RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Resolver un triángulo consiste en determinar la longitud de sus tres lados y la amplitud de sus tres ángulos.
Además del teorema de Pitágoras y las conocidas razones trigonométricas de un triángulo rectángulo tenemos:

Teorema del seno

Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Teorema del coseno

El cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el duplo del producto de estos ángulos por el coseno del ángulo comprendido.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

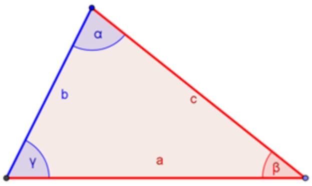
(nota: los cosenos de ángulos suplementarios son opuestos)

- ✓ En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- ✓ Si un triángulo tiene dos lados iguales, sus ángulos opuestos son también iguales.
- ✓ En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.

CASOS DE RESOLUCIÓN

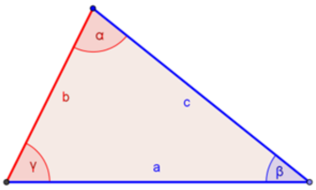
Caso I: conocemos *un lado y dos ángulos*

- El ángulo restando a 180º la suma de los otros dos
- Los lados desconocidos por el teorema del seno



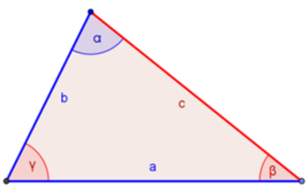
Caso II: conocemos *dos lados y el ángulo comprendido*

- El lado por el teorema del coseno
- El ángulo menor por el teorema del seno
- El ángulo que falta restando a 180º la suma de los otros dos



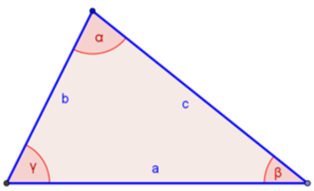
Caso III: conocemos *dos lados y el ángulo opuesto a uno*

- Calculamos el ángulo β utilizando el teorema del seno
- El ángulo que falta restando a 180º la suma de los otros dos
- El lado desconocido por el teorema del seno

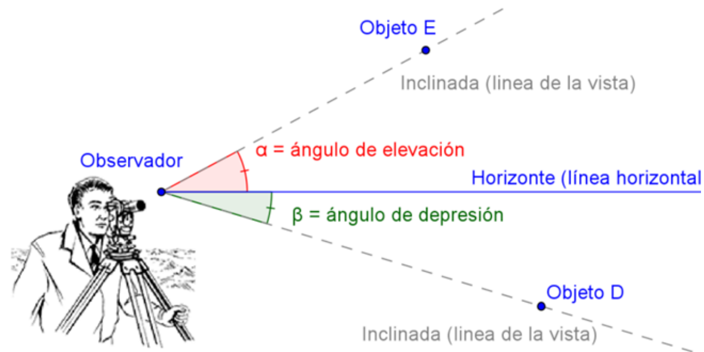


Caso IV: conocemos *los tres lados*

- Un ángulo por el teorema del coseno
- Otro ángulo utilizando el teorema del seno o el teorema del coseno
- El ángulo que falta restando a 180º la suma de los otros dos



APLICACIONES



TEODOLITO: instrumento de medición mecánico-óptico que sirve para medir ángulos verticales y horizontales.

Con otras herramientas auxiliares podemos medir distancias y desniveles.

TÉCNICA DE LA DOBLE OBSERVACIÓN

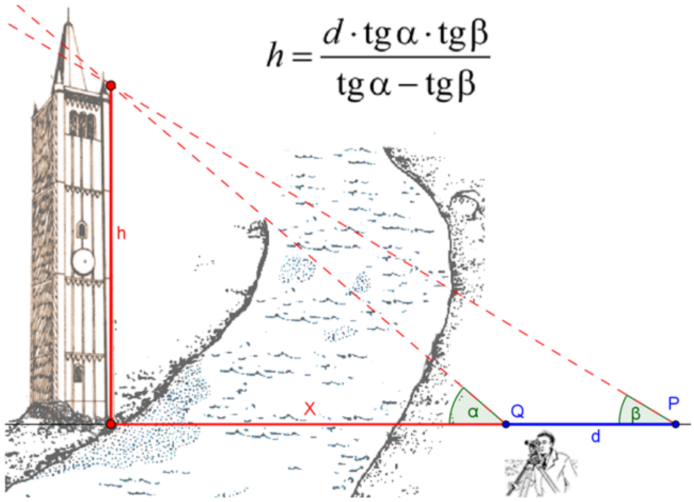
Se utiliza para calcular alturas de objetos de pie inaccesible como montañas, faros, torres eléctricas, altura de globos, objetos en la orilla opuesta de un rio, etc…

Nos situamos en el punto “P” (en la horizontal del pie inaccesible) y con el teodolito medimos el ángulo “β”. Avanzamos una distancia conocida “d” hasta el punto “Q” y medimos el ángulo “α”. Con estos datos podemos averiguar la altura del objeto sin necesidad de llegar hasta el pie de éste.

En los dos casos siguientes suponemos que α > β

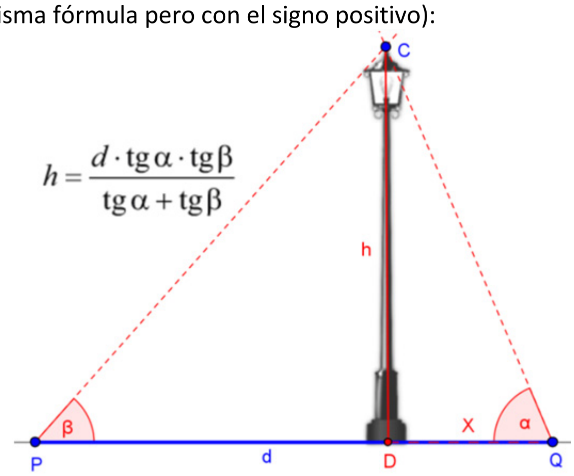
- Realizando las dos observaciones desde el mismo lado:

$$h=\frac{d\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$$



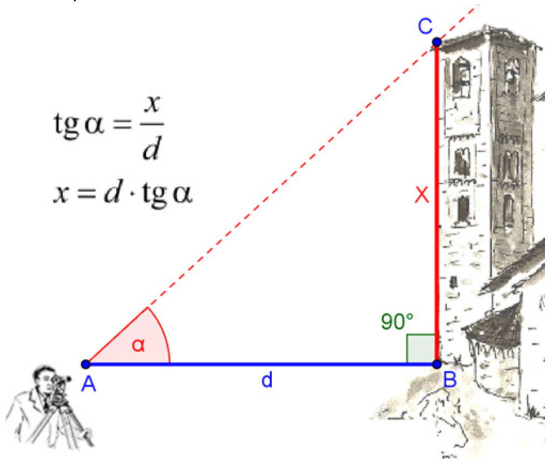
- Realizando las observaciones desde lados opuestos (es la misma fórmula pero con el signo positivo):

$$h=\frac{d\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$$



TÉCNICA DE LA OBSERVACIÓN DIRECTA

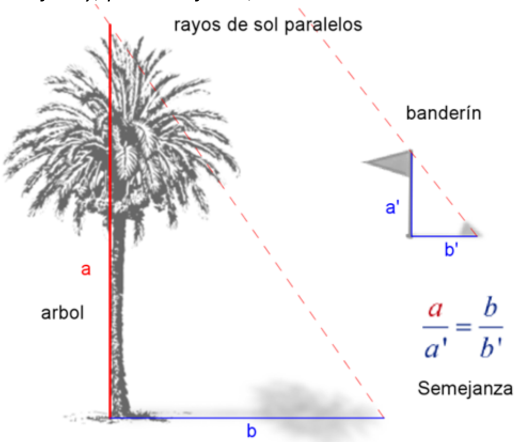
Se utiliza para calcular alturas de objetos de pie accesible como edificios, farolas, árboles, postes de luz y también para calcular distancias entre puntos, uno de ellos inaccesible como anchura de ríos, distancia de la costa a un barco, etc…



La distancia "d" se mide sobre el terreno, porque podemos llegar al pie (punto B). Para saber la amplitud del ángulo "α" utilizamos el teodolito.

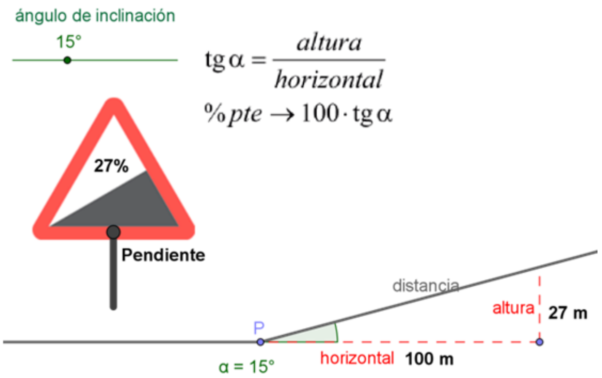
CÁLCULO DE LA ALTURA USANDO LA SOMBRA

Podemos averiguar la altura de un objeto midiendo la sombra que proyecta, por semejanza de triángulos. Colocamos un banderín o palo, de altura conocida, y medimos su sombra. A continuación medimos la sombra del objeto y, por semejanza, calculamos su altura.



PENDIENTE DE UNA CARRETERA

Esta señal de tráfico corresponde a la pendiente de una carretera y nos indica que de cada 100 m que recorremos sobre la horizontal subimos (bajamos) 27 m. Matemáticamente esta razón es la tangente del ángulo que forma la carretera con la horizontal. Como es más fácil saber la distancia recorrida, a veces, se usa el seno del ángulo en lugar de la tangente.

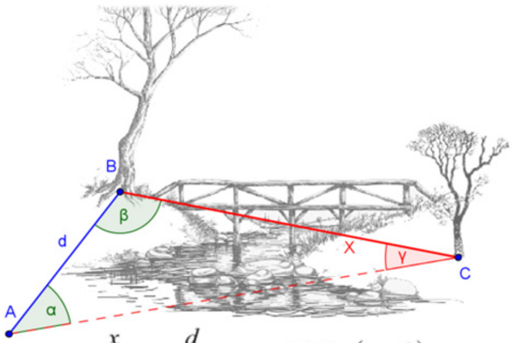


Si empleamos la distancia recorrida para calcular el ángulo, por ser más fácil de averiguar, debemos utilizar el seno, cometiendo un pequeño error por exceso (apreciable a partir de α > 15º).

En las técnicas anteriores utilizamos triángulos rectángulos, si ahora hacemos uso de los casos de resolución de triángulos cualesquiera podemos resolver estas situaciones:

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS, UNO DE ELLOS INACCESIBLE

La distancia "d" se mide directamente sobre el terreno y con el teodolito determinamos las amplitudes de los ángulos α y β.
*Este problema corresponde al **caso I** de resolución de triángulos.*
La distancia "x" la calculamos aplicando el teorema del seno



$$\frac{x}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{d}{\operatorname{sen}\gamma} \quad ; \quad \gamma = 180^o - (\alpha + \beta)$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS ACCESIBLES SEPARADOS POR UN OBSTÁCULO

Con un teodolito situado en C determinamos la amplitud del ángulo α, y como los puntos A y B son accesibles medimos estas distancias.
*Este problema corresponde al **caso II** de resolución de triángulos.*
La distancia "x" la calculamos aplicando el teorema del coseno.

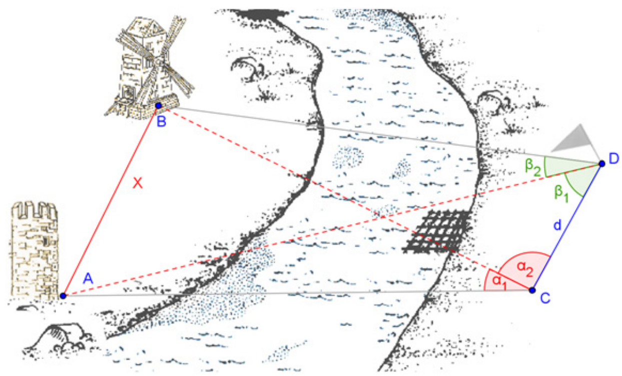
$$x^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos\alpha$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS INACCESIBLES

Medimos directamente la distancia "d".
Con el teodolito colocado en C medimos los ángulos α_1 y α_2 .
Con el teodolito colocado en D medimos los ángulos β_1 y β_2 .

- En el triángulo $\triangle ACD$ se calcula $\overline{AD}$
- En el triángulo $\triangle BCD$ se calcula $\overline{BD}$

Por tanto, en el triángulo $\triangle ADB$ ahora se conocen dos lados y el ángulo comprendido (**caso II** de resolución de triángulos) pudiendo calcular la distancia "x" aplicando el teorema del coseno.



$$x^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} \cdot \cos\beta_2$$