INECUACIONES Y SISTEMAS

1. DESIGUALDADES E INECUACIONES

En todos los ámbitos encontramos expresiones numéricas o algebraicas que hacen referencia a la desigualdad (≠). En su estudio aparecen los signos asociados a la desigualdad, que nos servirán para relacionar números o expresiones cuando no son iguales.

a < b	***a > b***	***a £ b***	***a ³ b***
a es menor que b	***a es mayor que b***	***a es menor o igual que b***	***a es mayor o igual que b***

Son desigualdades numéricas o algebraicas las siguientes:

$3 + 10 < 8$ $\qquad$ $2x + 6 > 18$ $\qquad$ $(x-2)(x-3) \le 0$ $\qquad$ $2 + 3 \ge 5$

Una desigualdad, lo mismo que una igualdad, puede ser cierta o falsa. En las desigualdades anteriores observa que:

- La primera desigualdad es falsa y la cuarta es cierta.
- Las desigualdades segunda y tercera pueden ser ciertas o falsas, según los valores que demos a la variable x. Así, la desigualdad $2x + 6 > 18$ es cierta para $x = 7$, $x = 8$, $x = 9$, … pero falsa para $x = 6$, $x = 5$, …

Para cada valor que damos a x obtenemos una desigualdad numérica cierta o falsa. Las desigualdades de este tipo se llaman *inecuaciones*.

- Una ***inecuación*** es una desigualdad algebraica en la que aparece alguna *incógnita* en uno o en los dos miembros de la desigualdad.

De forma análoga a lo que ocurría con las ecuaciones, **comprobar** una inecuación es el procedimiento que utilizamos al sustituir las incógnitas por los valores numéricos y ver si la desigualdad que resulta es cierta o no.

Ejemplo.- Comprueba cuáles de los valores $x = 4$ o $x = 5$ son soluciones de la inecuación $x^2 + 3x > 30$.

Si $x = 4 \Rightarrow x^2 + 3x = 4^2 + 3 \cdot 4 = 16 + 12 = 28 < 30$, luego $x = 4$ no es solución.

Si $x = 5 \Rightarrow x^2 + 3x = 5^2 + 3 \cdot 5 = 25 + 15 = 40 > 30$, por lo que $x = 5$ sí es solución.

EJERCICIOS

1. Comprueba si los valores que se indican son soluciones de las inecuaciones correspondientes.

a) $x = -2$ y $x = 6$ de $x + 2 < 8 - x$ $\qquad$ b) $x = -1$ y $x = 3$ de $x^2 - 6x + 8 > 0$

c) $x = 0$ y $x = 2$ de $\dfrac{2x+3}{x-1} > 1$ $\qquad$ d) $x = 0$ y $x = 1$ de $\dfrac{2x-1}{x-2} > \dfrac{1}{2}$

1.1. Soluciones de inecuaciones

Consideremos la inecuación $x + 2 < 8 - x$. Vamos a estudiar el valor que toma cada uno de sus miembros para diferentes valores de x. Para ello, llamamos $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 8 - x$, y damos valores a la incógnita x para construir una tabla como la siguiente:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x) = x + 2$	2	3	4	5	6	7	8
$g(x) = 8 - x$	8	7	6	5	4	3	2
	$f(x) < g(x)$			$f(x) = g(x)$	$f(x) > g(x)$		

A partir de esta tabla podemos deducir que:

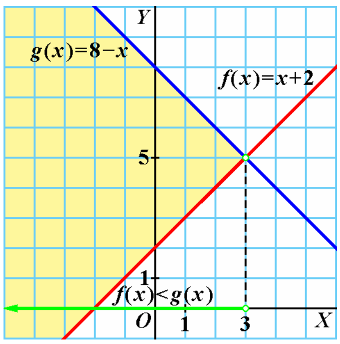
- Si x es menor que 3 $\Rightarrow$ $x + 2 < 8 - x$
- Si x es igual a 3 $\Rightarrow$ $x + 2 = 8 - x$
- Si x es mayor que 3 $\Rightarrow$ $x + 2 > 8 - x$

Los valores $\boldsymbol{x < 3}$ verifican la inecuación y son las soluciones de la misma, es decir, el intervalo **(- ¥, 3),** o bien, podemos representar la solución gráficamente:

Interpretación gráfica

Si representamos las funciones $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 8 - x$ en un sistema de coordenadas cartesianas se obtienen dos rectas.

A partir de estas gráficas se pueden comparar las ordenadas de $f(x)$ y $g(x)$. Observamos que la ordenada $f(x)$ es menor que la ordenada $g(x)$ para los valores $x < 3$.



- Las ***soluciones*** de una inecuación son los valores que pueden tomar las incógnitas tales que al sustituirlos en la inecuación hacen que la desigualdad sea cierta.
- Las inecuaciones pueden tener 0, 1, 2, … o infinitas soluciones. Las soluciones, en la mayoría de los casos, determinan uno o varios intervalos y diremos que es la solución de la inecuación.

EJERCICIOS

2. Resuelve la inecuación $2x + 1 > 7 - x$, representando las rectas que determinan ambos miembros: $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 7 - x$.

1.2. Inecuaciones equivalentes y reglas de equivalencia

Para resolver una inecuación se pasa a otra más sencilla que tiene las mismas soluciones.

Dos inecuaciones son ***equivalentes*** cuando ambas tienen las mismas soluciones.

Por tanto, para resolver una inecuación es necesario ir transformándola en inecuaciones equivalentes cada vez más sencillas. Las reglas que permiten pasar de una inecuación a otra equivalente son, en esencia, las propiedades que relacionan el orden con la suma y con el producto.

Regla de la suma

Si a los dos miembros de una inecuación se les **suma** o **resta** un mismo número o expresión algebraica se obtiene otra inecuación equivalente a la dada.

Regla del producto

Si a los dos miembros de una inecuación se les **multiplica** o **divide** por un mismo número:

- **mayor que cero** se obtiene otra inecuación equivalente a la dada.
- **menor que cero** se obtiene otra inecuación equivalente a la dada **cambiando el sentido** de la desigualdad.

Ejemplo.- Considerando la desigualdad numérica $-4 < 10$, observa que ocurre al efectuar las operaciones siguientes:

Sumar a ambos miembros el mismo número: $-4 + 2 < 10 + 2 \iff -2 < 12$

Restar a ambos miembros el mismo número: $-4 - 2 < 10 - 2 \iff -6 < 8$

Multiplicar ambos miembros por un número positivo: $-4 \cdot 2 < 10 \cdot 2 \iff -8 < 20$

Dividir ambos miembros por un número positivo: $-4 : 2 < 10 : 2 \iff -2 < 5$

Multiplicar ambos miembros por un número negativo: $-4 \cdot (-2) < 10 \cdot (-2) \iff 8 > -20$

Dividir ambos miembros por un número negativo: $-4 : (-2) < 10 : (-2) \iff 2 > -5$

2. Inecuaciones de primer grado

Una ***inecuación de primer grado con una incógnita*** es una inecuación que se puede transformar en otra equivalente de una de las siguientes formas:

ax < b ***ax* £ *b*** ***ax > b*** ***ax* ³ *b***

Para resolver este tipo de inecuaciones utilizamos las operaciones con expresiones algebraicas y las reglas de equivalencia que transforman la inecuación dada en otra equivalente a ella. Esta resolución la sistematizamos siguiendo los pasos que figuran a continuación.

1º. Operamos en ambos miembros suprimiendo los paréntesis que contengan.

2º. Eliminamos denominadores reduciendo previamente ambos miembros a común denominador positivo (mínimo común múltiplo).

3º. Trasponemos términos: los términos que contengan la incógnita en un miembro y los términos independientes al otro.

4º. Reducimos términos semejantes en ambos miembros y llegamos a una inecuación de uno de los siguientes tipos:

$ax < b \qquad ax \le b \qquad ax > b \qquad ax \ge b$

5º. Despejamos la variable o incógnita.

Como ejemplo, vamos a resolver la inecuación $\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{5(x-7)}{4}>\dfrac{7-x}{2}$

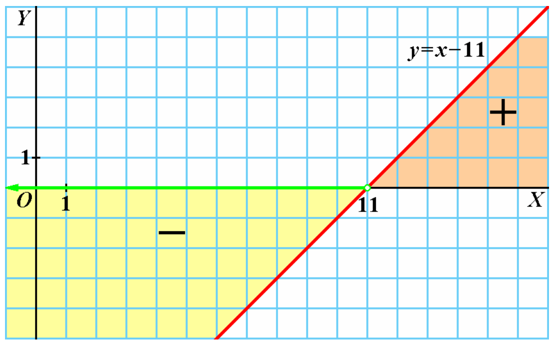
- Operamos en ambos miembros, suprimiendo los paréntesis: $\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{5x-35}{4}>\dfrac{7-x}{2}$
- Eliminamos denominadores, reduciendo en ambos miembros a común denominador positivo y simplificamos este:
$$\frac{4(x-2)-3(5x-35)}{12}>\frac{6(7-x)}{12} \quad \Leftrightarrow \quad 4x-8-15x+105>42-6x$$
- Trasponemos términos: $4x - 15x + 6x > 42 + 8 - 105$
- Reducimos términos semejantes en ambos miembros: $-5x>-55$
- Despejamos la incógnita (ten en cuenta que cambia el sentido de la desigualdad): $x<\dfrac{-55}{-5} \;\Leftrightarrow\; x<11$
- Las soluciones de la inecuación la podemos expresar mediante una expresión algebraica, $\boldsymbol{x < 11}$, mediante un intervalo de números reales, **(- ¥, 11)**, o bien, la podemos expresar gráficamente:

Interpretación gráfica

Claramente, las inecuaciones de primer grado siempre pueden reducirse a una de las siguientes formas:

***ax* + *b* < 0** ***ax* + *b* £ 0** ***ax* + *b* > 0** ***ax* + *b* ³ 0**

Siguiendo con el ejemplo anterior, la expresión $x < 11$ se puede expresar como $\boldsymbol{x - 11 < 0}$. Esta inecuación puede interpretarse como la **función** $\boldsymbol{y = x - 11}$ en un sistema de coordenadas cartesianas y preguntarse para qué valores de x toma y valores, en este caso, negativos. La gráfica de esta función, que es una recta, la dibujamos a continuación.



Observamos que:

- Si x es menor que 11: signo negativo $\Rightarrow$ $x-11<0$
- Si x es igual a 11: 0 $\Rightarrow$ $x-11=0$
- Si x es mayor que 11: signo positivo $\Rightarrow$ $x-11>0$

Por tanto, la solución de nuestra inecuación es $x < 11$, es decir, el intervalo $(-\infty, 11)$.

EJERCICIOS

3. Resuelve la inecuación $2x + 6 > 0$ dibujando la función correspondiente $y = 2x + 6$.
4. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $7x - 2(x - 1) \leq 2(1 - 3x)$ b) $4x - 5 < 2 - 3(1 - 4x)$ c) $(x + 2)(x + 3) < (x - 1)(x + 5)$

d) $\dfrac{2(x+1)}{3}-4\leq 1+\dfrac{x-2}{2}$ e) $\dfrac{x}{2}-x<4-\dfrac{x+1}{7}$ f) $5x-\dfrac{2x-3}{4}>\dfrac{x+1}{3}-(6-x)$

3. Resolución de inecuaciones por factorización

Existen inecuaciones de grado superior a uno cuyo estudio y solución puede efectuarse a través de las inecuaciones de primer grado.

3.1. Inecuaciones de segundo grado

Una ***inecuación de segundo grado con una incógnita*** es una inecuación que se puede transformar en otra equivalente de una de las siguientes formas:

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c < 0}$ $\boldsymbol{ax^2 + bx + c \leq 0}$ $\boldsymbol{ax^2 + bx + c > 0}$ $\boldsymbol{ax^2 + bx + c \geq 0}$

El coeficiente ***a*** siempre se puede tomar positivo, ***a* > 0;** en caso contrario bastará multiplicar por -1 la inecuación (esto conlleva cambiar el sentido de la desigualdad).

Procedamos a resolver la inecuación $x^2 - 4x + 3 > 0$:

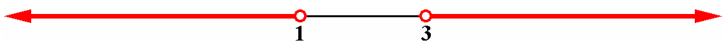
– Al resolver la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$ se obtienen por soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$, por lo que esta inecuación se descompone en factores de la forma $(x-1)(x-3) > 0$.

– El estudio del signo de esta inecuación factorizada se reduce a conocer el signo de cada factor y el de su producto para los distintos valores de x, dividiendo la recta real en los intervalos correspondientes a sus raíces.

– En la siguiente tabla se asigna el signo a cada uno de los factores $(x-1)$ y $(x-3)$. Teniendo en cuenta las reglas de los signos para el producto, la última fila de la tabla nos proporciona el signo de $(x-1)(x-3)$.

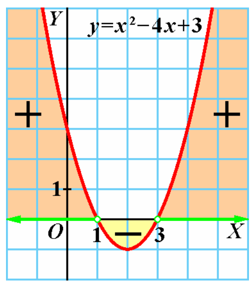
		1		3	
$x-1$	–	¦	+	¦	+
$x-3$	–	¦	–	¦	+
$(x-1)(x-3)$	+	0	–	0	+

– Por tanto, la solución de nuestra inecuación son los valores de x tales que $x < 1$ y $x > 3$, es decir, los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$. Gráficamente:



Interpretación gráfica

Nuestra inecuación se puede interpretar como la función $y = x^2 - 4x + 3$ en un sistema de coordenadas cartesianas y preguntarse para qué valores de x toma y valores, en este caso, positivos. La gráfica de esta función, que es una parábola, la dibujamos en el margen.



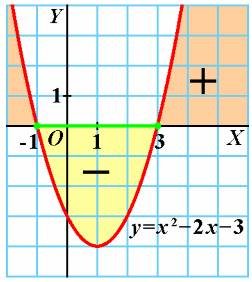
Observamos que

- Si $x < 1$: signo positivo $\Rightarrow$ $x^2 - 4x + 3 > 0$
- Si $x = 1$: 0 $\Rightarrow$ $x^2 - 4x + 3 = 0$
- Si $1 < x < 3$: signo negativo $\Rightarrow$ $x^2 - 4x + 3 < 0$
- Si $x = 3$: 0 $\Rightarrow$ $x^2 - 4x + 3 = 0$
- Si $x > 3$: signo positivo $\Rightarrow$ $x^2 - 4x + 3 > 0$

Así, la solución de nuestra inecuación son los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$.

Ejemplo.- Resolvemos la inecuación $2x^2 - 4x - 6 \le 0$

Podemos, en este caso, dividir por 2: $x^2 - 2x - 3 \le 0$



Las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ son $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$

Nuestra inecuación se factoriza en la forma $(x + 1)(x - 3) \le 0$

Analizando el signo de los factores obtenemos:

		-1		3	
$x + 1$	$-$		$+$		$+$
$x - 3$	$-$		$-$		$+$
$(x + 1)(x - 3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Las soluciones son los valores de x tales que $-1 \le x \le 3$, es decir, los números del intervalo $[-1, 3]$. De forma gráfica representamos las soluciones como sigue:

Ejemplo.- Resolvemos la inecuación $-2x^2 + 12x - 18 < 0$

Multiplicamos por -1 para que el coeficiente a de x^2 sea positivo: $2x^2 - 12x + 18 > 0$

Las soluciones de la ecuación $2x^2 - 12x + 18 = 0$ son $x_1 = x_2 = 3$

Estas soluciones permiten factorizar $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$, y la inecuación es $2(x - 3)^2 > 0$, o equivalentemente, $(x - 3)^2 > 0$

Al ser esta última expresión un cuadrado perfecto, es siempre positiva. Por tanto, las soluciones de la inecuación dada son todos los números reales excepto 3: $\mathbf{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty3)$. Gráficamente, la solución se expresa como:

Obsérvese que si cambiamos el signo, la ecuación $(x - 3)^2 \ge 0$ tiene por solución a cualquier número real, es decir, al conjunto $\mathbf{R}$, la ecuación $(x - 3)^2 \le 0$ tiene por solución únicamente a $x = 3$, mientras que la ecuación $(x - 3)^2 < 0$ no tiene solución.

Ejemplo.- Resolvemos la inecuación $3x^2 - 12x + 15 \ge 0$

La ecuación $3x^2 - 12x + 15 = 0$ no tiene soluciones.

Observa que para cualquier valor de x que fijemos, la expresión $3x^2 - 12x + 15$ es siempre positiva.

De esta forma, las soluciones de esta inecuación son todos los números reales: $\mathbf{R}$.

EJERCICIOS

5. Resuelve las siguientes inecuaciones por factorización y dibujando la función correspondiente $y = x^2 - 4x + 4$.

   a) $x^2 - 4x + 4 > 0$ b) $x^2 - 4x + 4 \ge 0$ c) $x^2 - 4x + 4 \le 0$ d) $x^2 - 4x + 4 < 0$

6. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado reduciéndolas previamente a la forma general.

   a) $x(x^2 + x) - (x - 1)(x^2 - 2) > -4$ b) $x(x + 3) - 2x > 4x + 4$

   c) $4x(x + 3) \ge -9$ d) $(x - 1)^2 - (x + 2)^2 + 3x^2 \le -7x + 1$

   e) $\dfrac{4x+3}{8} - x > \dfrac{x^2+2}{16} - 1$ f) $\dfrac{(3+2x)(x-1)}{3} - 1 > \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{1+x}{2}$

7. Resuelve algebraica y gráficamente la inecuación de segundo $-x^2 + 2x + 8 \le 0$.

3.2. Inecuaciones de grado superior

El método de resolución de inecuaciones de segundo grado se puede generalizar a inecuaciones de grado superior.

Resolvamos la inecuación de tercer grado $6x^3 + 2x^2 - 40x + 24 \geq 0$.

Primeramente, lo que hacemos es hallar los factores y raíces del polinomio $P(x) = 6x^3 + 2x^2 - 40x + 24$. Para ello, aplicamos Ruffini y obtenemos ambas cosas:

	6	2	–40	24
2		12	28	–24
	6	14	–12	0
–3		–18	12	
	6	–4	0	

La descomposición factorial es $P(x) = (x - 2)(x + 3)(6x - 4)$; obtenemos ahora sus raíces:

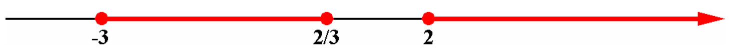
$$(x-2)(x+3)(6x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x_1=2 \\ x+3=0 \Rightarrow x_2=-3 \\ 6x-4=0 \Rightarrow x_3=4/6=2/3 \end{cases}$$

De esta forma, nuestra inecuación es equivalente a resolver la inecuación factorizada $(x - 2)(x + 3)(6x - 4) \geq 0$.

Para resolverla, debemos estudiar el signo que corresponde a cada factor para los distintos valores de x, dividiendo la recta real en los intervalos correspondientes a sus raíces.

		–3		2/3		2	
$x - 2$	–		–		–		+
$x + 3$	–		+		+		+
$6x - 4$	–		–		+		+
$(x - 2)(x + 3)(6x - 4)$	–	0	+	0	–	0	+

Teniendo en cuenta las reglas de los signos para el producto, observamos en la última fila de la tabla anterior que las soluciones de nuestra inecuación son los valores de x que cumplen $-3 \leq x \leq 2/3$ y $x \geq 2$, esto es, las soluciones son los números reales del intervalo $[-3, 2/3] \cup [2, +\infty)$. Gráficamente la expresamos así:



EJERCICIOS

8. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0$

b) $x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x \leq 0$

c) $x^4 - 6x^3 + 30x > 25$

d) $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x \leq 0$

3.3. Inecuaciones racionales

Una ***inecuación racional con una incógnita*** es una inecuación que se puede transformar en otra equivalente como un cociente de polinomios de una de las siguientes formas:

$\boldsymbol{\frac{P(x)}{Q(x)} < 0}$ $\boldsymbol{\frac{P(x)}{Q(x)}}$ £ $\boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{\frac{P(x)}{Q(x)} > 0}$ $\boldsymbol{\frac{P(x)}{Q(x)}}$ ³ $\boldsymbol{0}$

Para resolver la inecuación $\frac{3x-1}{x^2-x-2} \geq 0$ expresamos ésta como cociente de factores de primer grado.

Las soluciones de la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ son $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$, por lo que la inecuación anterior queda expresada de la forma $\frac{3x-1}{(x+1)(x-2)} \geq 0$.

Igual que en los casos anteriores, estudiamos el signo de cada uno de los factores dividiendo la recta real en los intervalos proporcionados por las respectivas raíces:

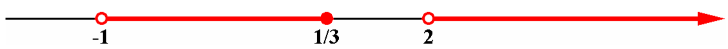
$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/3$ $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

		-1		$1/3$		2	
$3x-1$	$-$		$-$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$+$
$\frac{3x-1}{(x+1)(x-2)}$	$-$	no existe	$+$	0	$-$	no existe	$+$

Teniendo ahora en cuenta las reglas de los signos para el producto y la división, la última fila de la tabla anterior nos muestra que las soluciones de esta inecuación son los valores de x que cumplen $-1 < x \leq 1/3$ y $x > 2$, es decir, las soluciones son los números reales del intervalo $(-1, 1/3] \cup (2, +\infty)$.

Obsérvese que para las raíces del denominador $x = -1$ y $x = 2$ la expresión de la inecuación no tiene sentido al ser nulo el denominador.

La representación gráfica de la solución queda representada de la siguiente forma:



EJERCICIOS

9. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\frac{2x-8}{3x+9} < 0$ b) $\frac{(x+3)(x-2)}{4-x} > 0$ c) $\frac{x^2-4x}{x^2+3x+2} \geq 0$

d) $\frac{2x^2-1}{5x-2} \leq \frac{4x+1}{10}$ e) $\frac{x^2-1}{x^2+1} \geq 0$ f) $\frac{4x^2+4x-3}{4x^2-1} > 0$

4. SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Un ***sistema de inecuaciones con una incógnita*** es un conjunto de dos o más inecuaciones, todas ellas con la misma incógnita.

La ***solución*** de un sistema de este tipo es el conjunto de números reales que verifican, a la vez, todas y cada una de las inecuaciones. Para hallarla, se resuelven por separado cada una de las inecuaciones, se representan gráficamente las soluciones, y se buscan las soluciones comunes.

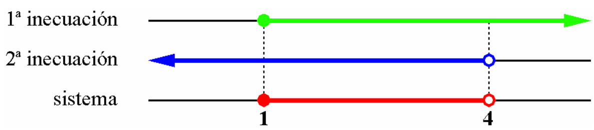
Ejemplo.- Resolvamos el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} \dfrac{2x-2}{5}+\dfrac{5-2x}{3}\le 1 \\ \dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2x-3}{4}>\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Resolviendo las inecuaciones por separado, obtenemos:

$$3(2x-2)+5(5-2x)\le 15 \iff 6x-6+25-10x\le 15 \iff -4x\le -4 \iff x\ge 1$$

$$4(x+2)-3(2x-3)>9 \iff 4x+8-6x+9>9 \iff -2x>-8 \iff x<4$$

La representación gráfica de las soluciones es la siguiente:



Como podemos ver en la gráfica anterior, la solución del sistema son el conjunto de los valores que verifican $1\le x<4$, esto es, la solución es el intervalo de números reales $[1, 4)$.

EJERCICIOS

10. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-5\le\dfrac{x}{4} \\ \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{3(x-2)}{4}>2-x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+1>2x+10 \\ x^2-6x+8\le 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{4x-12}{5}+\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{x}{6} \\ x^2-6x+5\le 0 \\ \dfrac{x-2}{x-4}>0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x\ge -4 \\ x+3\le 1 \\ 5-x>2x+6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x-5>7-x \\ 3x+1\le x-1 \\ 2(x-2)+x>x-8 \end{cases}$

5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES

Muchos problemas de la vida real se resuelven utilizando inecuaciones o sistemas de inecuaciones, como por ejemplo el siguiente:

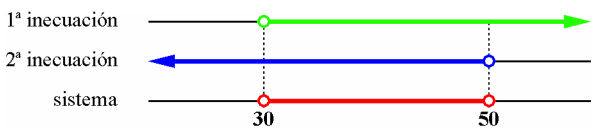
Juan tiene en su casa una colección de discos. Si duplica el número de éstos y quita 5 le quedan más de 55, pero si reduce a la mitad el número de ellos y añade 6, entonces tiene menos de 31. ¿Cuántos discos tiene Juan?

Para resolver el problema seguimos los siguientes pasos:

- Leemos el enunciado con el fin de **comprender** el problema, distinguiendo los datos de las incógnitas.
- Elegimos la **incógnita:** x = números de discos.
- Escribimos el **sistema de inecuaciones** que relaciona los datos y las incógnitas: $\begin{cases} 2x-5>55 \\ \dfrac{x}{2}+6<31 \end{cases}$
- **Resolvemos** el sistema:

$$2x-5>55 \iff 2x>60 \iff x>30$$

$$\frac{x}{2}+6<31 \iff \frac{x}{2}<25 \iff x<50$$



- Resolvemos el **problema:** el número de discos que tiene Juan es cualquier número natural comprendido entre 30 y 50, excluidos ambos.
- **Comprobamos** las soluciones obtenidas: podemos ver que cualquier número natural comprendido entre 30 y 50, por ejemplo 42, verifica las condiciones del enunciado.

$$2\cdot 42-5>55 \iff 79>55$$

$$\frac{42}{2}+6<31 \iff 27<50$$

EJERCICIOS

11. Una empresa de alquiler de coches cobra 18 euros fijos más 0'15 euros por kilómetro recorrido. Otra empresa de la competencia no tiene canon fijo, pero cobra 0'27 euros por kilómetro recorrido. ¿A partir de cuántos kilómetros es más económica la primera?
12. Una fábrica paga a sus viajantes 0'06 euros por artículo vendido y además una cantidad fija de 300'51 euros. Otra fábrica de la competencia paga 0'09 euros por artículo y 180'3 euros fijos. ¿Cuántos artículos debe vender el viajante de la competencia para ganar más dinero que el primero?
13. Mezclamos café de 7'21 euros el kilo con otro de 8'65 euros el kilo, y queremos obtener una mezcla de calidad intermedia cuyo precio no pase de 8'41 euros el kilo. Para conseguir 60 kilogramos de esta calidad intermedia, ¿qué condiciones deberán cumplir los pesos de las dos clases de mezclas?
14. Para llegar puntual al cine tomo un taxi. Después de marcar 0'60 euros por la bajada de bandera, me di cuenta de que llevaba sólo 6'01 euros. Si la entrada costaba 3'91 euros, ¿cuál puede ser el número de pasos del contador (cada paso supone 0'06 euros) para poder entrar en el cine?
15. Encuentra los valores de m para los cuales la ecuación $mx^2+(2m+1)x+m+5=0$ tenga soluciones.
16. ¿Qué número natural se puede añadir al numerador y denominador de la fracción 2/5 si se quiere que la nueva fracción esté comprendida entre 1/2 y 3/4?

Soluciones a los ejercicios propuestos

Nota.- Las soluciones de las distintas inecuaciones vienen dadas de forma algebraica y en intervalos. Se recomienda al alumno que las exprese también gráficamente.

1. Comprueba si los valores que se indican son soluciones de las inecuaciones correspondientes.

   a) $x = -2$ y $x = 6$ de $x + 2 < 8 - x$ b) $x = -1$ y $x = 3$ de $x^2 - 6x + 8 > 0$

   c) $x = 0$ y $x = 2$ de $\dfrac{2x+3}{x-1} > 1$ d) $x = 0$ y $x = 1$ de $\dfrac{2x-1}{x-2} > \dfrac{1}{2}$

   a) *x* = - 2 sí lo es; *x* = 6 no **b) *x* = -1 sí lo es; *x* = 3 no**

   c) *x* = 0 no lo es; *x* = 2 sí **d) Ninguna de ellas es solución**

2. Resuelve la inecuación $2x + 1 > 7 - x$, representando las rectas que determinan ambos miembros: $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 7 - x$.

   ***x* > 2, es decir, el intervalo (2, +¥)**

3. Resuelve la inecuación $2x + 6 > 0$ dibujando la función correspondiente $y = 2x + 6$.

   ***x* > -3, es decir, el intervalo (-3, +¥)**

4. Resuelve las siguientes inecuaciones.

   a) $7x - 2(x - 1) \leq 2(1 - 3x)$ b) $4x - 5 < 2 - 3(1 - 4x)$ c) $(x + 2)(x + 3) < (x - 1)(x + 5)$

   d) $\dfrac{2(x+1)}{3} - 4 \leq 1 + \dfrac{x-2}{2}$ e) $\dfrac{x}{2} - x < 4 - \dfrac{x+1}{7}$ f) $5x - \dfrac{2x-3}{4} > \dfrac{x+1}{3} - (6-x)$

   a) *x* £ 0 º (-¥, 0] **b) *x* > -1/2 º (-1/2, +¥)** **c) *x* < -11 º (-¥, -11)**

   d) *x* £ 20 º (-¥, 20] **e) *x* > -54/5 º (-54/5, +¥)** **f) *x* > -77/38 º (-77/38, +¥)**

5. Resuelve las siguientes inecuaciones por factorización y dibujando la función correspondiente $y = x^2 - 4x + 4$.

   a) $x^2 - 4x + 4 > 0$ b) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ c) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ d) $x^2 - 4x + 4 < 0$

   a) R - {2} **b) R** **c) *x* = 2** **d) No tiene solución**

6. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado reduciéndolas previamente a la forma general.

   a) $x(x^2 + x) - (x - 1)(x^2 - 2) > -4$ b) $x(x + 3) - 2x > 4x + 4$

   c) $4x(x + 3) \geq -9$ d) $(x - 1)^2 - (x + 2)^2 + 3x^2 \leq -7x + 1$

   e) $\dfrac{4x+3}{8} - x > \dfrac{x^2+2}{16} - 1$ f) $\dfrac{(3+2x)(x-1)}{3} - 1 > \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{1+x}{2}$

   a) R **b) *x* < -1 y *x* > 4 º (-¥, -1) È (4, +¥)**

   c) R **d) -4/3 £ *x* £ 1 º [-4/3, 1]**

   e) -10 < *x* < 2 º (-10, 2) **f) *x* < -21/5 y *x* > 1 º (-¥, -21/5) È (1, +¥)**

7. Resuelve algebraica y gráficamente la inecuación de segundo $-x^2 + 2x + 8 \leq 0$.

   ***x* £ -2 y *x* ³ 4 º (-¥, -2] È [4, +¥)**

8. Resuelve las siguientes inecuaciones.

   a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0$ **_x_ < -2 y -1 < _x_ < 1 º (-¥, -2) È (-1, 1)**

   b) $x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x \leq 0$ **−3 £ _x_ £ 0 y _x_ = 2 º [-3, 0] È {2}**

   c) $x^4 - 6x^3 + 30x > 25$ **_x_ < -√5, 1 < _x_ < √5 y _x_ > 5 º (-¥,-√5) È (1,√5) È (5,+¥)**

   d) $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x \leq 0$ **_x_ £ -1 y 0 £ _x_ £ 2 º (-¥, -1] È [0, 2]**

9. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\dfrac{2x-8}{3x+9} < 0$ b) $\dfrac{(x+3)(x-2)}{4-x} > 0$ c) $\dfrac{x^2-4x}{x^2+3x+2} \geq 0$

d) $\dfrac{2x^2-1}{5x-2} \leq \dfrac{4x+1}{10}$ e) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \geq 0$ f) $\dfrac{4x^2+4x-3}{4x^2-1} > 0$

a) $-3 < x < 4 \Leftrightarrow (-3, 4)$ **b) $x < -3$ y $2 < x < 4 \Leftrightarrow (-\infty, -3) \cup (2, 4)$**

c) $x < -2$, $-1 < x \leq 0$ y $x \geq 4 \Leftrightarrow (-\infty, -2) \cup (-1, 0] \cup [4, +\infty)$ **d) $2/5 < x \leq 8/3 \Leftrightarrow (2/5, 8/3]$**

e) $x \leq -1$ y $x \geq 1 \Leftrightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

f) $x < -3/2$, $-1/2 < x < 1/2$ y $x > 1/2 \Leftrightarrow (-\infty, -3/2) \cup (-1/2, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$

10. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - 5 \leq \dfrac{x}{4} \\ \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{3(x-2)}{4} > 2 - x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+1 > 2x+10 \\ x^2 - 6x + 8 \leq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{4x-12}{5} + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{x}{6} \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0 \\ \dfrac{x-2}{x-4} > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x \geq -4 \\ x+3 \leq 1 \\ 5-x > 2x+6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x-5 > 7-x \\ 3x+1 \leq x-1 \\ 2(x-2)+x > x-8 \end{cases}$

a) $0 < x \leq 20 \Leftrightarrow (0, 20]$ **b) $3 < x \leq 4 \Leftrightarrow (3, 4]$** **c) $4 < x \leq 5 \Leftrightarrow (4, 5]$**

d) $x = -2$ **e) Sistema incompatible**

11. Una empresa de alquiler de coches cobra 18 euros fijos más 0'15 euros por kilómetro recorrido. Otra empresa de la competencia no tiene canon fijo, pero cobra 0'27 euros por kilómetro recorrido. ¿A partir de cuántos kilómetros es más económica la primera?
Es más económica la primera empresa a partir de 150 kilómetros.

12. Una fábrica paga a sus viajantes 0'06 euros por artículo vendido y además una cantidad fija de 300'51 euros. Otra fábrica de la competencia paga 0'09 euros por artículo y 180'3 euros fijos. ¿Cuántos artículos debe vender el viajante de la competencia para ganar más dinero que el primero?
El viajante de la competencia debe vender más de 4.007 artículos.

13. Mezclamos café de 7'21 euros el kilo con otro de 8'65 euros el kilo, y queremos obtener una mezcla de calidad intermedia cuyo precio no pase de 8'41 euros el kilo. Para conseguir 60 kilogramos de esta calidad intermedia, ¿qué condiciones deberán cumplir los pesos de las dos clases de mezclas?
Al menos, debemos poner 10 kilogramos de café de 7'21 euros/kilo.

14. Para llegar puntual al cine tomo un taxi. Después de marcar 0'60 euros por la bajada de bandera, me di cuenta de que llevaba sólo 6'01 euros. Si la entrada costaba 3'91 euros, ¿cuál puede ser el número de pasos del contador (cada paso supone 0'06 euros) para poder entrar en el cine?
El contador podía dar 0, 1, 2, 3, 4, ………, 25 pasos.

15. Encuentra los valores de m para los cuales la ecuación $mx^2 + (2m+1)x + m + 5 = 0$ tenga soluciones.
La ecuación tiene soluciones para cualquier número real $m \leq 1/16$.

16. ¿Qué número natural se puede añadir al numerador y denominador de la fracción 2/5 si se quiere que la nueva fracción esté comprendida entre 1/2 y 3/4?
Dicho número natural puede ser 2, 3, 4, 5 ó 6.