FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1. FUNCIONES EXPONENCIALES.

Una función se llama ***exponencial*** si es de la forma $\boldsymbol{y = a^x}$, donde la base $\boldsymbol{a}$ es un número real cualquiera positivo y distinto de 1.

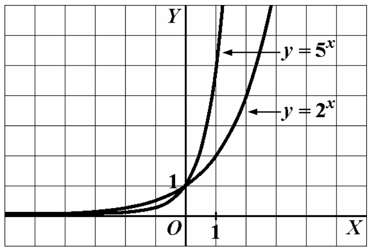
Vamos a distinguir dos casos:

- Base mayor que la unidad: $a > 1$.
- Base positiva y menor que la unidad: $0 < a < 1$.

Funciones exponenciales de base $a > 1$.

Utilizando la calculadora vamos a hallar las potencias de 2 y 5 para representar las funciones $y = 2^x$ e $y = 5^x$.

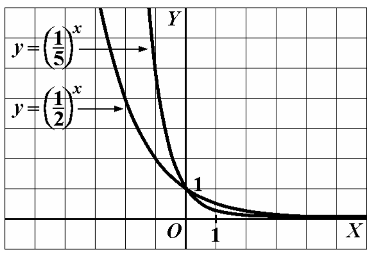
x	$y = 2^x$	$y = 5^x$
–4	0'0625	0'0016
–3	0'125	0'008
–2	0'25	0'04
–1	0'5	0'2
0	1	1
1	2	5
2	4	25
3	8	125
4	16	625



Funciones exponenciales de base $0 < a < 1$.

Del mismo modo podemos representar la función $y = 2^{-x}$. Teniendo en cuenta que $2^{-x} = \dfrac{1}{2^x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, los valores de esta función son inversos de los de 2^x. Representamos a continuación funciones de este tipo.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
–4	16	625
–3	8	125
–2	4	25
–1	2	5
0	1	1
1	0'5	0'2
2	0'25	0'04
3	0'125	0'008
4	0'0625	0'0016



Observando las gráficas anteriores, deducimos las propiedades de estas funciones.

La ***función exponencial*** $\boldsymbol{y = a^x}$ tiene las siguientes propiedades:

- Su **dominio** lo forman el conjunto de los números reales **R**.
- La **imagen** es el conjunto de los números reales positivos $\mathbf{R}^+$, es decir, el intervalo **(0, +¥).**
- Es **continua** en todo su dominio.
- Su gráfica corta al eje *Y* en el punto **(0, 1)** y pasa por el punto **(1, *a*),** pues $a^0 = 1$ y $a^1 = a$.

<u>Si la base ***a* > 1:**</u>

- Es **creciente** en todo su dominio.
- La función tiende a 0 cuando x tiende a $-\infty$, por tanto, la recta $\boldsymbol{y = 0}$ es una **asíntota horizontal.**
- La función tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

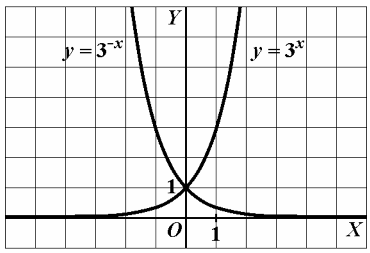
<u>Si la base **0 < *a* < 1:**</u>

- Es **decreciente** en todo su dominio.
- La función tiende a 0 cuando x tiende a $+\infty$, por tanto, la recta $\boldsymbol{y = 0}$ es una **asíntota horizontal.**
- La función tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $-\infty$.

<u>Ejemplo.</u> Representa las funciones $y = 3^x$ e $y = 3^{-x}$.

Teniendo en cuenta que $y = 3^{-x} = \dfrac{1}{3^x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, construimos una tabla de valores:

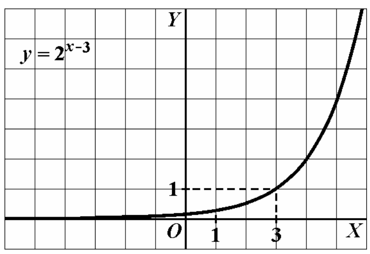
x	$y = 3^x$	$y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$
–3	0’037	27
–2	0’111	9
–1	0’333	3
0	1	1
1	3	0’333
2	9	0’111
3	27	0’037

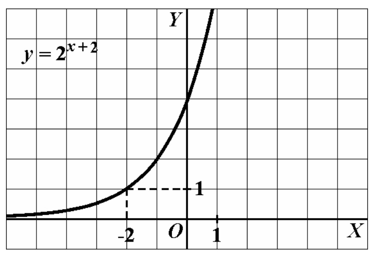


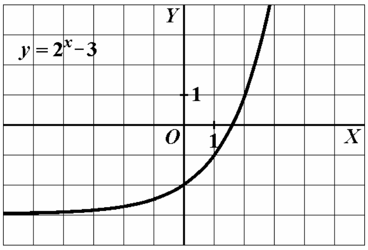
Representando juntas ambas funciones puedes observar que son simétricas respecto del eje *Y*.

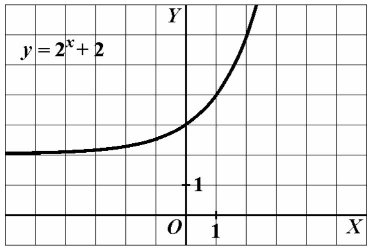
<u>Ejemplo.</u> A partir de la gráfica de la función $y = 2^x$, representa las funciones $y = 2^{x-3}$, $y = 2^{x+2}$, $y = 2^x - 3$ e $y = 2^x + 2$.

- La función $y = 2^{x-3}$ se obtiene trasladando horizontalmente $y = 2^x$ tres unidades a la derecha.
- La función $y = 2^{x+2}$ se obtiene trasladando horizontalmente $y = 2^x$ dos unidades a la izquierda.
- La función $y = 2^x - 3$ se obtiene trasladando verticalmente $y = 2^x$ tres unidades hacia abajo.
- La función $y = 2^x + 2$ se obtiene trasladando verticalmente $y = 2^x$ dos unidades hacia arriba.









EJERCICIOS

1. De entre las funciones exponenciales tiene especial importancia aquellas en las que la base es 10 o el número e. Representas las funciones $y = 10^x$, $y = e^x$, $y = 10^{-x}$ e $y = e^{-x}$.
2. Dibuja y relaciona las siguientes funciones.
   a) $y = 3^x$ $\quad y = 3^{x-1}$ $\quad y = 3^{x+1}$
   b) $y = 2^x$ $\quad y = 2^x - 5$ $\quad y = 2^x + 1$.
3. Dibuja y relaciona las siguientes funciones.
   a) $y = 2^{-x}$ $\quad y = 2^{-x+1}$ $\quad y = 2^{-x-1}$
   b) $y = 2^{-x}$ $\quad y = 2^{-x} - 5$ $\quad y = 2^{-x} + 1$
4. Dibuja y relaciona las siguientes funciones.
   a) $y = e^x$ $\quad$ b) $y = e^x + 1$ $\quad$ c) $y = e^{x-2}$ $\quad$ d) $y = \mathrm{e}^{-x+2} + 2$
5. Estudia la simetría de la función $y = 2^{|x|}$ y represéntala gráficamente.
6. Dada la función exponencial $f(x) = ka^x$, se sabe que $f(0) = 5$ y $f(3) = 40$. Halla la constante k y la base a.

2. FUNCIONES LOGARÍTMICAS.

Una función se llama ***logarítmica*** si es de la forma $\boldsymbol{y = \log_a x}$, donde la base $\boldsymbol{a}$ es un número real cualquiera positivo y distinto de 1.

Nuevamente distinguimos dos casos:

- Base mayor que la unidad: $a > 1$.
- Base positiva y menor que la unidad: $0 < a < 1$.

Funciones logarítmicas de base $a > 1$.

A continuación aparece una tabla de valores de la función $y = \log_2 x$. Para completar esta tabla con ayuda de la calculadora se utiliza la igualdad vista en la unidad 2, que permite cambiar de base los logaritmos:

$$y = \log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$$

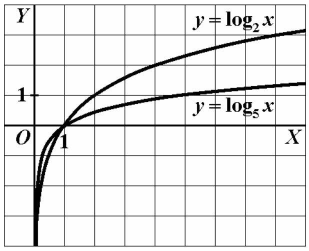
Por ejemplo: $\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} = 2'322$, $\log_2 17 = \dfrac{\log 17}{\log 2} = 4'087$, …

x	…	-1	0	2^{-6}	2^{-5}	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
$y = \log_2 x$	…	error	error	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

De forma análoga construimos una tabla de valores para la función logarítmica $y = \log_5 x$:

x	…	-1	0	5^{-6}	5^{-5}	5^{-4}	5^{-3}	5^{-2}	5^{-1}	1	5	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6
$y = \log_5 x$	…	error	error	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Representamos gráficamente ambas funciones:

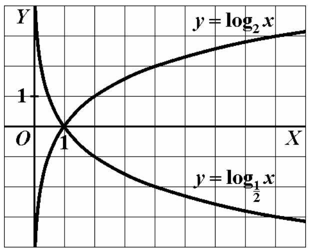


Funciones logarítmicas de base 0 < *a* < 1.

Para estudiar la función $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ basta tener en cuenta, aplicando las propiedades de los logaritmos, que:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log x}{\log \frac{1}{2}} = \frac{\log x}{\log 1 - \log 2} = \frac{\log x}{0 - \log 2} = -\frac{\log x}{\log 2}$$

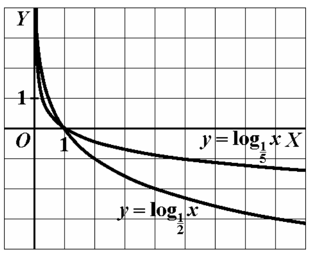
Por tanto, la función $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ es opuesta a $y = \log_2 x$, y su gráfica la obtenemos por simetría respecto del eje *X*.



La gráfica de la función $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ es análoga a la de la función $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Con ayuda de una calculadora construimos una tabla de valores para representar dicha función:

x	…	-1	0	5^{-6}	5^{-5}	5^{-4}	5^{-3}	5^{-2}	5^{-1}	1	5	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6
$y = \log_{\frac{1}{5}} x$	…	error	error	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6

Representamos conjuntamente las funciones $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$:



Observando las gráficas anteriores, deducimos las propiedades de estas funciones.

La ***función logarítmica*** $\mathbf{y = \log_a x}$ tiene las siguientes propiedades:

- Su **dominio** es el conjunto de los números reales positivos $\mathbf{R}^+$ **= (0, +¥).**
- La **imagen** es todo el conjunto de los números reales **R**.
- Es **continua** en todo su dominio.
- Su gráfica corta al eje X en el punto **(1, 0)** y pasa por el punto **(*a*, 1),** pues $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$.

<u>Si la base ***a* > 1:**</u>

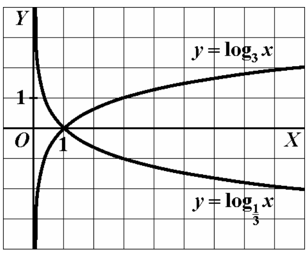
- Es **creciente** en todo su dominio.
- La función tiende a +∞ cuando $x \to 0^+$, por tanto, la recta $\mathbf{x = 0}$ es una **asíntota vertical.**
- La función tiende a +∞ cuando x tiende a +∞.
- La función es **negativa** para valores de $\mathbf{x < 1}$ y **positiva** para valores de $\mathbf{x > 1}$.

<u>Si la base **0 < *a* < 1:**</u>

- Es **decreciente** en todo su dominio.
- La función tiende a –∞ cuando $x \to 0^+$, por tanto, la recta $\mathbf{x = 0}$ es una **asíntota vertical.**
- La función tiende a –∞ cuando x tiende a +∞.
- La función es **positiva** para valores de $\mathbf{x < 1}$ y **negativa** para valores de $\mathbf{x > 1}$.

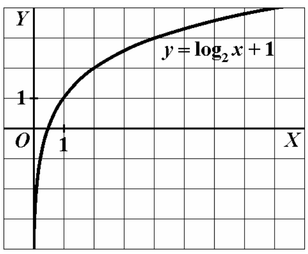
<u>**Ejemplo.**</u> Representa las funciones $y = \log_3 x$ y su opuesta $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

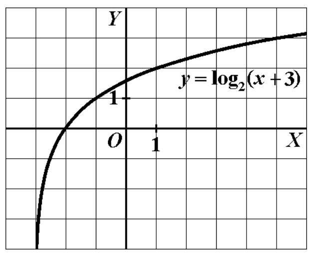
x	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	1	3	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
$y = \log_3 x$	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	6	5	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4	–5	–6



<u>**Ejemplo.**</u> A partir de la gráfica de la función $y = \log_2 x$ representa las funciones $y = \log_2 x + 1$ e $y = \log_2 (x + 3)$.

- La función $y = \log_2 x + 1$ se obtiene trasladando verticalmente $y = \log_2 x$ una unidad hacia arriba.
- La función $y = \log_2 (x + 3)$ se obtiene trasladando horizontalmente $y = \log_2 x$ tres unidades a la izquierda.





EJERCICIOS

7. De todas las funciones logarítmicas tiene especial importancia aquellas en las que la base es 10 o el número e. Representas las funciones $y = \log x$ e $y = \ln x$.
8. Halla el dominio de las siguientes funciones.
   a) $y = \log x^2$ b) $y = \log(x^2 - 4)$ c) $y = \log(x^2 - 5x + 6)$
   d) $y = \log\sqrt{x^2 - 9}$ e) $y = \log\dfrac{x-1}{x+1}$
9. Halla el dominio y estudia la simetría de las siguientes funciones.
   a) $y = \log x^4$ b) $y = \ln |x|$
   Represéntalas gráficamente.
10. Escribe la expresión de la segunda función a partir de la primera y dibuja las gráficas de cada una de ellas.
    a) $y = \log_2 x$ $y = \log_4 x$
    b) $y = \log_5 x$ $y = \log_{25} x$
11. Dibuja la segunda función a partir de la primera.
    a) $y = \log_2 x$ $y = \log_2(x+2)$
    b) $y = \log_3 x$ $y = \log_3(x-2)$
12. Dibuja la segunda función a partir de la primera.
    a) $y = \log_3 x$ $y = 1 + \log_3 x$
    b) $y = \log_3 x$ $y = 2 + \log_5(x+2)$
    c) $y = \log_5 x$ $y = 1 + \log_5(x-2)$
13. Dibuja y relaciona las siguientes funciones.
    a) $y = \ln x$ b) $y = \ln x + 1$ c) $y = \ln(x + 1)$ d) $y = 2 + \ln(x - 3)$

3. RELACIÓN ENTRE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

Hallemos la función recíproca de la función exponencial $y = a^x$. Para ello, despejamos la variable x en dicha expresión tomando logaritmos en ambos miembros:

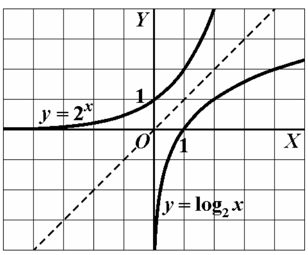
$$y = a^x \iff \log y = \log a^x \iff \log y = x \cdot \log a \iff x = \frac{\log y}{\log a} \iff x = \log_a y$$

Se intercambian las variables x e y: $y = \log_a x$, con lo que la función recíproca es: $f^{-1}(x) = \log_a x$.

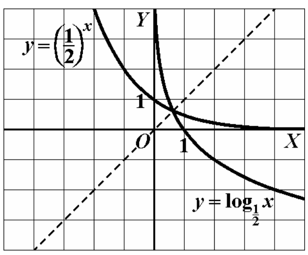
Las funciones $\boldsymbol{y = a^x}$ e $\boldsymbol{y = \log_a x}$ son **recíprocas;** por tanto, sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Comprobamos este resultado con funciones ya estudiadas:

Base mayor que la unidad: $a > 1$



Base positiva y menor que la unidad: $0 < a < 1$



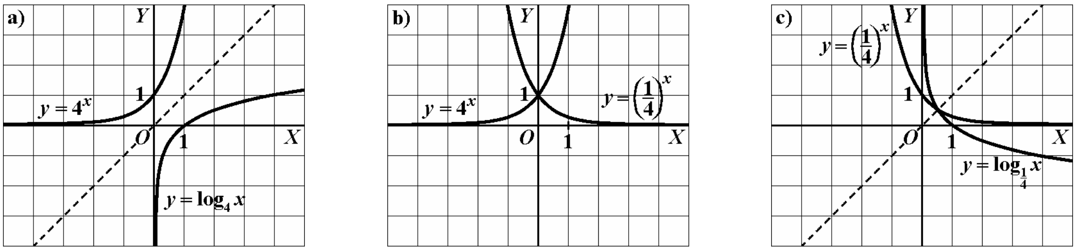
En las gráficas anteriores se puede observar la simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante. Esta relación entre funciones exponenciales y logarítmicas permite construir unas funciones a partir de las otras.

Ejemplo. Representa la función $y = 4^x$, y a partir de su gráfica representa las gráficas de las funciones:

a) $y = \log_4 x$ b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ c) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

Construimos una tabla de valores para la función $y = 4^x$:

x	…	–3	–2	–1	0	1	2	3	…
$y = 4^x$	…	0’015625	0’0625	0’25	1	4	16	64	…



a) Representamos $y = 4^x$ a partir de la tabla de valores. La función $y = \log_4 x$ la obtenemos por simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

b) A partir de la gráfica de $y = 4^x$ obtenemos la de $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ por simetría respecto del eje de ordenadas.

c) La gráfica de $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ la obtenemos a partir de $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ por simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Ejemplo. Halla la función recíproca de $y = 3^{2x-1}$.

Para hallar la función inversa debemos despejar la variable x y después intercambiar ambas variables. Tomando logaritmos en ambos miembros obtenemos:

$$y = 3^{2x-1} \Leftrightarrow \log y = \log 3^{2x-1} \Leftrightarrow \log y = (2x-1)\cdot\log 3 \Leftrightarrow 2x-1 = \frac{\log y}{\log 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = \log_3 y \Leftrightarrow 2x = \log_3 y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{\log_3 y + 1}{2}$$

La función recíproca de $y = 3^{2x-1}$ es, por tanto, $y = \frac{\log_3 x + 1}{2}$.

EJERCICIOS

14. Representa la función $y = 6^x$, y a partir de su gráfica representa las gráficas de las siguiente funciones.

a) $y = \log_6 x$ b) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ c) $y = \log_{\frac{1}{6}} x$

15. Halla la función recíproca de las siguientes funciones.

a) $y = 6^{x/5}$ b) $y = 2^{3x-4}$ c) $y = 4^{-2x-1}$

4. APLICACIONES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

- **Interés compuesto.**

Una persona ingresa 1.000.000 de pesetas en un banco al 7 % anual. Los intereses producidos al final de cada año no se retiran, sino que se acumulan al capital para producir nuevos intereses al año siguiente, y así sucesivamente.

a) ¿Qué capital tendrá al año, a los dos años, tres años, etc.?
b) ¿Cuánto tiempo tendrá que transcurrir para duplicar el dinero que ingresó?
c) *Si en lugar de abonar los intereses al final del año se abonaran al final de cada trimestre, ¿qué capital tendría al cabo de 5 años?*

a) Los intereses que produce un millón al 7 % al final del primer año son: $1.000.000 \cdot \frac{7}{100} = 1.000.000 \cdot 0'07$

Al final del año tendrá el capital más los interese producidos:

$$1.000.000 + 1.000.000 \cdot 0'07 = 1.000.000 \cdot (1 + 0'07) = 1.000.000 \cdot (1'07) = 1.070.000$$

Al final del segundo año tendrá este último capital más los nuevos interese producidos:

$$1.070.000 + 1.070.000 \cdot 0'07 = 1.070.000 \cdot (1 + 0'07) = 1.070.000 \cdot (1'07) = 1.000.000 \cdot (1'07)^2 = 1.144.900$$

Para los años sucesivos formamos la siguiente tabla:

Años transcurridos	**Capital formado**
0	1.000.000
1	$1.000.000 \cdot (1'07) = 1.070.000$
2	$1.000.000 \cdot (1'07)^2 = 1.144.900$
3	$1.000.000 \cdot (1'07)^3 = 1.225.043$
4	$1.000.000 \cdot (1'07)^4 = 1.310.796$
…	…
x	$\mathbf{1.000.000 \times (1'07)^x}$

A la vista de la tabla se deduce que el capital formado al cabo de x años será: $C = 1.000.000 \cdot (1'07)^x$

b) Para saber el tiempo en qué duplicará el capital basta con resolver la ecuación $2.000.000 = 1.000.000 \cdot (1'07)^x$:

$$2.000.000 = 1.000.000 \cdot 1'07^x \Leftrightarrow 2 = 1'07^x$$

Tomamos logaritmos en ambos miembros: $\log 2 = \log 1'07^x \Leftrightarrow \log 2 = x \cdot \log 1'07 \Leftrightarrow x = \frac{\log 2}{\log 1'07} \cong 10'2$

Luego en algo más de 10 años duplicará el capital ingresado.

c) Si los interés se abonan trimestralmente (4 periodos al año), los intereses producidos al final del primer trimestre son:

$$1.000.000 \cdot \frac{0'07}{4}$$

con lo que el capital al finalizar este primer trimestre será de $1.000.000 \cdot \left(1 + \frac{0'07}{4}\right)$ pesetas.

Siguiendo un procedimiento análogo al apartado a), al final del segundo trimestre el capital formado será:

$$1.000.000 \cdot \left(1 + \frac{0'07}{4}\right)^2$$

y así sucesivamente, con lo que al cabo de 5 años, el capital formado será:

$$1.000.000 \cdot \left(1 + \frac{0'07}{4}\right)^{4 \cdot 5} = 1.000.000 \cdot \left(1 + \frac{0'07}{4}\right)^{20} = 1.414.778 \text{ pesetas}$$

En general, un *capital inicial* C_0 a un *rédito* r (expresado en tanto por uno anual) y a un interés compuesto que se abona anualmente, se convierte al cabo de t años en el siguiente capital C_t:

Al final del primer año: $C_1 = C_0 + C_0 \cdot r = C_0 \cdot (1 + r)$

Al final del segundo año: $C_2 = C_1 + C_1 \cdot r = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$

Al final del tercer año: $C_3 = C_2 + C_2 \cdot r = C_2 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^3$

… …

Al final del año t-ésimo: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$

Interés compuesto es una ley de capitalización tal que los intereses producidos al final de cada periodo se acumulan al capital para producir nuevos intereses en el periodo siguiente.

Un ***capital inicial*** $\boldsymbol{C_0}$ a un ***rédito*** $\boldsymbol{r}$ (expresado en tanto por uno anual) y a un interés compuesto se convierte al cabo de ***t* años** en el siguiente capital:

- $\boldsymbol{C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t}$ si los intereses se abonan anualmente;
- $\boldsymbol{C_t = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}}$ si los intereses se abonan cada ***n*** periodos anuales.

- **Otras aplicaciones.**

Muchos fenómenos siguen leyes análogas a la del interés compuesto; por ejemplo, el ***crecimiento de poblaciones,*** ya sean personas, animales, bacterias, madera de un bosque, etc.

Ejemplo. Una ciudad tiene en la actualidad un censo de 2.354.478 personas. Si la tasa de crecimiento anual es del 3 %, ¿cuántas personas habrá dentro de 10 años?

$P = 2.354.478 \cdot (1 + 0'03)^{10} = 3.164.222$ personas.

EJERCICIOS

16. Un fabricante aumenta el precio de sus productos según el IPC, que en los últimos 10 años ha tenido un crecimiento anual medio del 6 %. ¿Cuál es el precio actual de un producto que hace 10 años costaba 20.000 pesetas?
17. Se calcula que un bosque tiene 24.000 m^3 de madera y que aumenta un 3'5 % al año. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la cantidad de madera si sigue creciendo en estas condiciones? Otro bosque tiene 50.000 m^3 y la misma tasa de crecimiento. ¿Tardará el mismo tiempo en duplicarse? ¿Depende el tiempo de duplicación de la cantidad de madera inicial?
18. Un pueblo creció en forma exponencial de 10.000 habitantes en 1970 a 14.000 habitantes en 1980. Suponiendo que continúe el mismo ritmo de crecimiento, ¿cuál será la población en el año 2000?
19. Un ordenador se deprecia de forma gradual a razón del 25 % anual. Si hoy compramos un ordenador que cuesta 200.000 pesetas:
    a) ¿Cuál será su valor dentro de 3 años y medio?
    b) ¿Cuál será su valor dentro de 15 meses?
20. Una población tiene una tasa de crecimiento anual del 2 %. Se pide:
    a) La función exponencial del crecimiento.
    b) Si se mantiene este ritmo de crecimiento, ¿cuánto tiempo tardará en duplicarse la población?
21. Las tasas de interés en los préstamos se camuflan muchas veces poniendo tasas mensuales. ¿Equivale un 1 % de interés mensual a un 12 % de interés anual? Razónalo aplicando la fórmula del interés compuesto.
22. Se calcula que la población en el año 2003 será el doble que en 1993. ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual?