TRIGONOMETRÍA

1. UNIDADES PARA MEDIR ÁNGULOS

Un ***ángulo*** es una porción de plano limitada por dos semirrectas que tienen un origen común. Las unidades que más frecuentemente se utilizan para medir ángulos son el *grado* y el *radián*.

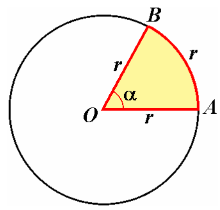
El ***grado sexagesimal*** es la medida de cada uno de los ángulos que resultan al dividir la circunferencia en 360 partes iguales.

El grado tiene dos submúltiplos:

- el ***minuto,*** que equivale a la sexagésima parte del grado (1º = 60’), y
- el ***segundo,*** que equivale a la sexagésima parte del minuto (1’ = 60”).

Por tanto: **1º = 60’ = 3.600”**

El ***radián*** es el ángulo plano que, teniendo su vértice en el centro de un círculo, intercepta sobre la circunferencia de ese círculo un arco de longitud igual al radio. Es decir, un radián es la medida de un ángulo central cuyo arco mide un radio. Su símbolo es **rad.**



Si α mide un radián, el arco *AB* mide un radio.

El radián es **independiente** del radio de la circunferencia:

Si el radio de la circunferencia es 2 cm, el arco correspondiente al radián mide 2 cm.

Si el radio de otra circunferencia concéntrica es 4 cm, el arco correspondiente al radián medirá 4 cm.

Los sectores son semejantes y, por tanto, el ángulo central igual.

El ángulo completo, 360º, abarca toda la circunferencia, luego su media es 2π radianes, que es precisamente la medida de la circunferencia cuando se toma como unidad el radio. Por tanto, para pasar de grados a radianes, o al revés, basta con recordar que **360 grados** = **2**p **radianes,** y con una sencilla regla de tres es suficiente:

$$\frac{\mathbf{360º}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathbf{2}\mathrm{p}}{\mathrm{a}}$$ con ***n*** amplitud en grados y a en radianes

<u>Ejemplo.-</u> Expresa en radianes 135º: $\frac{360º}{135º} = \frac{2\pi}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi \cdot 135º}{360º} = \frac{3\pi}{4}$ rad

<u>Ejemplo.-</u> Expresa en grados $\frac{\pi}{3}$ radianes: $\frac{360º}{n} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow n = \frac{360º \cdot \frac{\pi}{3}}{2\pi} = 60º$

EJERCICIOS

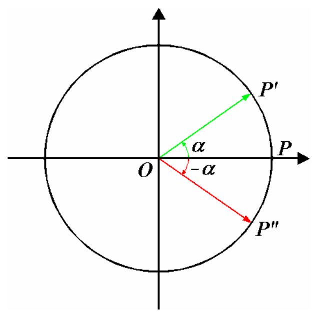
1. Dados los ángulos $\alpha = 30º\ 56'\ 50''$ y $\beta = 20º\ 58'\ 55''$, calcula $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, 3α y $\alpha/3$.
2. Expresa en radianes los siguientes ángulos medidos en grados.
   a) 0º, 30º, 45º, 60º b) 90º, 120º, 135º, 150º c) 180º, 210º, 225º, 240º d) 270º, 300º, 315, 330º
3. Expresa en grados los siguientes radianes.
   a) $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad, 2π rad b) $\frac{3\pi}{4}$ rad, $\frac{5\pi}{3}$ rad, $\frac{9\pi}{10}$ rad, $\frac{4\pi}{9}$ rad

2. AMPLIACIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO

La interpretación geométrica de ángulo como región plana sólo permite expresar ángulos menores o iguales a 360º, por lo que no es suficiente para analizar y resolver ciertos problemas reales. Por ello vamos a introducir la idea de ángulo como un giro

Sentido de giro: ángulos positivos y negativos

El punto P puede girar en sentido contrario a las agujas del reloj, se conviene que describe ángulos positivos, por ejemplo, al pasar el punto P a P' describe el ángulo α. Si el punto P gira en el mismo sentido que las agujas del reloj, describe ángulos negativos, por ejemplo, al pasar el punto P a P'' describe el ángulo $-\alpha$.

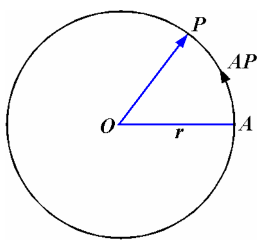


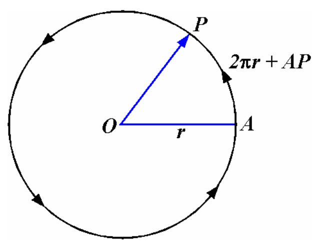
- Si el sentido de giro es **contrario** al de las agujas del reloj, se dice que los ángulos son **positivos** y su medida es un **número positivo.**
- Si el sentido de giro es el **mismo** que el de las agujas del reloj, a los ángulos se les pone el **signo menos** delante para distinguirlos de los positivos, y su medida es un **número negativo.**

Ángulo de giro

Supongamos que un móvil se desplaza, con sentido positivo, en una circunferencia de radio r partiendo de A.

- Si el móvil se detiene en P, el arco recorrido es AP.
- Si el móvil no se detiene en P, sigue girando, pasando por A y parándose en la segunda vuelta en P, el camino recorrido es una vuelta entera ($2\pi r$) más el arco AP, es decir, $2\pi r + AP$.
- Si el móvil da k vueltas antes de detenerse en P, entonces el camino recorrido será $k \cdot 2\pi r + AP$.

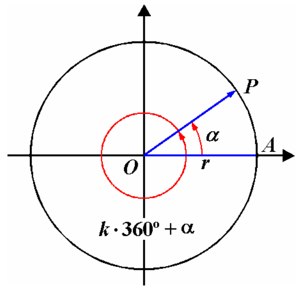




Teniendo en cuenta que **2**p **radianes = 360 grados = 1 vuelta,** por ejemplo en una circunferencia de radio 1, 3 vueltas y media equivalen a:

$$3 \cdot 2\pi + \pi = 7\pi \text{ rad} \quad \text{ó} \quad 3 \cdot 360º + 180º = 1.260º$$

Amplitud de giro	Medida del arco = ángulo en radianes	Ángulo en grados
α	AP	α
1 vuelta + α	$2\pi r + AP$	$360^\circ + \alpha$
k vueltas + α	$k \cdot 2\pi r + AP$	$k \cdot 360^\circ + \alpha$



Reducción de un ángulo al primer giro

Para ello se divide el ángulo por 360º. El número de vueltas es el cociente y el ángulo menor de 360º es el resto. Por ejemplo:

- $750^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 30^\circ = 2$ vueltas + 30º
- $1.920^\circ = 360^\circ \cdot 5 + 120^\circ = 5$ vueltas + 120º
- $3.030^\circ = 360^\circ \cdot 8 + 150^\circ = 8$ vueltas + 150º

EJERCICIOS

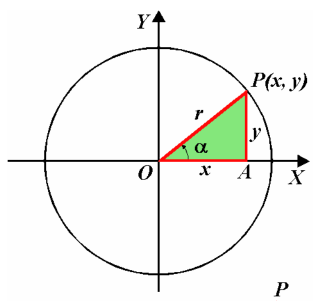
4. Reduce al primer giro los siguientes ángulos, expresándolos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 360º.
   a) 720º b) 3.000º c) 900º d) 7.245º

5. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 2π rad.
   a) $\frac{13\pi}{4}$ rad b) 60π rad c) $\frac{65\pi}{4}$ rad

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

3.1. Definición de las razones trigonométricas

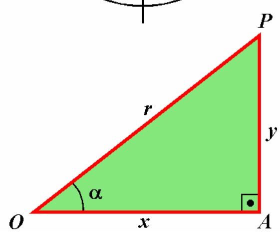
Tenemos, hasta ahora, una relación entre los lados de un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras, y otra entre sus ángulos: su suma es 180º. Las razones trigonométricas nos van a permitir relacionar los lados con los ángulos.



En un sistema de coordenadas cartesianas OXY, consideremos una circunferencia de centro O y radio r.

Dado un punto P sobre la circunferencia, de coordenadas $P(x, y)$, trazamos su proyección ortogonal sobre el eje de abscisas, A. Se forma el triángulo rectángulo OAP cuyos catetos son $OA = x$, $AP = y$, que son las coordenadas del punto P, y por hipotenusa $OP = r$, el radio de la circunferencia.

El ángulo α se representa tomando como vértice el origen de coordenadas.



- El ***seno*** del ángulo a es el cociente entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa. Se simboliza por **sen** a.

$$\boxed{\mathbf{sen}\ a = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{hipotenusa}} = \frac{y}{r}}$$

- El ***coseno*** del ángulo a es el cociente entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa. Se simboliza por **cos** a.

$$\boxed{\mathbf{cos}\ a = \frac{\textbf{cateto contiguo}}{\textbf{hipotenusa}} = \frac{x}{r}}$$

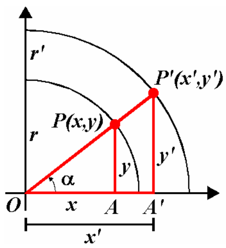
- La ***tangente*** del ángulo a es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto contiguo al ángulo. Se simboliza por **tg** a.

$$\boxed{\mathbf{tg}\ a = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{cateto contiguo}} = \frac{y}{x}}$$

Otra expresión de la tangente se obtiene dividiendo el seno entre el coseno:

$$\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{r} : \frac{x}{r} = \frac{y \cdot r}{x \cdot r} = \frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\alpha \quad Þ \quad \boxed{\mathbf{tg}\ a = \frac{\mathbf{sen}\ a}{\mathbf{cos}\ a}}$$

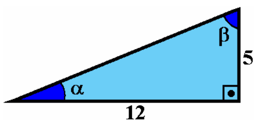
Veamos a continuación que **las razones trigonométricas sólo dependen de la medida del ángulo** a y no del radio de la circunferencia utilizada para definirlas (por tanto, no dependen del tamaño del triángulo rectángulo).



En efecto, si consideramos la circunferencia de centro O y radio r, el punto asociado al ángulo α es P. Si trazamos otra circunferencia de centro O y radio r', el punto asociado al ángulo α es ahora P'. Como los triángulos OAP y $OA'P'$ son semejantes (tienen sus tres ángulos iguales), sus lados son proporcionales:

$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'} = \mathrm{sen}\,\alpha \quad ; \quad \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'} = \cos\alpha \quad ; \quad \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

<u>Ejemplo.-</u> En el triángulo rectángulo de la figura, de catetos 5 y 12 cm, calcula las razones trigonométricas de los ángulos α y β.



Hallamos la hipotenusa: $h^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$, de donde $h = 13$ cm.

Las razones trigonométricas de los ángulos α y β son:

$$\mathrm{sen}\ a = \frac{5}{13} \qquad \cos a = \frac{12}{13} \qquad \mathrm{tg}\ a = \frac{5}{12}$$

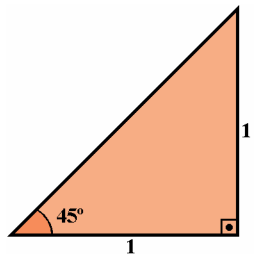
$$\mathrm{sen}\ ß = \frac{12}{13} \qquad \cos ß = \frac{5}{13} \qquad \mathrm{tg}\ ß = \frac{12}{5}$$

EJERCICIOS

6. a) Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $a = 3$ cm y $b = 4$ cm.
   b) En un triángulo rectángulo, uno de sus catetos mide $a = 6$ cm y la hipotenusa $h = 10$ cm. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos
   c) Compara los resultados de los anteriores apartados y obtén conclusiones.
7. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm y uno de los catetos 5 cm.

3.2. Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º

Razones trigonométricas de 45º



Calculamos las razones trigonométricas de 45º en un triángulo rectángulo isósceles, como el de la figura, cuyos catetos miden 1 cm.

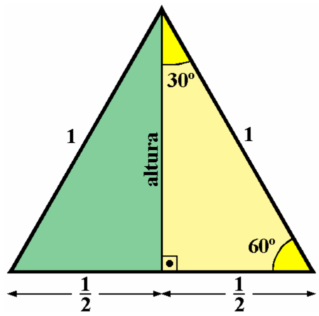
Utilizando el teorema de Pitágoras calculamos la hipotenusa:

$$h^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2} \text{ cm}$$

Las razones trigonométricas de 45º son:

- $\text{sen } 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg } 45^\circ = \dfrac{1}{1} = 1$

Razones trigonométricas de 30º



Calculamos las razones trigonométricas de 30º en un triángulo equilátero de 1 cm de lado como muestra la figura.

Utilizando el teorema de Pitágoras calculamos la altura:

$$\text{altura} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Las razones trigonométricas de 30º son:

- $\text{sen } 30^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30^\circ = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg } 30^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

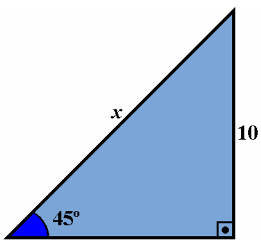
Razones trigonométricas de 60º

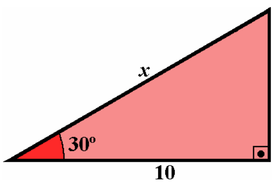
Calculamos las razones trigonométricas de 60º en el mismo triángulo equilátero del caso anterior y obtenemos:

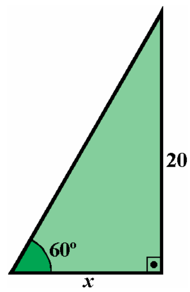
- $\text{sen } 60^\circ = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg } 60^\circ = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

EJERCICIOS

8. Halla el valor del lado x en los siguientes triángulos rectángulos.







3.3. Las razones trigonométricas en la calculadora

Las calculadoras científicas nos permiten calcular las razones trigonométricas de un ángulo dado y al revés, calcular el ángulo conocida una de sus razones trigonométricas, tanto en grados como en radianes.

Cálculo del seno, coseno y tangente de un ángulo

Para trabajar en grados ponemos la calculadora en modo **DEG.** Por ejemplo, hallemos las razones trigonométricas del ángulo 58º 38’ 25”.

Seno:	**58**	**º ’ ”**	**38**	**º ’ ”**	**25**	**º ’ ”**	**sin**	pantalla →	**0.853916845**
Coseno:	**58**	**º ’ ”**	**38**	**º ’ ”**	**25**	**º ’ ”**	**cos**	pantalla →	**0.520409474**
Tangente:	**58**	**º ’ ”**	**38**	**º ’ ”**	**25**	**º ’ ”**	**tan**	pantalla →	**1.640855688**

Para trabajar con radianes, hay que poner la calculadora en modo **RAD.**

Cálculo del ángulo conocida una de sus razones trigonométricas

Conocida una de las razones trigonométricas de un ángulo podemos calcular la medida de este ángulo. Por ejemplo, si cos α = 0’520409474, para hallar el ángulo α tecleamos:

0.520409474	**SHIFT**	**Cos**	**SHIFT**	**º ’ ”**	pantalla →	**58º 38’ 25”**

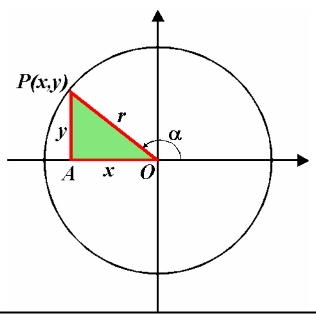
EJERCICIOS

9. Con la calculadora, halla las razones trigonométricas con cuatro decimales redondeados de los siguientes ángulos.
   a) 75º b) 42º 4’ 15’’ c) 90º d) 76º 25’ e) 8º 7’ 52’’ f) 15º
10. Utilizando la calculadora halla el valor de los siguientes ángulos agudos.
    a) sen α = 0’5 b) cos α = 0’78 c) tg α = 0’7 d) cos α = 0’9 e) tg α = 12’5 f) sen α = 0’3
11. Un triángulo tiene por lados 12 cm, 16 cm y 20 cm. Halla los ángulos.

4. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

En muchas ocasiones aparecen ángulos cuya amplitud es mayor de 90º. Por tanto, es necesario ampliar las definiciones de las razones trigonométricas para un ángulo cualquiera.

Las **razones trigonométricas de un ángulo cualquiera** se definen de la forma siguiente:



$$\textbf{sen } a = \frac{\textbf{ordenada de } P}{\textbf{radio}} = \frac{y}{r}$$

$$\textbf{cos } a = \frac{\textbf{abscisa de } P}{\textbf{radio}} = \frac{x}{r}$$

$$\textbf{tg } a = \frac{\textbf{ordenada de } P}{\textbf{abscisa de } P} = \frac{y}{x}$$

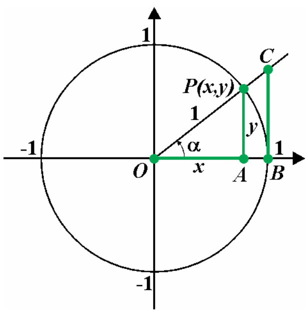
Observa que las definiciones de las razones trigonométricas dadas para un ángulo agudo en el epígrafe 3.1 coinciden con las anteriores.

4.1. Interpretación geométrica de las razones trigonométricas

Ya vimos que las razones trigonométricas sólo dependen de la medida del ángulo α y no del radio de la circunferencia auxiliar que se elija. Por comodidad, se suele utilizar la circunferencia de radio unidad, también llamada *circunferencia goniométrica*.

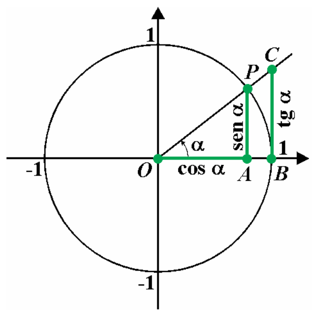
> ***Circunferencia goniométrica*** es una circunferencia de radio una unidad de longitud y centrada en el origen de coordenadas de un sistema de referencia de coordenadas cartesianas.

Utilizando esta circunferencia, las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera se convierten en ***líneas trigonométricas*** (segmentos). Así, para un ángulo agudo α del primer cuadrante, la interpretación geométrica de las razones trigonométricas es la siguiente:

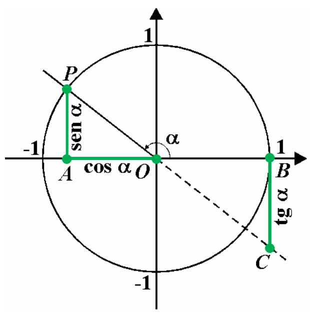


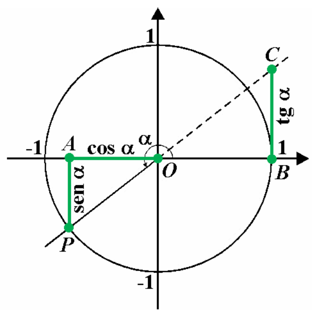
Tenemos entonces:

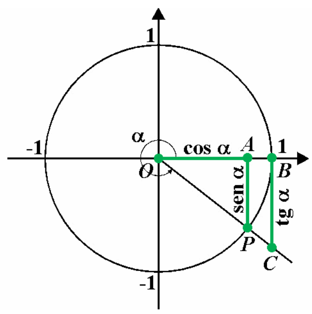
$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{y}{1} = y = \text{ordenada de } P \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{1} = x = \text{abscisa de } P \\ \text{tg}\,\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{BC}{OB} = \dfrac{BC}{1} = BC \end{array}\right\} \Rightarrow$$



De forma análoga obtenemos las líneas trigonométricas en los restantes cuadrantes:







De lo anterior, se deduce fácilmente que el seno y el coseno de cualquier ángulo están acotados:

$$\boxed{\begin{array}{l} -1 \le \textbf{sen}\,\alpha \le 1 \\ -1 \le \textbf{cos}\,\alpha \le 1 \end{array}}$$

También podemos deducir que los ángulos **90º** y **270º no tienen tangente.**

EJERCICIOS

12. Dibuja un ángulo de 45º en la circunferencia goniométrica y marca el seno, el coseno y la tangente. Haz lo mismo con los ángulos 160º, 225º y 310º.
13. Al crecer un ángulo de 0º a 90º, ¿el seno, el coseno y la tangente del ángulo, aumentan o disminuyen?

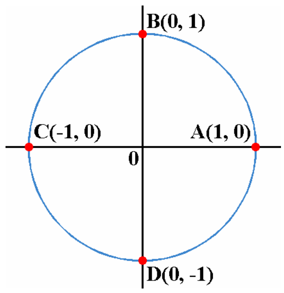
4.2. Signo de las razones trigonométricas

Las coordenadas del punto P no siempre son positivas, pues dependen del cuadrante donde se encuentre. Por tanto, el signo de las razones trigonométricas dependerá del cuadrante donde se encuentre situado el ángulo. En particular, el signo del ***seno*** es igual al de la **ordenada *y*,** el signo del ***coseno*** es igual al de la **abscisa *x*,** y el signo de la ***tangente*** es igual al del **cociente de *y* por *x*.**

La siguiente tabla muestra el signo de las distintas razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes:

Cuadrante		**sen**	**cos**	**tg**
I	$0^o < \alpha < 90^o$	+	+	+
II	$90^o < \alpha < 180^o$	+	–	–
III	$180^o < \alpha < 270^o$	–	–	+
IV	$270^o < \alpha < 360^o$	–	+	–

Ejemplo.- Calcula las razones trigonométricas de los ángulos 0º, 90º, 180º y 270º.



Observando la figura, las coordenadas de los puntos determinados por los ángulos y las razones de los mismos son:

A(1, 0):	$\text{sen } 0^o = 0$	$\cos 0^o = 1$	$\text{tg } 0^o = 0$
B(0, 1):	$\text{sen } 90^o = 1$	$\cos 90^o = 0$	tg 90º no existe
C(–1, 0):	$\text{sen } 180^o = 0$	$\cos 180^o = -1$	$\text{tg } 180^o = 0$
D(0, –1):	$\text{sen } 270^o = -1$	$\cos 270^o = 0$	tg 270º no existe

Ejemplo.- Determina el signo de las razones trigonométricas de 330º.

330º es un ángulo del cuarto cuadrante, por tanto: $\text{sen } 330^o < 0$, $\cos 330^o > 0$ y $\text{tg } 330^o < 0$

Ejemplo.- ¿En qué cuadrante se encuentra situado el ángulo α si se sabe que $\text{sen } \alpha = 0'635$?

La respuesta se puede dar teniendo en cuenta el signo de la razón trigonométrica dada. Como el seno es positivo, el ángulo α podrá estar situado en el primer o segundo cuadrante. Por tanto, $0 < \alpha < 180^o$.

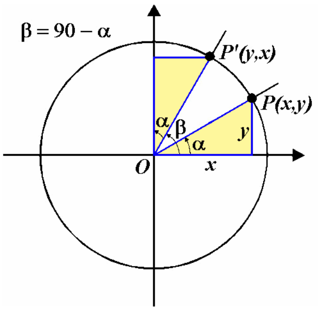
EJERCICIOS

14. Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de los siguientes ángulos, identificando el cuadrante en que se encuentran.
    a) 66º b) 175º c) 342º d) –18º e) 1.215º f) –120º
15. Si $\cos \alpha = \sqrt{2}$, ¿qué se puede asegurar del ángulo α?

5. RELACIONES ENTRE RAZONES DE ÁNGULOS DIFERENTES

Ángulos complementarios: a **y 90º -** a

Dos ángulos, α y β, son *complementarios* si su suma es 90º, es decir, cuando α + β = 90º.



Los triángulos sombreados son iguales.

La ordenada de P' es igual a la abscisa de $P \Rightarrow$ sen (90º − α) = x = cos α

La abscisa de P' es igual a la ordenada de $P \Rightarrow$ cos (90º − α) = y = sen α

Dividiendo: $\text{tg}\,(90^\circ - \alpha) = \dfrac{\text{sen}\,(90^\circ - \alpha)}{\cos\,(90^\circ - \alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

- **sen (90º -** a**) = cos** a
- **cos (90º -** a**) = sen** a
- **tg (90º -** a**) =** $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg}\ a}$

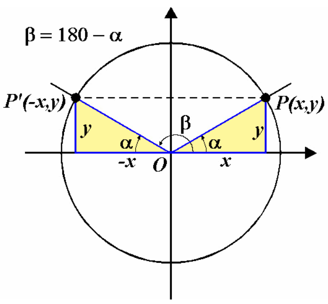
Ejemplo.- Calcula las razones trigonométricas de 60º, conocidas las de 30º.

Primer cuadrante: 30º y 60º son ángulos complementarios (60º = 90º – 30º).

$\text{sen}\,60^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos 60^\circ = \text{sen}\,30^\circ = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \text{tg}\,60^\circ = \dfrac{1}{\text{tg}\,30^\circ} = \sqrt{3}$

Ángulos suplementarios: a **y 180º -** a

Dos ángulos, α y β, son *suplementarios* si su suma es 180º, es decir, cuando α + β = 180º.



Los triángulos sombreados son iguales.

Los punto P y P' son simétricos respecto del eje de ordenadas.

Las ordenadas de P y P' son iguales ⇒ sen (180º – α) = y = sen α

Las abscisas de P y P' son opuestas ⇒ cos (180º – α) = –x = –cos α

Dividiendo: $\text{tg}\,(180^\circ - \alpha) = \dfrac{\text{sen}\,(180^\circ - \alpha)}{\cos\,(180^\circ - \alpha)} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{-\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$

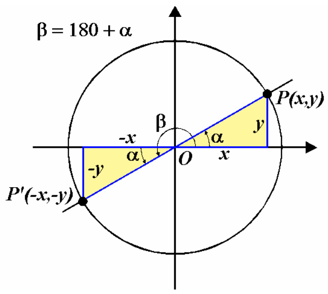
- **sen (180º -** a**) = sen** a
- **cos (180º -** a**) = -cos** a
- **tg (180º -** a**) = - tg** a

Ejemplo.- Calcula las razones trigonométricas de 150º, conocidas las de 30º.

Segundo cuadrante: 30º y 150º son suplementarios (30º + 150º = 180º).

$\text{sen}\,150^\circ = \text{sen}\,30^\circ = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \text{tg}\,150^\circ = -\text{tg}\,30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ángulos que difieren en 180º: a **y 180º +** a



Los triángulos sombreados son iguales.

Los punto P y P' son simétricos respecto del origen de ordenadas.

Las ordenadas de P y P' son opuestas ⇒ sen (180º + α) = –y = –sen α

Las abscisas de P y P' son opuestas ⇒ cos (180º + α) = –x = –cos α

Dividiendo: $\text{tg}\,(180^\circ + \alpha) = \dfrac{\text{sen}\,(180^\circ + \alpha)}{\cos\,(180^\circ + \alpha)} = \dfrac{-\text{sen}\,\alpha}{-\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$

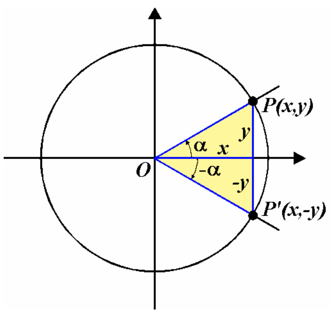
- **sen (180º +** a**) = -sen** a
- **cos (180º +** a**) = -cos** a
- **tg (180º +** a**) = tg** a

Ejemplo.- Calcula las razones trigonométricas de 210º, conocidas las de 30º.

Tercer cuadrante: 30º y 210º difieren en 180º (210º – 30º = 180º).

$$\text{sen}\,210° = -\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2} \qquad \cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg}\,210° = \text{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ángulos opuestos: a **y 360º -** a



Observa primeramente que 360º – α = –α.

Los triángulos sombreados son iguales.

Los punto *P* y *P'* son simétricos respecto del eje de abscisas.

Las ordenadas de *P* y *P'* son opuestas ⇒ sen (360º – α) = –*y* = –sen α

Las abscisas de *P* y *P*' son iguales ⇒ cos (360º – α) = *x* = cos α

Dividiendo: $\text{tg}\,(360°-\alpha) = \dfrac{\text{sen}\,(360°-\alpha)}{\cos\,(360°-\alpha)} = \dfrac{-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$

- **sen (360º -** a**) = -sen** a
- **cos (360º -** a**) = cos** a
- **tg (360º -** a**) = -tg** a

Ejemplo.- Calcula las razones trigonométricas de 60º, 150º, 210º y 330º conocidas las de 30º.

Cuarto cuadrante: 30º y 330º son ángulos opuestos, pues 330º = 360º – 30º.

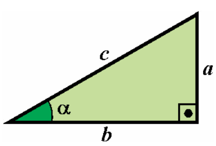
$$\text{sen}\,330° = -\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2} \qquad \cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg}\,330° = -\text{tg}\,30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

EJERCICIOS

16. Halla, sin usar la calculadora, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) –120º	b) 135º	c) 300º	d) 315º
e) –150º	f) 120º	g) 2.025º	h) 2.700º

6. FÓRMULA FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA



En el siguiente triángulo rectángulo de la figura, se verifica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Las razones trigonométricas del ángulo α son: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$

Elevamos al cuadrado ambas expresiones y sumándolas obtenemos:

$$(\text{sen}\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 \equiv \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Nota.- Los valores (sen α)^2 y (cos α)^2 se escriben también como sen^2 α y cos^2 α.

Fórmula fundamental de la trigonometría

El seno al cuadrado de un ángulo más el coseno al cuadrado del mismo ángulo es igual a la unidad.

sen^2 a **+ cos^2** a **= 1**

Dividiendo esta fórmula por $\cos^2\alpha$ se tiene:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \text{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\text{, esto es, }\boxed{\mathbf{1+tg^2\,a=\frac{1}{cos^2\,a}}}$$

Análogamente, dividiendo por $\text{sen}^2\alpha$ se tiene:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}\text{, con lo que obtenemos, }\boxed{\mathbf{1+\frac{1}{tg^2\,a}=\frac{1}{sen^2\,a}}}$$

Estas relaciones permiten, conocida una razón trigonométrica, calcular las restantes sin recurrir a la calculadora.

Ejemplo.- Sabiendo que $\text{sen}\,\alpha=\frac{1}{3}$, siendo 90º < α < 180º, halla las demás razones trigonométricas del ángulo α.

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\text{sen}^2\alpha=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\Rightarrow\cos\alpha=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\quad\text{(pues } 90º<\alpha<180º)$$

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{3}:\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{3}{6\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ejemplo.- Se sabe que para un cierto ángulo α, 270º < α < 360º, es $\text{tg}\,\alpha=-\frac{4}{3}$. Halla sen α y cos α.

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\text{tg}^2\alpha=1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=1+\frac{16}{9}=\frac{25}{9}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{9}{25}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}\quad\text{(pues } 270º<\alpha<360º)$$

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\text{sen}\,\alpha=\text{tg}\,\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{-4}{3}\cdot\frac{3}{5}\Rightarrow\text{sen}\,\alpha=-\frac{4}{5}$$

EJERCICIOS

17. Calcula las otras dos razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de los siguientes casos.

a) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, 270º < α < 360º b) $\text{sen}\,\alpha=\frac{3}{5}$, 90º < α < 180º c) $\text{tg}\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{5}$, 180º < α < 270º

d) $\text{sen}\,\alpha=-\frac{1}{2}$, 270º < α < 360º e) $\text{tg}\,\alpha=-3$, 90º < α < 180º f) $\cos\alpha=-\frac{4}{7}$, 180º < α < 270º

18. Sabiendo que $\text{sen}\,48º=\frac{\sqrt{5}}{3}$, completa la siguiente tabla.

	42º	48º	132º	228º	312º
sen					
cos					
tg					

19. Si sen α = 3/4 y α es un ángulo agudo, halla las siguientes razones trigonométricas.
a) sen (90º – α) b) cos (180º – α) c) cos (180º + α) d) tg (–α)

20. Si cos (180º – α) = –1/3 y α es un ángulo del primer cuadrante, calcula las siguientes razones trigonométricas.
a) sen α b) cos (90º – α) c) sen (–α) d) tg (180º + α)

21. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\text{sen}\,\alpha\cdot\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$ b) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}$ c) $\text{sen}^3\alpha+\text{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha$

22. Demuestra que cualquiera que sea el ángulo α se verifica la siguiente relación.

$$\frac{\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}=\frac{\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}$$

Soluciones a los ejercicios propuestos

1. Dados los ángulos $\alpha = 30º\ 56'\ 50''$ y $\beta = 20º\ 58'\ 55''$, calcula $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, 3α y $\alpha/3$.
   a + b = **51º 55' 45"** a - b = **9º 57' 55"** **3**a = **92º 50' 30"** a/**3** = **10º 18' 56.6"**

2. Expresa en radianes los siguientes ángulos medidos en grados.
   a) 0º, 30º, 45º, 60º b) 90º, 120º, 135º, 150º c) 180º, 210º, 225º, 240º d) 270º, 300º, 315, 330º

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º
Radianes	**0**	$\frac{\text{p}}{\mathbf{6}}$	$\frac{\text{p}}{\mathbf{4}}$	$\frac{\text{p}}{\mathbf{3}}$	$\frac{\text{p}}{\mathbf{2}}$	$\frac{\mathbf{2}\text{p}}{\mathbf{3}}$	$\frac{\mathbf{3}\text{p}}{\mathbf{4}}$	$\frac{\mathbf{5}\text{p}}{\mathbf{6}}$
Grados	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º
Radianes	p	$\frac{\mathbf{7}\text{p}}{\mathbf{6}}$	$\frac{\mathbf{5}\text{p}}{\mathbf{4}}$	$\frac{\mathbf{4}\text{p}}{\mathbf{3}}$	$\frac{\mathbf{3}\text{p}}{\mathbf{2}}$	$\frac{\mathbf{5}\text{p}}{\mathbf{3}}$	$\frac{\mathbf{7}\text{p}}{\mathbf{4}}$	$\frac{\mathbf{11}\text{p}}{\mathbf{6}}$

3. Expresa en grados los siguientes radianes.
   a) $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad, 2π rad b) $\frac{3\pi}{4}$ rad, $\frac{5\pi}{3}$ rad, $\frac{9\pi}{10}$ rad, $\frac{4\pi}{9}$ rad

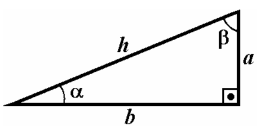
Radianes	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{9}$
Grados	**90º**	**180º**	**270º**	**360º**	**135º**	**300º**	**162º**	**80º**

4. Reduce al primer giro los siguientes ángulos, expresándolos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 360º.
   a) 720º b) 3.000º c) 900º d) 7.245º
   a) 720º = 360º x 2 + 0º = 2 vueltas + 0º
   b) 3.000º = 360º x 8 + 120º = 8 vueltas + 120º
   c) 900º = 360º x 2 + 180º = 2 vueltas + 180º
   d) 7.245º = 360º x 20 + 45º = 20 vueltas + 45º

5. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 2π rad.
   a) $\frac{13\pi}{4}$ rad b) 60π rad c) $\frac{65\pi}{4}$ rad
   a) $\frac{\mathbf{13}\text{p}}{\mathbf{4}} = \mathbf{2}\text{p}\times\mathbf{1} + \frac{\mathbf{5}\text{p}}{\mathbf{4}} = \textbf{1 vuelta} + \frac{\mathbf{5}\text{p}}{\mathbf{4}}$
   b) $\mathbf{60}\text{p} = \mathbf{2}\text{p}\times\mathbf{30} + \mathbf{0} = \textbf{30 vueltas}$
   c) $\frac{\mathbf{65}\text{p}}{\mathbf{4}} = \mathbf{2}\text{p}\times\mathbf{8} + \frac{\text{p}}{\mathbf{4}} = \textbf{8 vueltas} + \frac{\text{p}}{\mathbf{4}}$

6. a) Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $a = 3$ cm y $b = 4$ cm.
   b) En un triángulo rectángulo, uno de sus catetos mide $a = 6$ cm y la hipotenusa $h = 10$ cm. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos
   c) Compara los resultados de los anteriores apartados y obtén conclusiones.

   En ambos apartados, a) y b), se tienen las siguientes razones trigonométricas:

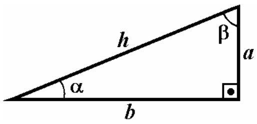


$$\textbf{sen a} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \quad \textbf{cos a} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} \quad \textbf{tg a} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

$$\textbf{sen ß} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} \quad \textbf{cos ß} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \quad \textbf{tg ß} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

   c) Como puedes observar, los resultados son iguales en ambos casos, pero te dejo a ti que averigües ¿por qué?

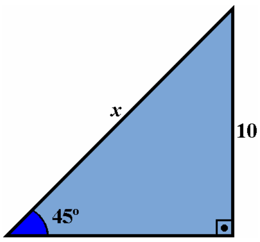
7. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm y uno de los catetos 5 cm.

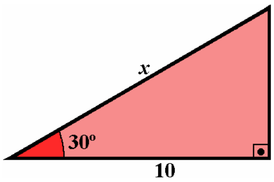


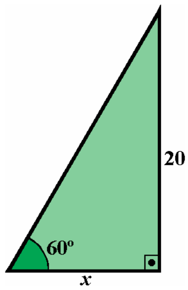
$$\textbf{sen a} = \frac{1}{2} \qquad \textbf{cos a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textbf{tg a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\textbf{sen ß} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textbf{cos ß} = \frac{1}{2} \qquad \textbf{tg ß} = \sqrt{3}$$

8. Halla el valor del lado *x* en los siguientes triángulos rectángulos.







$$x = 10\sqrt{2} \qquad x = \frac{20\sqrt{3}}{3} \qquad x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

9. Con la calculadora, halla las razones trigonométricas con cuatro decimales redondeados de los siguientes ángulos.
a) 75º b) 42º 4' 15'' c) 90º d) 76º 25' e) 8º 7' 52'' f) 15º

	75º	42º 4' 15"	90º	76º 25'	8º 7' 52"	15º
sen	**0'9659**	**0'6700**	**1**	**0'9720**	**0'1414**	**0'2588**
cos	**0'2588**	**0'7423**	**0**	**0'2349**	**0'9899**	**0'9659**
tg	**3'7321**	**0'9026**	**ERROR**	**4'1388**	**0'1429**	**0'2679**

10. Utilizando la calculadora halla el valor de los siguientes ángulos agudos.
a) sen α = 0'5 b) cos α = 0'78 c) tg α = 0'7 d) cos α = 0'9 e) tg α = 12'5 f) sen α = 0'3
a) a = **30º** **b)** a = **38º 44' 22"** **c)** a = **34º 59' 31"**
d) a = **25º 50' 31"** **e)** a = **85º 25' 34"** **f)** a =**17º 27' 27"**

11. Un triángulo tiene por lados 12 cm, 16 cm y 20 cm. Halla los ángulos.
$12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$ Þ se trata de un triángulo rectángulo (*a* = 12, *b* = 16, *h* = 20).
Lógicamente, un ángulo es recto (90º) y los otros dos tienen una amplitud de 36º 52' 12" y 53º 7' 48".

12. Dibuja un ángulo de 45º en la circunferencia goniométrica y marca el seno, el coseno y la tangente. Haz lo mismo con los ángulos 160º, 225º y 310º.
Manos a la obra, verás que es bastante fácil.

13. Al crecer un ángulo de 0º a 90º, ¿el seno, el coseno y la tangente del ángulo, aumentan o disminuyen?
Aumentan el seno y la tangente, mientras que el coseno disminuye. ¿Sabrías explicar por qué?

14. Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de los siguientes ángulos, identificando el cuadrante en que se encuentran.
a) 66º b) 175º c) 342º d) –18º e) 1.215º f) –120º

Ángulo	66º	175º	342º	–18º	1.215º	–120º
Cuadrante	I	II	IV	IV	II	III
Seno	+	+	–	–	+	–
Coseno	+	–	+	+	–	–
Tangente	+	–	–	–	–	+

15. Si $\cos \alpha = \sqrt{2}$, ¿qué se puede asegurar del ángulo α?
Se deja para que razone el alumno.

16. Halla, sin usar la calculadora, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.
a) –120º b) 135º c) 300º d) 315º
e) –150º f) 120º g) 2.025º h) 2.700º

	–120º	135º	300º	315º	–150º	120º	2.025º	2.700º
Seno	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	**0**
Coseno	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	**-1**
Tangente	$\sqrt{3}$	**-1**	$-\sqrt{3}$	**-1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	**1**	**0**

17. Calcula las otras dos razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de los siguientes casos.
a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $270º < \alpha < 360º$ b) $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$, $90º < \alpha < 180º$ c) $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$, $180º < \alpha < 270º$
d) $\text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{2}$, $270º < \alpha < 360º$ e) $\text{tg}\,\alpha = -3$, $90º < \alpha < 180º$ f) $\cos\alpha = -\frac{4}{7}$, $180º < \alpha < 270º$

a) **sen** a $= -\frac{3}{5}$ **tg** a $= -\frac{3}{4}$ **b)** **cos** a $= -\frac{4}{5}$ **tg** a $= -\frac{3}{4}$ **c)** **sen** a $= -\frac{\sqrt{6}}{9}$ **cos** a $= -\frac{5\sqrt{3}}{9}$
d) **cos** a $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ **tg** a $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **e)** **cos** a $= -\frac{\sqrt{10}}{10}$ **sen** a $= \frac{3\sqrt{10}}{10}$ **f)** **sen** a $= -\frac{\sqrt{33}}{7}$ **tg** a $= \frac{\sqrt{33}}{4}$

18. Sabiendo que $\text{sen}\,48º = \frac{\sqrt{5}}{3}$, completa la siguiente tabla.

	42º	48º	132º	228º	312º
Sen	$\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$
Cos	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
Tg	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$

19. Si sen α = 3/4 y α es un ángulo agudo, halla las siguientes razones trigonométricas.
a) sen (90º – α) b) cos (180º – α) c) cos (180º + α) d) tg (–α)
a) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ **b)** $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ **c)** $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ **d)** $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

20. Si cos (180º – α) = –1/3 y α es un ángulo del primer cuadrante, calcula las siguientes razones trigonométricas.
a) sen α b) cos (90º – α) c) sen (–α) d) tg (180º + α)
a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **b)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **c)** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **d)** $2\sqrt{2}$

21. Simplifica las siguientes expresiones.
a) $\text{sen}\,\alpha \cdot \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$ b) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}$ c) $\text{sen}^3\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos^2\alpha$
a) cos a **b) 1** + **sen** a **c) sen** a

22. Demuestra que cualquiera que sea el ángulo α se verifica la siguiente relación.
$$\frac{\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}$$

Se deja para el alumno.