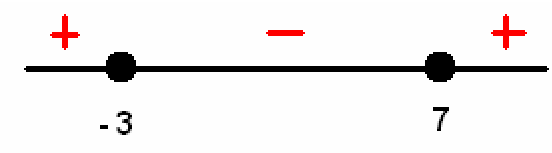


Solución, $[-7, 3)$.

h) Reducimos a una ecuación de segundo grado y calculamos sus soluciones:

$0\leq x^2-2x-16-2x-5 \;\rightarrow\; x^2-4x-21\geq 0$

$x^2-4x-21=0 \;\rightarrow\; x=\frac{4\pm\sqrt{16+84}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{4\pm 10}{2}$ $\begin{matrix} \nearrow 7 \\ \searrow -3 \end{matrix}$

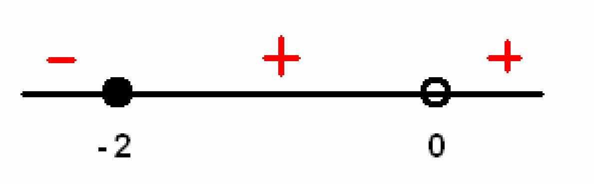


Luego la solución a la inecuación es $(-\infty, -3]\ \text{U}\ [7, +\infty)$.

i) Igualamos, por separado, numerador y denominador a cero:

Numerador: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ (Lo pintamos)

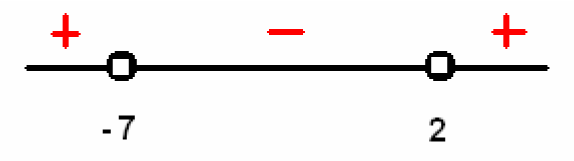
Denominador: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (No lo pintamos)



Por tanto, la solución es $(-\infty, -2]$.

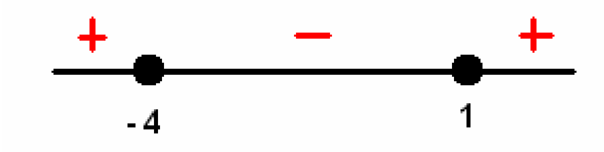
j) $x^2 + 3x - 6 > 8 - 2x \rightarrow x^2 + 5x - 14 > 0$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 5x - 14 = 0$: $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \dfrac{-5 \pm 9}{2} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow -7 \end{array}$



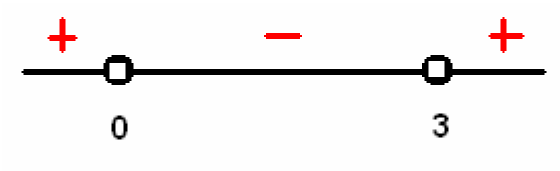
La solución será: $(-\infty,-7) \cup (2,+\infty)$

k) Resolvemos la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$: $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \nearrow x = 1 \\ \searrow x = -4 \end{array}$



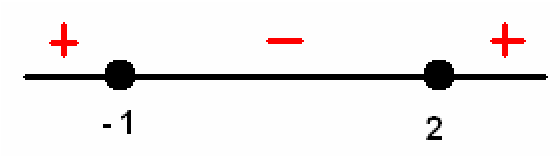
La solución de la inecuación es $(-\infty, -4] \cup (1, +\infty)$

l) Hallamos las raíces de $x^2 - 3x$ resolviendo la ecuación: $x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0 \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \searrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{array}$



La solución de la inecuación es $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

m) Hallamos las raíces de la ecuación: $(x-2)(x+1) = 0 \begin{array}{l} \nearrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ \searrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{array}$

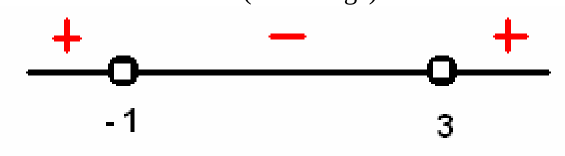


La solución de la inecuación es $[-1, 2]$.

n) Hallamos las raíces del numerador y del denominador:

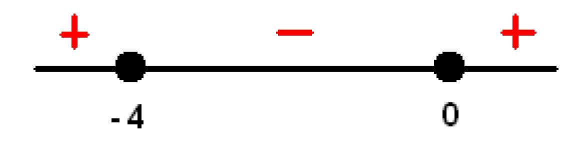
$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$ (No se coge)

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$ (No se coge)



La solución de la inecuación es $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

ñ) Hallamos las raíces de $x(x+4)$ resolviendo la ecuación: $x(x+4)=0$ $\nearrow x=0$, $\searrow x+4=0 \rightarrow x=-4$



La solución de la inecuación es $[-4, 0]$.

SISTEMAS INECUACIONES

<u>EJERCICIO 18</u> : Halla el conjunto de soluciones de los sistemas de inecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x-1\leq 3 \\ 3x+6\geq 2x \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} 3x-7>0 \\ 8-5x\geq 0 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{l} 5-2x<0 \\ 7x+1>0 \end{array}\right\}$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 2x-6\geq 4 \\ x-7<0 \end{array}\right.$ **e)** $\left.\begin{array}{l} x+2>0 \\ 2x+3\geq 0 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Resolvemos cada inecuación por separado; la solución será el conjunto de puntos que cumplan ambas inecuaciones.

$2x-1\leq 3 \;\rightarrow\; 2x\leq 4 \;\rightarrow\; x\leq 2$

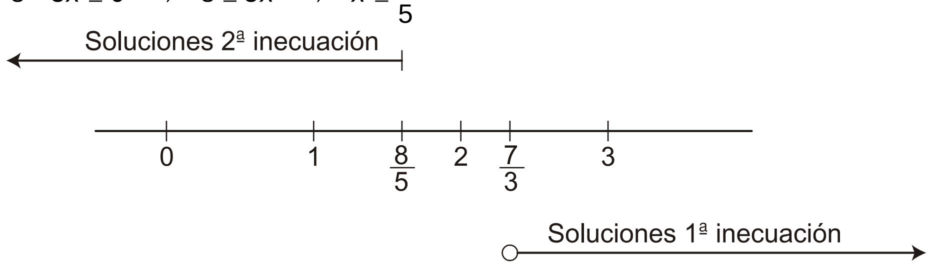
$3x+6\geq 2x \;\rightarrow\; 3x-2x\geq -6 \;\rightarrow\; x\geq -6$

La solución al sistema es el intervalo $[-6, 2]$.

b) Resolvemos independientemente cada inecuación y buscamos las soluciones comunes:

$3x-7>0 \;\rightarrow\; 3x>7 \;\rightarrow\; x>\frac{7}{3}$

$8-5x\geq 0 \;\rightarrow\; 8\geq 5x \;\rightarrow\; x\leq\frac{8}{5}$

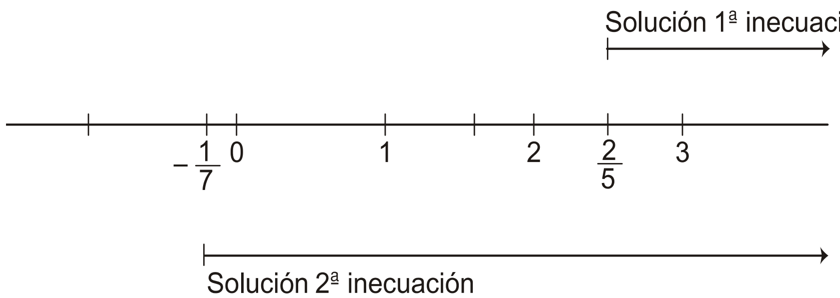


El sistema no tiene solución, puesto que no hay valores que cumplan ambas inecuaciones a la vez.

c) Resolvemos cada inecuación y buscamos las soluciones comunes:

$5-2x<0 \;\rightarrow\; 5<2x \;\rightarrow\; x>\frac{5}{2}$

$7x+1>0 \;\rightarrow\; 7x>-1 \;\rightarrow\; x>\frac{-1}{7}$

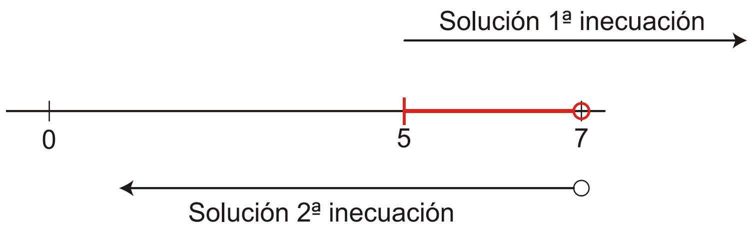


La solución del sistema es $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

d) Resolvemos cada inecuación por separado y buscamos la solución que sea común a ambas:

$2x - 6 \geq 4 \quad \rightarrow \quad 2x \geq 10 \quad \rightarrow \quad x \geq 5$

$x - 7 < 0 \quad \rightarrow \quad x < 7$

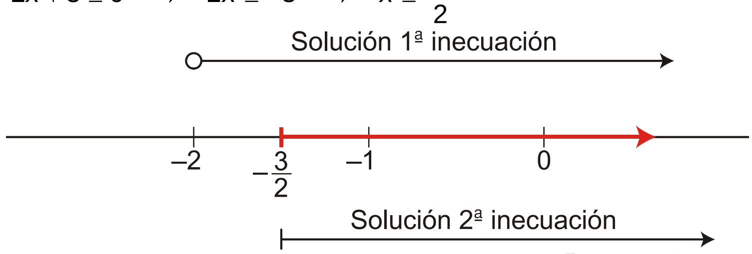


La solución del sistema es $[5, 7)$.

e) Resolvemos cada inecuación por separado y buscamos el conjunto de puntos que cumplen ambas a la vez:

$x + 2 > 0 \quad \rightarrow \quad x > -2$

$2x + 3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 2x \geq -3 \quad \rightarrow \quad x \geq \frac{-3}{2}$



La solución común a ambas inecuaciones es $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$.