

# matemáticas





# Los números racionales

## Contenidos

1. Números racionales  
Decimales periódicos  
Fracción generatriz  
Ordenación y representación
2. Operaciones con fracciones  
Sumas y restas  
Productos y cocientes  
Operaciones combinadas
3. Potencias de exponente entero  
Definición  
Operaciones
4. Notación científica  
Introducción  
Números extremos  
Operaciones
5. Medida de errores  
Aproximaciones  
Error absoluto y relativo
6. Aplicaciones  
Problemas de aplicación

## Objetivos

- Identificar, ordenar y representar números racionales.
- Efectuar operaciones con fracciones.
- Expresar fracciones como números decimales y números decimales como fracciones.
- Calcular potencias con exponente entero y efectuar operaciones con potencias.
- Aproximar números y calcular el error absoluto y relativo.
- Expresar un número en notación científica y realizar operaciones con números en esta notación.
- Utilizar los números racionales para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.

**Antes de empezar**

Para repasar conceptos fundamentales de fracciones, como son la obtención de fracciones equivalentes o la reducción de fracciones a denominador común... Pulsa...



Cuando lo hayas hecho, pulsa  para acceder a los contenidos de la quincena.

**ACTIVIDAD:**

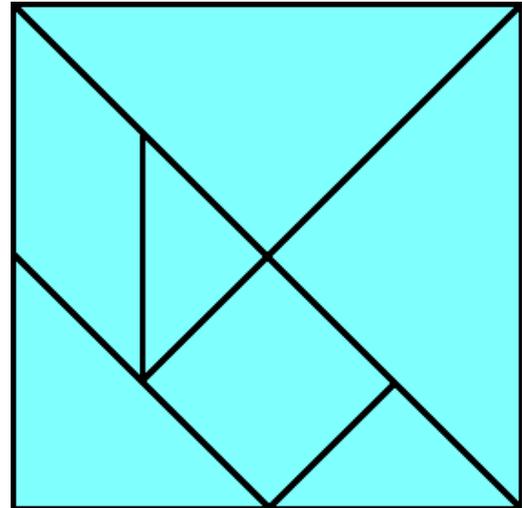
Observa la figura que aparece en la escena.

¿En cuántos triángulos se divide inicialmente? \_\_\_\_\_

Al final sólo quedan los polígonos que se ven en esta figura.

Escribe dentro de cada uno de esos polígonos la fracción que corresponde a su tamaño, considerando el cuadrado completo como una unidad.

En todos los casos escribe esa fracción de dos maneras: Simplificada y con denominador 64.



**1. Números racionales**

**1.a. Decimales periódicos**

Lee el texto de la pantalla.

**EJERCICIO.** Completa el siguiente texto:

Una fracción es un \_\_\_\_\_ entre dos números enteros.

El resultado de esa división da lugar a una \_\_\_\_\_ con un grupo de cifras que \_\_\_\_\_, el llamado \_\_\_\_\_, y que puede ser:

	<b>Ejemplo:</b>	<b>Se escribe:</b>	<b>El período es:</b>
• Decimal _____	$\frac{12}{11} =$ _____		
• Decimal _____	$\frac{31}{15} =$ _____		
• Decimal _____	$\frac{1}{8} =$ _____		

Lee la explicación de la escena...

Haz la actividad de la escena y completa este cuadro con los ejemplos que aparecen y con otros cuatro ejemplos que tú elijas.

Fracción	Expresión decimal	Decimal exacto	Decimal periódico puro	Decimal periódico mixto	Período
$\frac{15}{11}$	1,363636...	No	Si	No	36
$\frac{12}{7}$					
$\frac{31}{15}$					
$\frac{17}{8}$					

**¿Por qué podemos afirmar que la representación decimal de una fracción es siempre un decimal finito o infinito periódico?**

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Ahora pulsa en el botón  para hacer unos ejercicios.

Se abre una escena en la que aparece un número decimal y tienes que indicar de qué tipo es. Completa este cuadro con ocho de los ejercicios que resuelvas en esa escena.

Fracción	Número decimal	Tipo	Fracción	Número decimal	Tipo

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.b. Fracciones generatrices

Lee atentamente en la escena el procedimiento para obtener la fracción generatriz según los diferentes tipos de decimales. Copia en el siguiente recuadro un ejemplo de cada tipo siguiendo paso a paso la explicación de la escena:

	<b>Ejemplo</b>	<b>Proceso:</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Exacto</li> </ul>	<b>x =</b>	Multiplicamos por $10^{\square}$ : _____ x = _____ Despejamos: x = _____
<ul style="list-style-type: none"> <li>Periódico puro</li> </ul>	<b>x =</b>	Multiplicamos por $10^{\square}$ : _____ x = _____ Restamos las dos ecuaciones: _____ x = _____ Despejamos: x = _____
<ul style="list-style-type: none"> <li>Periódico mixto</li> </ul>	<b>x =</b>	Multiplicamos por $10^{\square}$ : _____ x = _____ Multiplicamos por $10^{\square}$ : _____ x = _____ Restamos las dos últimas ecuaciones: _____ x = _____ Despejamos: x = _____

En la parte izquierda aparecen los tres tipos de decimales. Si pasas el ratón por encima de la **palabra destacada** podrás ver la explicación o fórmula de cada uno de los métodos.

Escríbelos en este recuadro:

	<b>Método</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Decimal <b>exacto</b></li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>Decimal <b>periódico puro</b></li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>Decimal <b>periódico mixto</b></li> </ul>	

Ahora pulsa en el botón  para hacer unos ejercicios.

Anota cuatro resultados en la siguiente tabla:

<b>Número decimal</b>	<b>Fracción</b>

<b>Número decimal</b>	<b>Fracción</b>

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.c. Ordenación y representación gráfica

En la escena inferior izquierda, **COMPARACIÓN DE FRACCIONES**, aprenderás a comparar fracciones mediante procedimientos aritméticos.

En primer lugar, repasa el cálculo del mínimo común múltiplo: En la escena, te proponen que calcules el m.c.m. de dos números: calcúlalo y, después, haz clic en **COMPROBAR** para ver si tu cálculo es correcto.

Anota cuatro resultados en esta tabla (practica en la escena hasta que consigas un mínimo de tres aciertos consecutivos).

Par de números	Mínimo común múltiplo	Par de números	Mínimo común múltiplo

En esa misma escena de **COMPARACIÓN DE FRACCIONES:**

Pulsa el botón para repasar el proceso de reducción de fracciones a común denominador.

Lee atentamente el texto en el que se explica cómo hacerlo y después pulsa para practicar. Repite el ejercicio hasta que obtengas un mínimo de 3 aciertos consecutivos.

Anota cuatro resultados en esta tabla:

Fracciones	Fracciones con denominador común	Fracciones	Fracciones con denominador común

Ahora ya puedes abordar la **comparación de fracciones**. Pulsa el botón para empezar.

Haz ejercicios de comparación de fracciones positivas y de fracciones negativas hasta que obtengas un mínimo de tres resultados correctos consecutivos en cada caso.

Anota seis ejercicios en los recuadros siguientes:

Fracciones	Fracciones ordenadas	Fracciones	Fracciones ordenadas

### EJERCICIOS de Refuerzo

Ordena cada uno de los pares de fracciones siguientes:

a)  $-\frac{3}{2}$  y  $-\frac{1}{5}$

b)  $-\frac{1}{3}$  y  $-\frac{1}{2}$

c)  $\frac{3}{5}$  y  $\frac{8}{15}$

d)  $-\frac{3}{5}$  y  $\frac{1}{7}$

En la escena de la derecha, **REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FRACCIONES**, aprenderás a comparar fracciones mediante procedimientos gráficos.

Pulsa la flecha para seguir la explicación.

Debes ver varios ejemplos hasta comprender bien el procedimiento, tanto en el caso de fracciones propias como impropias.

Cuando lo hayas comprendido, pulsa... para hacer unos ejercicios.

Haz tres ejercicios de cada tipo y escribe los resultados en las siguientes tablas:

Fracciones	Fracciones ordenadas

Fracciones	Representación gráfica

### EJERCICIOS

1. Determina de qué tipo son los decimales que resultan de las fracciones siguientes:

a)  $\frac{92}{73}$

b)  $\frac{57}{22}$

c)  $\frac{27}{36}$

2. Calcula las fracciones generatrices de los siguientes decimales:

a)  $x = 2,375$

b)  $x = 43,666\dots$

c)  $x = 4,3666\dots$

3. Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:  $\frac{-5}{10}, \frac{3}{12}, \frac{-9}{9}, \frac{9}{5}, \frac{-9}{2}$

4. Representa en la recta las siguientes fracciones:

a)  $\frac{2}{3}$

b)  $\frac{19}{4} = 4 + \frac{3}{4}$

c)  $-\frac{23}{5} = -5 + \frac{2}{5}$

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

## 2. Operaciones con fracciones

### 2.a. Sumas y restas

Lee el texto en donde se explican las fórmulas para SUMAR y RESTAR fracciones.

**EJERCICIO 1:** Completa.

	Ejemplo
SUMAS: Si las fracciones tienen el mismo denominador _____ _____.	
Si no tienen el mismo denominador, _____ _____.	
RESTAS: _____.	

Lee atentamente la escena de la derecha para comprender el procedimiento a seguir para calcular una suma de fracciones.

**EJERCICIO 2:** Completa.

	Respuestas
Escribe la suma que representa la cantidad que ha comido el primer amigo:	— + —
Para calcular esa suma hay que dividir cada una de las pizzas en el mismo número de porciones. ¿Cuál es el número mínimo de porciones en que hay que dividir las para poder hacer la suma?	
Así podemos expresar esa suma de fracciones como la suma de otras dos que tienen el mismo denominador, indica esa suma y calcula su resultado:	— + — = —

Consulta ahora la escena de la parte inferior izquierda para conocer las propiedades de la suma de fracciones.

**EJERCICIO 3:** Escribe los nombres de las propiedades y un ejemplo de cada una.

	Ejemplo
1	
2	
3	
4	

Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Haz cuatro ejercicios de cada tipo.

Después pulsa **COMPROBAR** para ver si lo has hecho bien.

Utiliza los espacios de la tabla de la página siguiente para resolverlos.

<b>1</b> Suma de dos fracciones	<b>Desarrollo y resultado</b>	<b>1</b> Suma de dos fracciones	<b>Desarrollo y resultado</b>
<b>2</b> Resta de dos fracciones	<b>Desarrollo y resultado</b>	<b>2</b> Resta de dos fracciones	<b>Desarrollo y resultado</b>
<b>3</b> Suma de una fracción y un entero	<b>Desarrollo y resultado</b>	<b>3</b> Suma de una fracción y un entero	<b>Desarrollo y resultado</b>
<b>4</b> Sumas combinadas	<b>Desarrollo y resultado</b>		

Quando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

## 2.b. Productos y cocientes

Lee el texto en donde se explican las fórmulas para calcular PRODUCTOS y COCIENTES de fracciones.

**EJERCICIO 1:** Completa:

	Ejemplo
PRODUCTOS: _____.	
La <b>inversa</b> de una fracción se obtiene _____.	
COCIENTES: _____.	

**EJERCICIO 2:** Lee atentamente la escena de la derecha para comprender el procedimiento a seguir para calcular productos de fracciones y completa lo que falta en esta tabla.

	Respuestas
<p><b>Empecemos con los adosados:</b></p> <p>Cada fase representa <math>\frac{1}{4}</math> del total. Cada zona de adosados el <math>\frac{1}{4}</math> de la fase. ¿Con qué operación se calcula la parte del total reservada a zona de adosados de cada fase y cuál es el resultado?</p>	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
<p><b>¿Qué fracción de la parcela ocupan los adosados?</b></p> <p>Hay adosados en las <math>\frac{1}{4}</math> de las fases y dentro de cada una es <math>\frac{1}{4}</math> de la misma. Indica la operación y el resultado de la fracción del total que ocupan los adosados:</p>	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
<p><b>¿Qué fracción de la parcela ocupan los pisos?</b></p> <p>Hay pisos en las <math>\frac{1}{4}</math> de las fases y dentro de cada zona es <math>\frac{1}{4}</math> de la misma. Indica la operación y el resultado de la fracción del total que ocupan los pisos:</p>	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
<p><b>¿Qué fracción de la parcela ocupan las zonas verdes?</b></p> <p>Hay zona verde en las <math>\frac{1}{4}</math> de las fases y dentro de cada una es <math>\frac{1}{4}</math> de la misma. Indica la operación y el resultado de la fracción del total que ocupan las zonas verdes:</p>	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
<p><b>¿Qué fracción de la parcela ocupan las zonas de servicios?</b></p> <p>Hay Servicios en las <math>\frac{1}{4}</math> de las fases y dentro de cada una es <math>\frac{1}{4}</math> de la misma. Indica la operación y el resultado de la fracción del total que ocupan las zonas de servicio:</p>	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
<b>Resumiendo</b>	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

**EJERCICIO 3:** Consulta ahora la escena de la parte inferior izquierda para conocer las propiedades del producto de fracciones. Escribe los nombres de las propiedades y un ejemplo de cada una en esta tabla.

	Ejemplo
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Haz cuatro ejercicios de cada tipo. Después pulsa **COMPROBAR** para ver si lo has hecho bien. Utiliza los espacios de la tabla de la página siguiente para resolverlos.

<b>Producto de dos fracciones</b>	<b>Desarrollo y resultado</b>	<b>Producto de dos fracciones</b>	<b>Desarrollo y resultado</b>
<b>Cociente de dos fracciones</b>	<b>Desarrollo y resultado</b>	<b>Cociente de dos fracciones</b>	<b>Desarrollo y resultado</b>
<b>Producto de una fracción y un entero</b>	<b>Desarrollo y resultado</b>	<b>Producto de una fracción y un entero</b>	<b>Desarrollo y resultado</b>
<b>P. de un entero y una fracción</b>	<b>Desarrollo y resultado</b>	<b>P. de un entero y una fracción</b>	<b>Desarrollo y resultado</b>
<b>Cociente de una fracción y un entero</b>	<b>Desarrollo y resultado</b>	<b>Cociente de una fracción y un entero</b>	<b>Desarrollo y resultado</b>
<b>Cociente de un entero y una fracción</b>	<b>Desarrollo y resultado</b>	<b>Cociente de un entero y una fracción</b>	<b>Desarrollo y resultado</b>

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2.c. Operaciones combinadas

Lee el texto en el que se recuerdan las **reglas de prioridad**.

**EJERCICIO 1:** Escribe en los círculos el nº de orden de la correspondiente operación.

Si no hay paréntesis	Orden en que debe hacerse	Si hay paréntesis	Orden en que debe hacerse
Sumas y restas	○	Sumas y restas	○
Productos y cocientes	○	Operar los paréntesis	○
		Productos y cocientes	○

**EJERCICIO 2:** Observa en la escena distintos ejemplos de cálculo con operaciones combinadas hasta que hayas comprendido bien el proceso. A continuación, haz dos ejercicios de cada tipo en los siguientes recuadros, sin consultar la solución hasta que los hayas finalizado. Comprueba después si lo has hecho bien:

<b>1</b>	<b>Operaciones sin paréntesis</b>		
<b>2</b>	<b>Operaciones con paréntesis</b>		
<b>3</b>	<b>Operaciones con paréntesis anidados</b>		

**4**
**Operaciones con paréntesis implícitos**

--	--

### EJERCICIOS

5. Calcula  $\frac{-1}{11} + \frac{9}{8}$
6. Calcula  $\frac{-9}{5} - \frac{-7}{12}$
7. Calcula  $\frac{-9}{5} - 7$
8. Calcula  $\frac{-9}{5} - \frac{-7}{12} + \frac{2}{10} + 9 - \frac{-8}{5}$
9. Calcula  $\frac{-1}{7} \cdot \frac{-6}{-5}$
10. Calcula  $\frac{-1}{7} : \frac{-6}{-5}$
11. Calcula  $\frac{-1}{7} \cdot (-6)$
12. Calcula  $(-6) \cdot \frac{-1}{7}$
13. Calcula  $\frac{-1}{7} : (-6)$
14. Calcula  $(-6) \cdot \frac{-1}{7}$
15. Calcula  $\frac{4}{6} : 4 + \frac{1}{7} - \frac{6}{4} \cdot 3 - \frac{2}{6} - 2$
16. Calcula  $\frac{4}{6} + \left(\frac{1}{7} \cdot 7\right) \cdot 7 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} : \frac{7}{6}\right)$
17. Calcula  $\frac{\frac{5}{7} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{2}} : \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}}$

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3. Potencias de exponente entero

#### 3.a. Definición

Lee la definición de potencia de exponente entero. Fíjate, en especial, en la definición de potencia de exponente negativo.

EJERCICIO 1: Completa.

$$a^n = \begin{cases} \text{Si } n = 1 \\ \text{Si } n > 1 \\ \text{Si } n = 0 \\ \text{Si } n < 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2: Completa las siguientes igualdades como en el ejemplo:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$5^{-3} = \text{---} = \text{---}$$

$$3^{-2} = \text{---} = \text{---}$$

$$4^{-2} = \text{---} = \text{---}$$

$$6^{-2} = \text{---} = \text{---}$$

$$7^{-3} = \text{---} = \text{---}$$

Pulsa el botón  para hacer ejercicios de cálculo de potencias. Escribe seis en la tabla que hay a continuación. Después de cada ejercicio, pulsa **COMPROBAR** para corregirlo.

<b>Ejercicio 1</b>	<b>Ejercicio 2</b>	<b>Ejercicio 3</b>
<b>Ejercicio 4</b>	<b>Ejercicio 5</b>	<b>Ejercicio 6</b>

En la escena de la derecha puedes ver las PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS.

Pulsa  para avanzar por la escena e ir viéndolas.

Escribe las propiedades en este cuadro con dos ejemplos de cada una.

**RECUERDA      PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS**

1. Para multiplicar potencias de la misma base:

\_\_\_\_\_.

Ejemplos:

--	--

2. Para dividir potencias de la misma base:

\_\_\_\_\_.

Ejemplos:

--	--

3. Para elevar una potencia a otra potencia:

\_\_\_\_\_.

Ejemplos:

--	--

4. Para elevar un producto a una potencia:

\_\_\_\_\_.

Ejemplos:

--	--

5. Para elevar una fracción a una potencia:

\_\_\_\_\_.

Ejemplos:

--	--

→ NOTA: Lee la explicación del uso de paréntesis cuando la base es negativa.

Ejemplos:

--	--

6. Potencias de exponente cero:  $a^0 = \underline{\quad}$

Ejemplos:

--	--

7. Potencias de exponente negativo:  $a^{-n} = \underline{\quad}$

Ejemplos:

--	--

Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3.b. Operaciones con potencias

Lee la explicación: "Cuando se van a efectuar operaciones combinadas... "

**EJERCICIO:** Completa a continuación las **reglas de prioridad** cuando hay potencias.

- Se efectúan en primer lugar: \_\_\_\_\_.
- A continuación \_\_\_\_\_.
- Con los resultados obtenidos se hacen las \_\_\_\_\_.
- Las prioridades anteriores pueden alterarse con \_\_\_\_\_, o también si pueden aplicarse algunas de las propiedades vistas en la página anterior (productos o cocientes de potencias de igual base)

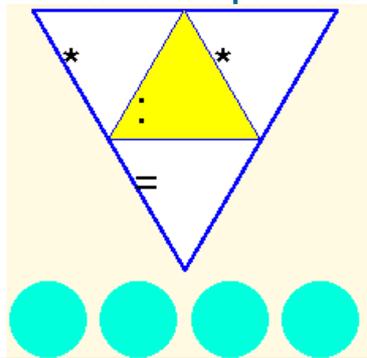
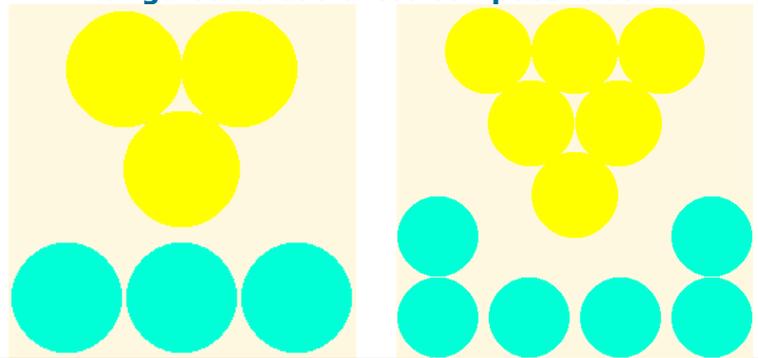
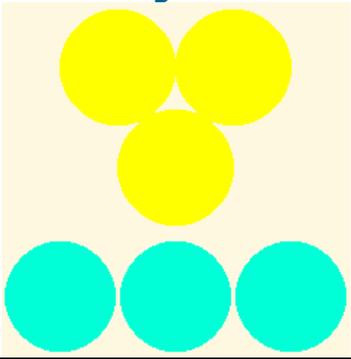
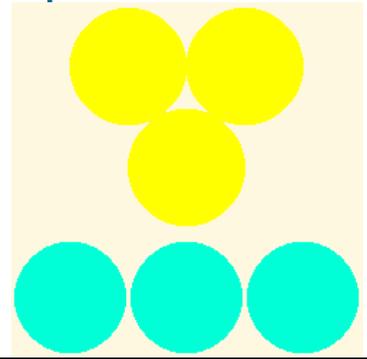
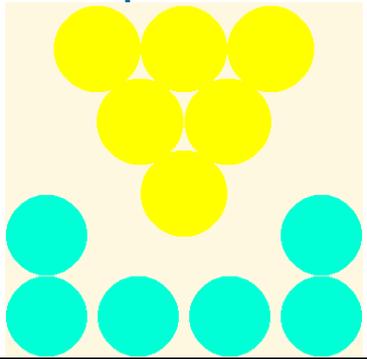
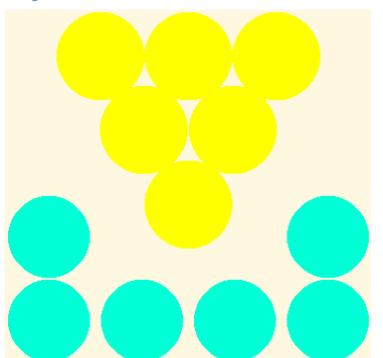
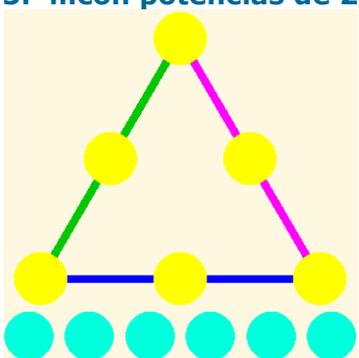
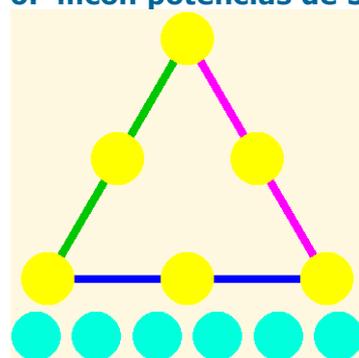
**EJERCICIO 2:** Observa en la escena distintos ejemplos de cálculo con operaciones combinadas que incluyen potencias. A continuación, haz dos ejercicios de cada tipo en los siguientes recuadros, sin consultar la solución hasta que los hayas finalizado. Comprueba después si lo has hecho bien.

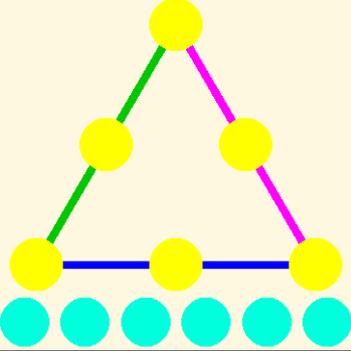
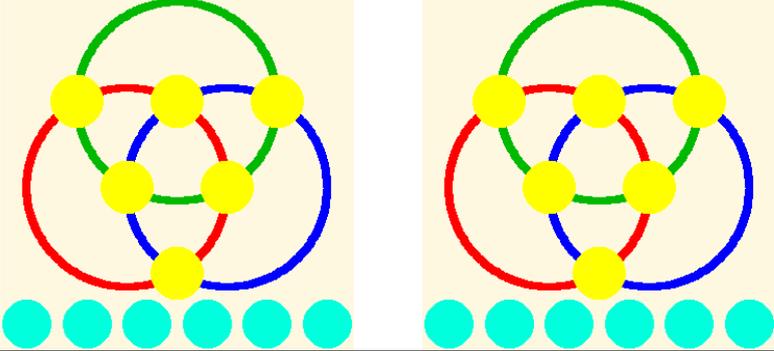
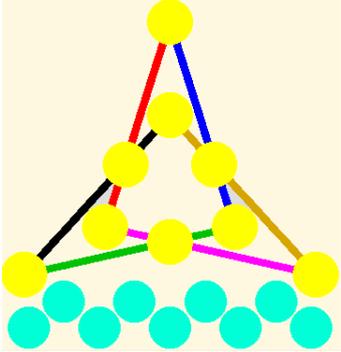
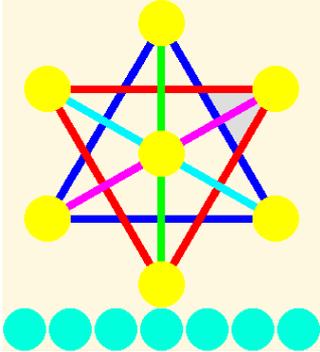
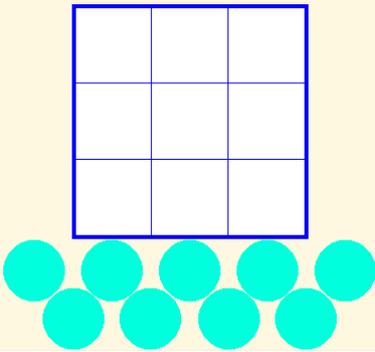
<b>1</b>	<b>Operaciones sencillas</b>
Ejemplo 1.1:	
Ejemplo 1.2:	
<b>2</b>	<b>Transformar números en potencias</b>
Ejemplo 2.1:	
Ejemplo 2.2:	
<b>3</b>	<b>Productos y cocientes de potencias de igual base</b>
Ejemplo 3.1:	
Ejemplo 3.2:	

<b>4</b>	<b>Potencias de igual exponente</b>
Ejemplo 4.1:	
Ejemplo 4.2:	

Haz clic en el botón  irás a una página de juegos con potencias.

Escribe a continuación en cada lugar uno de los resultados de los juegos que vas resolviendo:

<p><b>1. Triángulo de multiplicaciones y divisiones con cuatro potencias.</b></p> 	<p><b>2. Triángulos de cocientes con potencias de 2.</b></p> 		
<p><b>3. Triángulos de cocientes con las potencias de 10</b></p> 	<p><b>4. Triángulo de cocientes con potencias</b></p> 	<p><b>4. Triángulo de cocientes con potencias</b></p> 	
<p><b>4. Triángulo de cocientes con potencias</b></p> 	<p><b>Triángulos mágicos multiplicativos</b></p> <p><b>5. ...con potencias de 2</b></p> 		<p><b>6. ...con potencias de 3</b></p> 

<p><b>7. Triángulo mágico multiplicativo con potencias</b></p> 	<p><b>Tres aros mágicos multiplicativos</b></p> <p><b>8. ...con potencias de 10</b>      <b>9. ...con potencias</b></p> 	
<p><b>10. Estrella mágica multiplicativa de tres puntas, con nueve potencias de 2</b></p> 	<p><b>11. Estrella mágica multiplicativa de seis puntas, con potencias</b></p> 	<p><b>12. Cuadrado mágico multiplicativo de 3x3 con las potencias de 2</b></p> 

**EJERCICIOS**

- 18. Calcula  $\left(\frac{5}{9}\right)^4$
- 19. Calcula  $-\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}$
- 20. Calcula  $3^{-4}$
- 21. Calcula  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
- 22. Calcula  $-\frac{5}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 : \frac{6}{7} : \frac{3}{4} : (-1)^0$
- 23. Transforma 1000 en potencia de 10.
- 24. Transforma 0,00001 en potencia de 10.
- 25. Transforma 16 en potencia de 2.
- 26. Transforma 0,0016 en potencia de 5.
- 27. Expresa cada término como potencia de 10 y simplifica:  $\frac{(-0,1)^{-2} : (-1000)^2 \cdot (0,01)^2}{0,01^{-2} \cdot 10^{-2}}$
- 28. Expresa cada término como potencia de 4 y simplifica:  $\frac{16 \cdot \frac{1}{(-64)^{-2}} \cdot \frac{1}{64^{-2}}}{(-64) : 4}$
- 29. Simplifica todo lo posible la fracción siguiente de manera que el resultado quede en forma de productos y cocientes de potencias de exponente positivo:  $\frac{(2^{-2} \cdot 3)^2 \cdot 5^3}{2^3 \cdot (3 \cdot 7^3)^2}$

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 4. Notación científica

### 4.a. Productos y cocientes por potencias de 10

Lee el texto para repasar las reglas de cálculo del producto y la división de un número por una potencia de 10.

**EJERCICIO:** Completa.

- **Multiplicar por  $10^n$**  (equivale a \_\_\_\_\_ )
  - Si el número es entero \_\_\_\_\_.
  - Si no es entero \_\_\_\_\_.
- **Dividir por  $10^n$**  (equivale a \_\_\_\_\_ )
  - \_\_\_\_\_.

A continuación, ve a la escena y lee tantos ejemplos como sea necesario hasta que comprendas el procedimiento. Copia uno de estos ejemplos en el espacio siguiente:

Pulsa el botón para hacer ejercicios de productos y cocientes por potencias de 10.

Resuelve al menos seis y escríbelos aquí. Pulsa **COMPROBAR** después de resolver cada uno de ellos para ver si lo has hecho bien.

<b>Operación</b>	<b>Resultado</b>	<b>Operación</b>	<b>Resultado</b>
<b>Operación</b>	<b>Resultado</b>	<b>Operación</b>	<b>Resultado</b>
<b>Operación</b>	<b>Resultado</b>	<b>Operación</b>	<b>Resultado</b>

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 4.b. Números muy grandes o muy pequeños

Lee la explicación: "Se dice que un número..."

**EJERCICIO 1:** Completa:

La notación científica es útil para representar números \_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_ . Estos números aparecen con frecuencia en \_\_\_\_\_ , de ahí su nombre.  
 Si un número está escrito en notación científica, tiene el aspecto  **$C_0, C_1 C_2 \dots C_p \cdot 10^n$**   
 **$C_0$**  es una cifra \_\_\_\_\_ de cero y el **orden de magnitud** del número es \_\_\_\_\_.

En la escena, aparecen ejemplos de situaciones en las que se manejan números muy grandes o muy pequeños. Léelos atentamente.

**EJERCICIO 2:** Completa:

Diámetro de la galaxia Andrómeda, con todas sus cifras:	
Diámetro de la galaxia escrito en <b>Notación Científica</b> :	
¿Cuál es el orden de magnitud del diámetro de esa galaxia?	
Distancia de nuestra galaxia a la galaxia Andrómeda:	
¿Cuál es el orden de magnitud de esta distancia?	
¿Cuántas veces, aproximadamente, es mayor la distancia a la galaxia Andrómeda que el diámetro de esa galaxia?	
Diámetro de nuestro Sistema Solar:	
¿Cuál es el orden de magnitud del Sistema Solar?	
Distancia de La Tierra a la Luna:	
¿Cuál es el orden de magnitud de la distancia Tierra-Luna?	
¿Cuántas veces, aproximadamente, es mayor el diámetro del Sistema Solar que la distancia Tierra-Luna?	

**EJERCICIO 3:** En la misma escena, pasamos al "mundo de lo muy pequeño". Completa:

$10^{-1} = \text{---} = 0' \text{---}$	$10^{-3} = \text{---} = 0' \text{---}$	$10^{-5} = \text{---} = 0' \text{---}$
$10^{-2} = \text{---} = 0' \text{---}$	$10^{-4} = \text{---} = 0' \text{---}$	$10^{-6} = \text{---} = 0' \text{---}$
Tamaño de una pulga:		Orden de magnitud
Medida de una arista de silicio		Orden de magnitud
Medida de una escama del ala de una mariposa		Orden de magnitud

Medida de una bacteria del cólera		Orden de magnitud	
Medida de un virus		Orden de magnitud	
Diámetro de un átomo de oxígeno		Orden de magnitud	
Diámetro del núcleo de un átomo de oxígeno		Orden de magnitud	
¿Cuántos átomos de oxígeno caben en un virus, aproximadamente?			
¿Cuántas veces cabría el núcleo a lo largo de un átomo de oxígeno, aproximadamente?			

Pulsa para hacer ejercicios. En encontrarás instrucciones para introducir números en notación científica. Léelas atentamente, porque lo necesitarás para los ejercicios siguientes. En y encontrarás ejercicios para practicar el paso de notación decimal a científica y al revés. Haz cinco ejercicios de cada tipo en la tabla siguiente:

**Paso de forma decimal a científica**

Notación decimal	Notación científica	Notación decimal	Notación científica

**Paso de forma científica a decimal**

Notación decimal	Notación científica	Notación decimal	Notación científica

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 4.c. Operaciones en notación científica

Lee la explicación: "Los números escritos en notación científica sólo suelen presentarse en..." "

EJERCICIO 1: Completa las fórmulas para multiplicar y dividir potencias de 10.

$x = a \cdot 10^n$	}	$x \cdot y = \underline{\hspace{2cm}} \cdot 10$	$\frac{x}{y} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot 10$
$y = b \cdot 10^m$			

**EJERCICIO 2:** Completa:

Distancia de nuestra galaxia a la galaxia Andrómeda:	
Diámetro de la galaxia Andrómeda:	
Comparación entre los órdenes de magnitud (hecho antes):	
Cociente entre las medidas completas:	

Pulsa el botón para hacer ejercicios de operaciones en notación científica.

Escribe seis en la tabla siguiente. Después de resolverlo, pulsa **COMPROBAR** para corregirlo.

Operación	Resultado

## EJERCICIOS

30. Calcula:  $63.785 \cdot 10^8$
31. Calcula  $133,75078 \cdot 10^{10}$
32. Calcula:  $30189 \cdot 10^{-2}$
33. Calcula:  $626,2 \cdot 10^{-5}$
34. Pasa a forma científica el número 94494000
35. Pasa a forma científica el número 0,0000007308
36. Efectúa la siguiente operación dejando el resultado en notación científica:  
 $(5,6733 \cdot 10^2) \cdot (1,6258 \cdot 10^{-6})$
37. Efectúa la siguiente operación dejando el resultado en notación científica:  
 $(1,2319 \cdot 10^{-9}) \cdot (8,4798 \cdot 10^{-1})$
38. Efectúa la siguiente operación dejando el resultado en notación científica:  $\frac{9,9989 \cdot 10^{11}}{1,6422 \cdot 10^{-10}}$
39. Efectúa la siguiente operación dejando el resultado en notación científica:  $\frac{1,3472 \cdot 10^{-10}}{3,217 \cdot 10^4}$

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

## 5. Medida de errores

### 5.a. Aproximaciones

EJERCICIO 1: Lee la explicación: "En la vida real pueden presentarse..." y contesta.

¿En qué situaciones se calcula con valores aproximados??

---



---

En la escena puedes ver tres botones que te permiten acceder ejemplos de aproximaciones.

Pulsa: Aproximaciones con enteros

Se abre un cuadro con varios ejemplos extraídos de buscadores de Internet.

Completa los datos que faltan en los siguientes recuadros:

Buscador	Resultados	Redondeo a las...	Valor exacto entre:
Google			
Ask			
Yahoo			

Pulsa: Aprox. en cálculos no exactos

Se abre un cuadro con una factura. Completa los datos que faltan en los recuadros:

Precio del libro sin IVA	Importe IVA	IVA aprox. con dos cifras	Precio final

Pulsa:

**Aproximaciones en medidas**

En la escena aparece un segmento azul. Puedes medirlo utilizando la regla que aparece en la escena. Completa los datos que faltan en los siguientes recuadros:

Aproximación por defecto	Aproximación por exceso	Valor más probable

EJERCICIO 2: Contesta.

¿Cómo se redondea una cantidad a un cierto orden? Pon un ejemplo.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Pulsa el botón para hacer ejercicios de aproximaciones. Después de resolverlo, pulsa **COMPROBAR** para corregirlo y **OTRO EJEMPLO** para generar uno nuevo.

Cantidad	Aproximación	Expresión en notación científica

Quando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 5.b. Error absoluto y error relativo

Lee la explicación: "Presentamos aquí una serie de medidas... "

**EJERCICIO:** Completa a continuación las siguientes definiciones:

- **Error absoluto:** Es la diferencia entre \_\_\_\_\_ y el \_\_\_\_\_.  
Tiene \_\_\_\_\_ que los valores que se usan.
- **Cota de error:** Es la \_\_\_\_\_ en el que puede encontrarse el valor exacto. Esta medida se usa cuando \_\_\_\_\_.
- **Error relativo:** Es el cociente entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_.  
No tiene \_\_\_\_\_ y puede expresarse también \_\_\_\_\_.

En la escena de la derecha puedes ver ejemplos de estas medidas.

<b>Ejemplo 1: La factura</b>	
Precio sin IVA	
Valor exacto del IVA	
Valor aproximado (dos cifras)	
Error absoluto	
Error relativo	

<b>Ejemplo 2: Los buscadores</b>		
	Google	Ask
Valor exacto		
Valor aproximado		
Cota de error		
Error relativo		

<b>Ejemplo 3: La factura</b>		Cota de error
Aproximación por defecto		0,1
Aproximación por exceso		
Valor más probable		

Pulsa el botón  para hacer ejercicios de aproximaciones. Después de resolverlo, pulsa **COMPROBAR** para corregirlo y **OTRO EJEMPLO** para generar uno nuevo.

Cantidad	Aproximación	Error absoluto	Error relativo

### EJERCICIOS

40. Redondea a las centésimas 171,39664703
41. Redondea a las diezmilésimas y pasa a notación científica 0,0065439
42. Redondea a las decenas de millar y pasa a notación científica 859.417.590
43. 460.000.000 es un redondeo a las decenas de millón de 456.099.072. Calcula el error absoluto y el relativo.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 6. Aplicaciones

### 6.a. Problemas de aplicación

Pulsa los botones superiores  para acceder a los diferentes ejercicios.

Una vez resueltos, pulsa **COMPROBAR** para corregirlos.

**PROBLEMA 1**

La piscina de un chalet dispone de dos entradas de agua para su llenado. Si sólo se usa la primera, la piscina tarda \_\_\_\_ \_\_\_\_ horas en llenarse. Si se usa sólo la segunda, tarda \_\_\_\_ \_\_\_\_ horas. ¿Cuánto tardará en llenarse si se usan las dos a la vez?

**PROBLEMA 2**

El **triángulo de Sierpinski** es una figura geométrica de un tipo especial llamado **fractal**. Se construye así:

Se parte de un triángulo equilátero.

**Nivel 1:** Se elimina el triángulo que une los puntos medios.

**Nivel 2:** Se repite el proceso con los tres triángulos que quedan.

**Nivel 3:** Se repite el proceso con los nueve triángulos que quedan.

Aunque sólo vemos 4 etapas, el proceso sigue indefinidamente.

Si el área del triángulo inicial es de  $1 \text{ m}^2$ , ¿cuál es el área del triángulo de Sierpinski de nivel 4?

**PROBLEMA 3**

El aire presiona sobre cada centímetro cuadrado de la superficie terrestre con una fuerza de 1 kg. Si la superficie del planeta es de, aproximadamente, 510 millones de kilómetros cuadrados, ¿cuánto pesa la atmósfera?

Si la masa de la Tierra es de unas  $6 \cdot 10^{21}$  Tm, ¿cuántas veces es más pesado el planeta que la atmósfera?

**PROBLEMA 4**

En joyería se utiliza la **onza troy** como unidad de peso para el oro. Una onza troy pesa 31,1034768 g.

Si el precio del oro es de 273 €/oz, calcula el precio de un gramo de oro.

Cierto joyero que trabaja el oro dispone de una balanza que comete un error máximo de 5 centésimas de gramo por gramo. Con el precio anterior, calcula cuánto puede ganar o perder por cada onza y por cada gramo a causa del error.



## Recuerda lo más importante – RESUMEN

**Completa:**

Un número racional es: \_\_\_\_\_.

Todo número racional puede expresarse como \_\_\_\_\_.

Las soluciones de la ecuación son \_\_\_\_\_.

Los números racionales están \_\_\_\_\_ y se pueden \_\_\_\_\_.

Los números enteros \_\_\_\_\_.

**Operaciones con fracciones**

Sumar y restar: \_\_\_\_\_.

Multiplicar y dividir: \_\_\_\_\_.

Para elevar a potencias: \_\_\_\_\_.

**Medida de errores**

El error absoluto es \_\_\_\_\_.

El error relativo es \_\_\_\_\_.

La cota de error es \_\_\_\_\_.

**Prioridad de las operaciones**  
 (cuando intervienen potencias)

- 1) \_\_\_\_\_
- 2) \_\_\_\_\_
- 3) \_\_\_\_\_
- 4) \_\_\_\_\_

**Potencias**

 Si  $n > 0$ ,  $a^n =$  \_\_\_\_\_

 Si  $a \neq 0$ ,  $a^0 =$  \_\_\_\_\_ y  $a^{-n} =$  \_\_\_\_\_ En particular:  $a^{-1} =$  \_\_\_\_\_ y  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} =$  \_\_\_\_\_

**Notación científica**

Los números muy grandes o muy pequeños se expresan en notación científica: \_\_\_\_\_.

Para operar con números en notación científica aplicamos \_\_\_\_\_.

 Pulsa  para ir a la página siguiente



## Para practicar

En la página de EJERCICIOS, los encontrarás de varios tipos:

- Problemas para practicar las operaciones con fracciones
- Problemas con potencias y notación científica
- Problemas con valores aproximados

### Problemas para practicar las operaciones con fracciones

Para empezar, pulsa en el control elige opción para escoger el tipo de problema que prefieras. Es conveniente que resuelvas un problema de cada tipo. En el enunciado, rellena el espacio reservado al dato o datos que faltan, y después resuelve el problema.

<p><b>1. Problemas de urbanismo</b></p> <p>El ayuntamiento de una ciudad vende ____ de un solar a una empresa y ____ del resto a otra, quedando sin vender ____ Ha. ¿Qué superficie tiene el solar?</p>	
<p><b>2. ¿Con IVA o sin IVA?</b></p> <p>El importe de la reparación de un coche en un taller es de ____ € sin IVA. ¿A cuánto asciende la factura con IVA? (El IVA es del ____ %).</p>	
<p><b>3. Las rebajas</b></p> <p>Hemos pagado por un vestido ____ . € y en la etiqueta nos indican que se le ha aplicado una rebaja del ____ . %. ¿Cuál era el precio del vestido antes del descuento?</p>	
<p><b>4. En la bodega</b></p> <p>¿Qué cantidad de vino hay almacenado en ____ cajas y ____ . Si cada caja contiene ____ . Botellas de ____ . litro cada una?</p>	
<p><b>5. Llenando un depósito</b></p> <p>Una fuente llena un depósito en ____ horas y otra en ____ horas. ¿Qué fracción del depósito llena cada una en una hora? ¿Y las dos juntas? ¿Cuánto tardarán en llenarlo las dos a la vez?</p>	
<p><b>6. ¿A cuánto está el café?</b></p> <p>En un almacén venden café en paquetes de ____ Kg y descafeinado en paquetes de ____ kg. El precio por kg de ambas variedades es el mismo.</p> <p>Un bar ha comprado ____ paquetes de normal y ____ de descafeinado, pagando en total ____ €. ¿Cuál es el precio del kg de café?</p>	

Pulsa  para ir a la página siguiente

## Problemas con potencias y notación científica

<p><b>1. Copia de seguridad</b></p> <p>Quiero hacer una copia de seguridad de los archivos de mi PC, que ocupan ___ GB. ¿Cuántos DVD de 4,5 GB necesito al menos para hacerlo? ¿Y si uso CD de 700 MB? ¿Y con antiguos disquetes de 1,4 MB? ¿Y con los antiquísimos de 360 MB? (Usa la tabla adjunta).</p>	
<p><b>2. La densidad de los planetas</b></p> <p>Sabiendo que el radio de ___ es de ___ km, calcula su volumen. Si su masa es de ___ kg, calcula su densidad en g/cm<sup>3</sup>.</p>	
<p><b>3. El peso de las moléculas</b></p> <p>En condiciones normales, en un mol de _____ hay <math>6,022 \cdot 10^{23}</math> moléculas de dicho gas y pesan ___ g. Calcula el peso en gramos de una molécula de _____</p>	

Pulsa  para ir a la página siguiente

## Problemas con valores aproximados

<p><b>1. Midiendo tierras</b></p> <p>Medimos una parcela rectangular con una larga cuerda con marcas en cada metro (medidas al margen). Repetimos las medidas con un teodolito, mejorando la precisión. Calcula las cotas de error que se cometen al calcular la superficie en cada caso. Con el precio que se indica, calcula las mayores diferencias de coste en cada caso según la medida que tomemos.</p>	
<p><b>2. Encuesta electoral</b></p> <p>Una empresa de demoscopia ha realizado una encuesta de intención de voto, obteniendo los resultados que ves al margen. Con estos datos la cadena de televisión ABCD informa que el ___ ganará las elecciones. Por su parte, la cadena DCBA dice que hay un empate técnico entre PBP y PTC. ¿Quién crees que tiene razón?</p>	

Pulsa  para ir a la página siguiente

## Autoevaluación



Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.

	Enunciado	Solución	Corrección	
1	Escribe la fracción generatriz del número _____			
2	Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones: _____, _____, _____, _____, _____,			
3	Calcula el resultado de _____			
4	Calcula el resultado de _____			
5	Calcula el resultado de _____			
6	Calcula el resultado de _____			
7	Calcula _____ dejando el resultado como productos o cocientes de potencias de exponente positivo.			
8	Calcula el resultado de _____			
9	Redondea el número _____ a las _____			
10	Un obrero tarda _____ días en levantar una valla. Otro tarda _____ días. ¿Cuánto tardarían trabajando juntos?			

### Actividades para enviar al tutor

Haz las actividades y envíalas a tu profesor/a siguiendo sus instrucciones.

Finalmente, no olvides visitar el enlace **Para saber más** para ampliar tus conocimientos.



## Polinomios

### Contenidos

1. Monomios y polinomios  
Expresiones algebraicas  
Expresión en coeficientes  
Valor numérico de un polinomio
2. Operaciones  
Suma y diferencia  
Producto  
Factor común
3. Identidades notables  
Suma al cuadrado  
Diferencia al cuadrado  
Suma por diferencia

### Objetivos

- Manejar las expresiones algebraicas y calcular su valor numérico.
- Reconocer los polinomios y su grado.
- Sumar, restar y multiplicar polinomios.
- Sacar factor común.
- Conocer y utilizar las identidades notables.

**Antes de empezar**

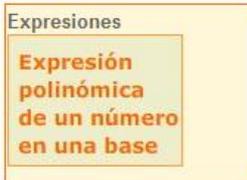
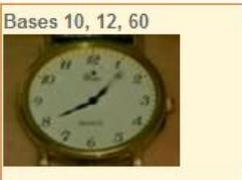
**ACTIVIDADES:**

En la escena, haz clic en  y observa la animación en la que aparece el valor numérico de la expresión  $x^2 + x + 17$  para distintos valores de  $x$ . Después, completa la tabla siguiente como en el ejemplo:



Valor de $x$	Valor numérico de $x^2 + x + 17$
13	$13^2 + 13 + 17 = 169 + 13 + 17 = 199$
2	
7	
11	

A continuación, visita los enlaces de la parte inferior izquierda:



En **Expresiones**, podrás repasar la expresión polinómica de un número en una base y su significado. En **Bases 10, 12, 60** podrás ver un vídeo sobre la base 60, utilizada en la medida de ángulos y del tiempo, y su relación con la base de nuestro sistema de numeración, 10, y la base 12.

**CONTESTA ESTAS CUESTIONES:**

**RESPUESTAS**

¿En la medida de qué magnitudes se usa la base 60?	
¿En que región utilizaban el sistema de numeración de base 60? ¿Entre qué ríos está situada?	
¿En qué se basa el sistema de numeración de base 12?	
¿Cuál es la base del sistema de numeración que usamos nosotros? ¿Por qué?	
¿Cuál puede ser el motivo de la existencia de la base 60?	

Ahora, pulsa  para acceder a los contenidos del tema.

# 1. Monomios y polinomios

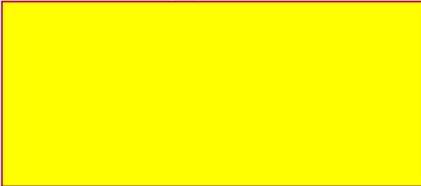
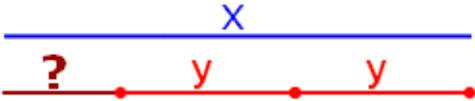
## 1.a. Expresiones algebraicas

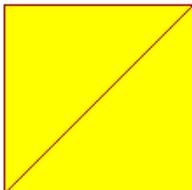
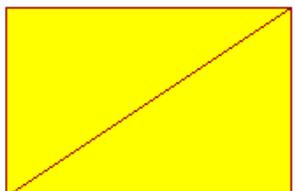
Lee atentamente el texto de la pantalla.

**EJERCICIO.** Completa el siguiente texto:

Un monomio es una _____ que sólo contiene _____ y _____.
Un <b>polinomio</b> es una _____ de varios _____.

A continuación, ve a la escena y explora los diferentes ejemplos.  
 Haz los dibujos y completa las soluciones de las cuestiones:

<b>1</b>	(Haz primero el dibujo) 	Calcula la expresión algebraica que nos da el número e cuadraditos del rectángulo: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 33%;">Expresión</th> <th style="width: 33%;">Grado</th> <th style="width: 33%;">Coeficientes</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="height: 60px;"></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Expresión	Grado	Coeficientes			
Expresión	Grado	Coeficientes						
<b>2</b>		¿Qué monomio nos da el área del rectángulo de base x y altura y? <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 33%;">Expresión</th> <th style="width: 33%;">Grado</th> <th style="width: 33%;">Coeficientes</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="height: 60px;"></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Expresión	Grado	Coeficientes			
Expresión	Grado	Coeficientes						
<b>3</b>		¿Qué expresión nos da el volumen de un cubo de arista x? <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 33%;">Expresión</th> <th style="width: 33%;">Grado</th> <th style="width: 33%;">Coeficientes</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="height: 60px;"></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Expresión	Grado	Coeficientes			
Expresión	Grado	Coeficientes						
<b>4</b>		¿Qué expresión nos da el espacio recorrido a una velocidad constante de x km/h durante t horas? <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 33%;">Expresión</th> <th style="width: 33%;">Grado</th> <th style="width: 33%;">Coeficientes</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="height: 60px;"></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Expresión	Grado	Coeficientes			
Expresión	Grado	Coeficientes						
<b>5</b>		¿Qué polinomio nos da la longitud del segmento marrón? <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 33%;">Expresión</th> <th style="width: 33%;">Grado</th> <th style="width: 33%;">Coeficientes</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="height: 60px;"></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Expresión	Grado	Coeficientes			
Expresión	Grado	Coeficientes						

6	$\frac{x+y}{2}$	¿Qué polinomio nos da la media aritmética de dos números?		
		<b>Expresión</b>	<b>Grado</b>	<b>Coeficientes</b>
7	$3x$ es el triple de $x$	¿Qué polinomio nos da el triple de un número menos cinco?		
		<b>Expresión</b>	<b>Grado</b>	<b>Coeficientes</b>
8	$x^2$ es el cuadrado de $x$	¿Qué polinomio nos da la suma de los cuadrados de dos números?		
		<b>Expresión</b>	<b>Grado</b>	<b>Coeficientes</b>
9	Aplica el teorema de Pitágoras, $x^2 + x^2 = \text{diagonal}^2$ 	¿Qué expresión define la diagonal de un cuadrado?		
		<b>Expresión</b>	<b>Grado</b>	<b>Coeficientes</b>
10	Aplica el teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = \text{diagonal}^2$ 	¿Qué expresión define la diagonal de un rectángulo de base $x$ y altura $y$ ?		
		<b>Expresión</b>	<b>Grado</b>	<b>Coeficientes</b>

Ahora pulsa en el botón  para hacer unos ejercicios.

Se abre una escena en la que aparecen, a la izquierda, diferentes números y potencias de  $x$  y  $y$ , a la derecha, las condiciones que debe verificar el polinomio buscado.

**Practica el ejercicio hasta que consigas tres aciertos consecutivos.**

Cuando acabes ... pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.b. Expresión en coeficientes

Lee atentamente el texto "Un polinomio se puede definir...." y a continuación completa:

La **expresión de un polinomio en coeficientes** consiste en \_\_\_\_\_

Así, por ejemplo, el polinomio  $x^3 + 4x^2 + 3x - 2$  se expresa por \_\_\_\_\_.

Ahora pulsa en el botón  para hacer unos ejercicios. En la parte superior de la escena verás los controles para escoger los coeficientes del polinomio de mayor a menor grado. Modifícalos a tu gusto: elige algún coeficiente igual a 0, 1 o -1 y aprende a escribir el polinomio de la manera usual.

Completa la tabla siguiente con otros cinco ejemplos tal como la muestra inicial:

Coeficientes					Polinomio	Manera usual de escribir el polinomio
gr4	gr3	gr2	gr1	gr0		
1	-3	0	-1	4	$1x^4 + (-3)x^3 + 0x^2 + (-1)x + 4$	$x^4 - 3x^3 - x + 4$

Pulsa en  para hacer ejercicios sobre la expresión en coeficientes de un polinomio.

Hay dos tipos de ejercicio: en uno, aparecerá un polinomio y deberás introducir sus coeficientes con los controles de la parte superior y, seguidamente, pulsar **intro**. En el otro, se da la expresión del polinomio en coeficientes y tendrás que escribir el polinomio en la forma usual. Puedes pulsar **Solución** para corregir tus resultados.

Haz cuatro ejercicios de cada tipo y cópialos en la tabla:

Polinomio	C. gr 3	C. gr 2	C. gr 1	C. gr 0

**Completa:**

Dos polinomios son iguales si \_\_\_\_\_.

En la escena de la derecha aparecen dos polinomios  $P(x)$  y  $Q(x)$ . Tienes que deducir cuál es el valor del coeficiente desconocido "a", en  $Q(x)$ , para que ambos polinomios sean iguales. Practica hasta tener un mínimo de 3 aciertos consecutivos.

<b>P(x)</b>	<b>Q(x)</b>	<b>Valor de a</b>

Cuando acabes ... pulsa para ir a la página siguiente.

**1.c. Valor numérico de un polinomio**

Lee atentamente el texto en el que se relaciona el valor numérico de un polinomio con nuestro sistema de numeración, el decimal, y con el sistema utilizado para la medida del tiempo, el sexagesimal

**Completa:**

 El valor numérico del polinomio  $5x^2 + 2x + 3$  para  $x = 10$  es \_\_\_\_\_, el número de \_\_\_\_\_ que hay en \_\_\_\_ centenas, \_\_\_\_ decenas y \_\_\_\_\_ unidades.

 El valor numérico del polinomio  $5x^2 + 2x + 3$  para  $x = 60$  es \_\_\_\_\_, el número de \_\_\_\_\_ que hay en \_\_\_\_ horas, \_\_\_\_ minutos y \_\_\_\_\_ segundos.

En la escena de la derecha tienes ejemplos de cálculo del valor numérico de un polinomio para un valor determinado de  $x$ .

Modifica el valor de  $x$  con el control y calcula el correspondiente valor numérico del polinomio que aparece en la escena. Puedes utilizar calculadora. Para comprobar si lo has hecho bien, pulsa **Ver el resultado del valor numérico**. Para cambiar de polinomio, pulsa en **Otros polinomios**. Anota seis ejemplos en la tabla inferior, dos de cada opción:

<b>Opción</b>	<b>P(x)</b>	<b>x</b>	<b>Valor numérico</b>
			$P( \quad ) = \underline{\hspace{2cm}} =$
			$P( \quad ) = \underline{\hspace{2cm}} =$
			$P( \quad ) = \underline{\hspace{2cm}} =$
			$P( \quad ) = \underline{\hspace{2cm}} =$

Ahora pulsa en  para ver más ejemplos y hacer ejercicios.

En la primera serie (Serie 1 de 2), aparecerán 7 ejemplos resueltos.  
 En cada ejemplo puedes ver a la derecha, en el recuadro de color naranja, los pasos a seguir.

Haz tantos como necesites hasta entender bien el procedimiento.  
 Para pasar de un ejemplo a otro, pulsa el botón > de la parte superior.  
 A continuación, copia dos de estos ejemplos:

**Ejemplo 1.** Valor numérico del polinomio \_\_\_\_\_ para  $x =$  \_\_\_\_\_

--	--

**Ejemplo 2.** Valor numérico del polinomio \_\_\_\_\_ para  $x =$  \_\_\_\_\_

--	--

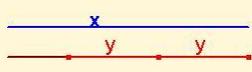
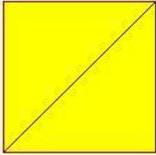
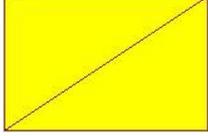
Ahora, para hacer ejercicios, pulsa el botón >> de la parte superior. Accedes a la serie 2 de 2 en la que tienes 10 ejercicios propuestos que debes resolver en la escena.

Anota los resultados de los cuatro últimos ejercicios en esta tabla:

Polinomio	Valor de $x$	Valor numérico del polinomio

### EJERCICIOS

1. Halla las expresiones algebraicas asociadas a cada imagen

<p><b>x</b> <b>Área del rectángulo</b> <b>y</b></p>	 <p><b>Volumen, arista=x</b></p>	<p>Longitud del segmento marrón</p> 	<p>Qué polinomio expresa la <b>media aritmética</b> de dos números <b>x, y</b></p>
<p>El triple de un número menos cinco</p>	<p>La suma de los cuadrados de dos números</p>	 <p>La diagonal de un cuadrado de lado x</p>	 <p>La diagonal de un rectángulo de base x y altura y</p>

2. Escribe un polinomio tal que:

<b>x</b>	<b>-4</b>	El grado de P(x) es <b>7</b>
<b>-5</b>	<b>-2</b>	El coeficiente de mayor grado es <b>-2</b>
<b>+5</b>	<b>x<sup>7</sup></b>	El coeficiente de grado 3 es <b>-5</b>
<b>x<sup>5</sup></b>	<b>x<sup>2</sup></b>	El coeficiente de grado 2 es <b>-3</b>
<b>x<sup>3</sup></b>	<b>-3</b>	El coeficiente de grado 1 es <b>5</b>
		Los demás coeficientes son cero

3. Halla la expresión en coeficientes de los polinomios

$P(x) = 3x^2 - 2x + 1;$

$Q(x) = x^3 - 4$

$R(x) = 0,5x^2 + 3x$

4. Escribe las expresiones polinómicas de los polinomios cuya expresión en coeficientes es:

$P(x) \rightarrow 1 \ 0 \ 3 \ -1$

$Q(x) \rightarrow 3 \ 2 \ 0 \ 0$

$R(x) \rightarrow 3/2 \ -3 \ 0 \ 5$

5. Halla el valor numérico en 1, 0 y -2 de los siguientes polinomios:

POLINOMIO	Valor en 1	Valor en 0	Valor en -2
$x^5 - 2x^3 - x^2$			
$x^2/5 - 1$			
$-2x^3 + \pi x^2$			
$-x^3 + 1, 2x^2 - 1/5$			
$-\sqrt{2} x^2 + 1$			

Cuando acabes ... pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2. Operaciones con polinomios

### 2.a. Sumas y restas

Lee el texto en el que se explica la forma de sumar y restar polinomios.

En la escena, se muestra cómo calcular una suma o una resta utilizando las expresiones en coeficientes de los polinomios.

Pulsa o para ver un ejemplo de suma o resta, respectivamente.

Copia un ejemplo de cada operación:

**SUMA:**

$P(x) \rightarrow$
$Q(x) \rightarrow$
$P(x)+Q(x) \rightarrow$
$P(x)+Q(x) =$

**RESTA:**

$P(x) \rightarrow$
$Q(x) \rightarrow$
$P(x)-Q(x) \rightarrow$
$P(x)-Q(x) =$

Ahora pulsa en para hacer ejercicios.

Aparecerá una escena con dos polinomios y la operación a efectuar.

Haz 6 de estos ejercicios a continuación.

Para comprobar el resultado, pulsa [Calcula P\(x\)±Q\(x\)](#)

y para cambiar de datos, [Otros polinomios](#)

EJEMPLO	Polinomios	Operación		Coeficientes				
$P(x) = \frac{4}{5}x^3 + x^2 - x - 1$  $Q(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$		$P(x)$	→	$\frac{4}{5}$	1	-1	-1	
		+	$Q(x)$	→	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	-2	-3
		RESULTADO			$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{4}$	-3	-4
$P(x) + Q(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - 3x - 4$								

EJERCICIO 1	Operación		Coeficientes			
$P(x) =$	$P(x)$	→				
$Q(x) =$	$Q(x)$	→				
		RESULTADO				
$P(x) \quad Q(x) =$						

<b>EJERCICIO 2</b>	Operación		Coeficientes			
P(x) =	P(x)	→				
Q(x) =	Q(x)	→				
	RESULTADO					
P(x) Q(x) =						

<b>EJERCICIO 3</b>	Operación		Coeficientes			
P(x) =	P(x)	→				
Q(x) =	Q(x)	→				
	RESULTADO					
P(x) Q(x) =						

<b>EJERCICIO 4</b>	Operación		Coeficientes			
P(x) =	P(x)	→				
Q(x) =	Q(x)	→				
	RESULTADO					
P(x) Q(x) =						

<b>EJERCICIO 5</b>	Operación		Coeficientes			
P(x) =	P(x)	→				
Q(x) =	Q(x)	→				
	RESULTADO					
P(x) Q(x) =						

<b>EJERCICIO 6</b>	Operación		Coeficientes			
P(x) =	P(x)	→				
Q(x) =	Q(x)	→				
	RESULTADO					
P(x) Q(x) =						

Quando acabes ... pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2.b. Producto

Antes de pasar a los contenidos de esta página, haz clic en para ver una animación en la que se recuerdan las prioridades aritméticas y los aspectos que hay que tener en cuenta cuando en lugar de operar con números se opera con monomios.

Ahora, lee la explicación del texto y **completa**:

Los polinomios se multiplican \_\_\_\_\_ a \_\_\_\_\_, aplicando la propiedad \_\_\_\_\_ del producto. Y ordenamos los \_\_\_\_\_ según su \_\_\_\_\_.

Igual que con la suma puede resultar cómodo pasar los polinomios a su expresión en coeficientes, tal y como se explica en la escena de la derecha.

Examina diferentes ejemplos hasta que entiendas bien la mecánica de la operación, y copia uno en el recuadro de la derecha: →

$P(x) = -4x^2 - x + 3$

$Q(x) = -4x^2 - 3x$

Se multiplica coeficiente a coeficiente

$P(x) \rightarrow$

$Q(x) \rightarrow$

---

$P(x) \cdot Q(x) \rightarrow$

$P(x) \cdot Q(x) =$

Ahora pulsa en para hacer ejercicios.

En la escena aparecen dos polinomios cuyo producto debes calcular. Haz 6 de estos ejercicios a continuación.

Para comprobar el resultado, pulsa [Calcula  \$P\(x\) \cdot Q\(x\)\$](#)

y para cambiar de datos, [Otros polinomios](#)

P(x)	Q(x)	P(x)·Q(x)

Cuando acabes ... pulsa para ir a la página siguiente.

### 2.c. Factor común

Lee el texto, fijándote bien en el ejemplo en el que se explica el procedimiento para sacar factor común.

Seguidamente, en la escena, introduce el factor común a los coeficientes y la potencia de x que se pueden sacar en todos los monomios, colocando los números adecuados en los recuadros correspondientes y pulsando **intro**. Después, haz clic en **Pulsa para extraer el factor** para ver el resultado de esta operación. Para cambiar de ejercicio pulsa **Otro polinomio**.

Haz diez ejercicios en la tabla siguiente:

P(x)	Factor común	Resultado de extraer factor

Ahora pulsa en  para hacer ejercicios.

Se abrirá una escena con un polinomio en el que debes sacar factor común la máxima potencia posible de x: para ello, habrás de introducir los números adecuados en los recuadros y pulsar **intro**.

Si has hecho bien el ejercicio, aparecerá el mensaje "Pulsa inicio para hacer otro ejercicio".

Si no, aparecerá el botón  Que permite ver el resultado correcto

Haz diez de estos ejercicios en la tabla siguiente:

P(x)	P(x) es igual a

P(x)	P(x) es igual a

### EJERCICIOS

6. Halla  $P(x)+Q(x)$  y  $3 \cdot P(x)-Q(x)$

$$P(x)=x^4+2x^3+3x$$

$$Q(x)=2x^3+x^2-3x+5$$

7. Multiplica  $P(x)=x^3+6x^2+4x-6$  por  $Q(x)=x^3+3x^2+5$

8. Suma  $P(x)$  y  $Q(x)$

$P(x) = 5x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{5}x$
$Q(x) = x^3 - \frac{5}{2}x$

- Multiplica  $P(x)$  y  $Q(x)$

$P(x) = -5x^{10} + 2x^8$
$Q(x) = -5x^9 + x^8$

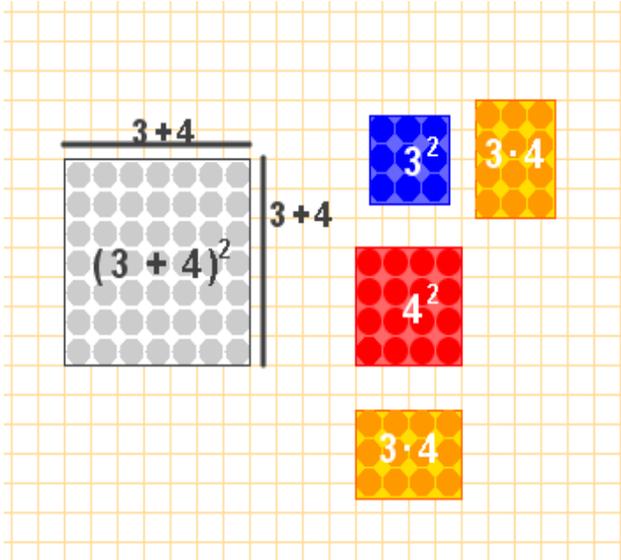
9. Saca factor común:

$P(x) = 4x^{13} - 4x^{11} - 6x^5 - 3x^4$	$P(x) =$
$P(x) = -8x^{10} + 6x^9 - 2x^3 - 4x^2$	$P(x) =$
$P(x) = 6x^5 + x^2 - 4x$	$P(x) =$

Cuando acabes ... pulsa para ir a la página siguiente.

### 3. Identidades notables

#### 3.a. Cuadrado de una suma



En la escena aparece un puzzle que te permitirá deducir la fórmula para obtener el cuadrado de una suma.

Tienes:

- Un cuadrado azul de lado 3, por tanto de área \_\_\_\_\_
- Otro rojo de lado 4 y área \_\_\_\_\_
- Dos rectángulos de lados 3 y 4, luego el área de cada uno es \_\_\_\_\_
- Un cuadrado de lado 3+4, cuya área es \_\_\_\_\_.

Arrastra las piezas de colores para completar el cuadrado gris. Cuando lo hayas hecho, aparecerá en la parte inferior la expresión:

El área del cuadrado gris es la suma de las áreas de las piezas de colores.

Modifica los valores de a y b con los controles



y comprueba la validez de la fórmula para distintos pares de valores.

Completa como en el ejemplo:

a	b	$(a+b)^2$
3	4	$(3+4)^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4$

a	b	$(a+b)^2$

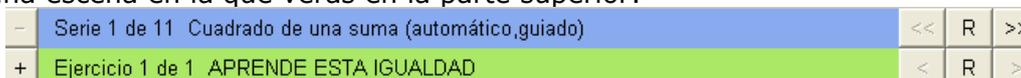
También puedes ver una demostración aritmética de la fórmula en la animación que aparece haciendo clic en .

Copia en este espacio la fórmula que nos da el **cuadrado de una suma**:

Debes reconocer esta igualdad también al contrario, de manera que identifiques el polinomio  $x^2+6x+9$  con la expresión  $(x+3)^2$

Ahora pulsa en para hacer ejercicios.

Se abre una escena en la que verás en la parte superior:



Tendrás que ir avanzando por las 11 series de ejercicios que funcionan de diferentes modos. Completa los ejercicios y ejemplos que se indican en los recuadros siguientes:

**Serie 1. Cuadrado de una suma (automático, guiado)**

$(a+b)^2 =$	Para efectuar el cuadrado de una suma,
	Se efectúa en primer lugar el cuadrado del primer sumando
	El doble del primero por el segundo
	Por último se halla el cuadrado del segundo sumando
	Y sumamos todo <span style="float: right;">Pulsa &gt;&gt;</span>

**Serie 2. Cuadrado de una suma (automático, libre)**

$( \quad + \quad )^2 =$

Pulsa >>

**Serie 3. Cuadrado de una suma (automático, guiado)**

→ Es el mismo ejemplo que en la serie 2, pero con las explicaciones en el recuadro naranja.

**Serie 4. Cuadrado de una suma (automático, libre)**

$( \quad + \quad )^2$

Pulsa >>

**Serie 5. Cuadrado de una suma (automático, guiado)**

→ Es el mismo ejemplo que en la serie 4, pero con las explicaciones en el recuadro naranja.

**Serie 6. Cuadrado de una suma (automático, libre)**

Ejercicio 1 de 5. Trata de comprender los siguientes ejemplos.

$( \quad + \quad )^2$

Escribe el resultado final de cada uno de los otros 4 ejercicios de la serie 6:

Ejercicio 2	$( \quad + \quad )^2 =$	>
Ejercicio 3	$( \quad + \quad )^2 =$	>
Ejercicio 4	$( \quad + \quad )^2 =$	>
Ejercicio 5	$( \quad + \quad )^2 =$	>

Para pasar a la siguiente serie de ejercicios Pulsa >>

**Serie 7. Cuadrado de una suma (automático, guiado)**

$( \quad + \quad )^2 =$	Escribe la fórmula de golpe, sin operar	
	Opera todos los sumandos	
	Resultado	Pulsa >>

**Serie 8. Cuadrado de una suma (escribir, guiado)**

→ Tienes que ir escribiendo las operaciones en cada paso, siguiendo las indicaciones del recuadro naranja. (Recuerda que para elevar al cuadrado se utiliza el la tecla ^)

Ejercicio 1 de 3.

$( \quad + \quad )^2 =$	Escribe la fórmula de golpe, sin operar	
	Opera todos los sumandos	
	Resultado	Pulsa >

Ejercicio 2 de 3.

$( \quad + \quad )^2 =$	Escribe la fórmula de golpe, sin operar	
	Opera todos los sumandos	
	Resultado	Pulsa >

Ejercicio 3 de 3.

$( \quad + \quad )^2 =$	Escribe la fórmula de golpe, sin operar	
	Opera todos los sumandos	
	Resultado	Pulsa >>

**Serie 9. Cuadrado de una suma (automático, libre)**

Ejercicio 1 de 5. Directamente el resultado

$( \quad + \quad )^2 =$	
	Pulsa >

Ejercicio 2 de 5. Directamente el resultado

$( \quad + \quad )^2 =$	
	Pulsa >

Ejercicio 3 de 5. Directamente el resultado

$( \quad + \quad )^2 =$	
	Pulsa >

Ejercicio 4 de 5. Directamente el resultado

$( \quad + \quad )^2 =$	
	Pulsa >

Ejercicio 5 de 5. Directamente el resultado

$( \quad + \quad )^2 =$	
	Pulsa >>

**Serie 10. Cuadrado de una suma (automático, guiado)**

Ejercicio 1 de 3. Ahora al contrario

	Buscamos dos sumandos que sean cuadrados
	El primer sumando es el cuadrado de __
	El segundo sumando es el cuadrado de __
	El otro sumando es el doble de __ por __
	Podemos escribir la expresión inicial como una suma al cuadrado. <span style="float: right;">Pulsa <input type="button" value="&gt;"/></span>

Ejercicio 2 de 3. Ahora al contrario

	Buscamos dos sumandos que sean cuadrados
	El primer sumando es el cuadrado de __
	El segundo sumando es el cuadrado de __
	El otro sumando es el doble de __ por __
	Podemos escribir la expresión inicial como una suma al cuadrado. <span style="float: right;">Pulsa <input type="button" value="&gt;"/></span>

Ejercicio 3 de 3. Ahora al contrario

	Buscamos dos sumandos que sean cuadrados
	El primer sumando es el cuadrado de __
	El segundo sumando es el cuadrado de __
	El otro sumando es el doble de __ por __
	Podemos escribir la expresión inicial como una suma al cuadrado. <span style="float: right;">Pulsa <input type="button" value="&gt;&gt;"/></span>

**Serie 11. Cuadrado de una suma (escribir, guiado)**

Ejercicio 1 de 3. Tienes que escribir la expresión como el cuadrado de una suma.

	Escribe la fórmula de golpe, sin operar
$= ( \quad + \quad )^2$	Resultado <span style="float: right;">Si está "Muy bien", pulsa <input type="button" value="&gt;"/></span>

Ejercicio 2 de 3. Tienes que escribir la expresión como el cuadrado de una suma.

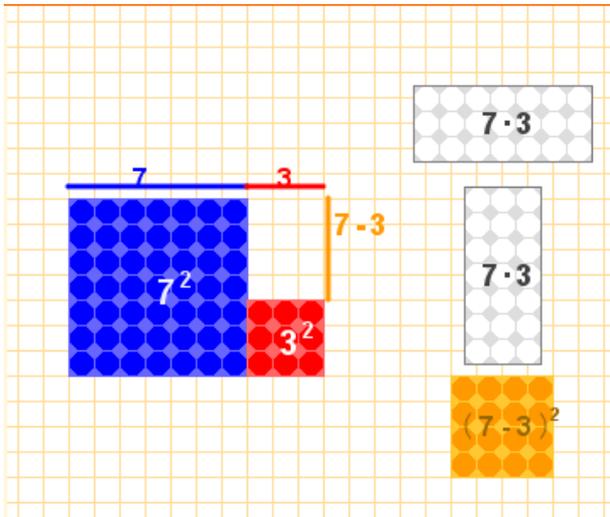
	Escribe la fórmula de golpe, sin operar
$= ( \quad + \quad )^2$	Resultado <span style="float: right;">Si está "Muy bien", pulsa <input type="button" value="&gt;"/></span>

Ejercicio 3 de 3. Tienes que escribir la expresión como el cuadrado de una suma.

	Escribe la fórmula de golpe, sin operar
$= ( \quad + \quad )^2$	Resultado

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.b. Cuadrado de una diferencia



En la escena aparece un puzzle que te permitirá deducir la fórmula para obtener el cuadrado de una diferencia.

Tienes:

- Un cuadrado azul de lado 7, por tanto de área \_\_\_\_\_
- Otro rojo de lado 3 y área \_\_\_\_\_
- Dos rectángulos de lados 3 y 7, luego el área de cada uno es \_\_\_\_\_
- Un cuadrado de lado 7-3, cuya área es \_\_\_\_\_.

Arrastra las piezas de colores para completar la figura roja y azul. Cuando lo hayas hecho, aparecerá en la parte inferior la expresión:

El área del cuadrado gris es la suma de las áreas de las piezas de colores.

Modifica los valores de a y b con los controles

**a**  y **b**

y comprueba la validez de la fórmula para distintos pares de valores.

Completa como en el ejemplo:

a	b	$(a-b)^2$
7	3	$(7-3)^2 = 7^2 + 3^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3$

a	b	$(a-b)^2$

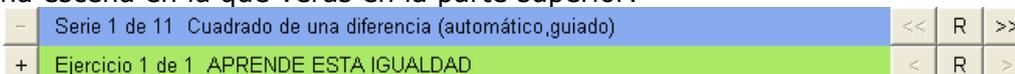
También puedes ver una demostración aritmética de la fórmula en la animación que aparece haciendo clic en .

Copia en este espacio la fórmula que nos da el **cuadrado de una diferencia**:

Debes reconocer esta igualdad también al contrario, de manera que identifiques el polinomio  $x^2-10x+25$  con la expresión  $(x-5)^2$

Ahora pulsa en para hacer ejercicios.

Se abre una escena en la que verás en la parte superior:



Tendrás que ir avanzando por las 11 series de ejercicios que funcionan de diferentes modos. Completa los ejercicios y ejemplos que se indican en los recuadros siguientes:

**Serie 1. Cuadrado de una diferencia (automático, guiado)**

$(a-b)^2 =$	Para efectuar el cuadrado de una diferencia,
	Se efectúa en primer lugar el cuadrado del primer sumando
	El doble del primero por el segundo
	Por último se halla el cuadrado del segundo sumando
	Y sumamos todo <span style="float: right;">Pulsa &gt;&gt;</span>

**Serie 2. Cuadrado de una diferencia (automático, libre)**

$( \quad - \quad )^2 =$

Pulsa &gt;&gt;

**Serie 3. Cuadrado de una diferencia (automático, guiado)**

→ Es el mismo ejemplo que en la serie 2, pero con las explicaciones en el recuadro naranja.

**Serie 4. Cuadrado de una diferencia (automático, libre)**

$( \quad - \quad )^2$

Pulsa &gt;&gt;

**Serie 5. Cuadrado de una diferencia (automático, guiado)**

→ Es el mismo ejemplo que en la serie 4, pero con las explicaciones en el recuadro naranja.

**Serie 6. Cuadrado de una diferencia (automático, libre)**

Ejercicio 1 de 5. Trata de comprender los siguientes ejemplos.

$( \quad - \quad )^2$

Escribe el resultado final de cada uno de los otros 4 ejercicios de la serie 6:

Ejercicio 2	$( \quad - \quad )^2 =$	>
Ejercicio 3	$( \quad - \quad )^2 =$	>
Ejercicio 4	$( \quad - \quad )^2 =$	>
Ejercicio 5	$( \quad - \quad )^2 =$	>

Para pasar a la siguiente serie de ejercicios Pulsa &gt;&gt;

**Serie 7. Cuadrado de una diferencia (automático, guiado)**

$( \quad - \quad )^2 =$	Escribe la fórmula de golpe, sin operar	
	Opera todos los sumandos	
	Resultado	Pulsa <input type="button" value="&gt;&gt;"/>

**Serie 8. Cuadrado de una diferencia (escribir, guiado)**

→ Tienes que ir escribiendo las operaciones en cada paso, siguiendo las indicaciones del recuadro naranja. (Recuerda que para elevar al cuadrado se utiliza el la tecla ^)

Ejercicio 1 de 3.

$( \quad - \quad )^2 =$	Escribe la fórmula de golpe, sin operar	
	Opera todos los sumandos	
	Resultado	Pulsa <input type="button" value="&gt;"/>

Ejercicio 2 de 3.

$( \quad - \quad )^2 =$	Escribe la fórmula de golpe, sin operar	
	Opera todos los sumandos	
	Resultado	Pulsa <input type="button" value="&gt;"/>

Ejercicio 3 de 3.

$( \quad - \quad )^2 =$	Escribe la fórmula de golpe, sin operar	
	Opera todos los sumandos	
	Resultado	Pulsa <input type="button" value="&gt;&gt;"/>

**Serie 9. Cuadrado de una diferencia (automático, libre)**

Ejercicio 1 de 5. Directamente el resultado

$( \quad - \quad )^2 =$	
	Pulsa <input type="button" value="&gt;"/>

Ejercicio 2 de 5. Directamente el resultado

$( \quad - \quad )^2 =$	
	Pulsa <input type="button" value="&gt;"/>

Ejercicio 3 de 5. Directamente el resultado

$( \quad - \quad )^2 =$	
	Pulsa <input type="button" value="&gt;"/>

Ejercicio 4 de 5. Directamente el resultado

$( \quad - \quad )^2 =$	
	Pulsa <input type="button" value="&gt;"/>

Ejercicio 5 de 5. Directamente el resultado

$( \quad - \quad )^2 =$	
	Pulsa <input type="button" value="&gt;&gt;"/>

**Serie 10. Cuadrado de una diferencia (automático, guiado)**

Ejercicio 1 de 3. Ahora al contrario

	Buscamos dos sumandos que sean cuadrados
	El primer sumando es el cuadrado de __
	El segundo sumando es el cuadrado de __
	El otro sumando es el doble de __ por __
	Podemos escribir la expresión inicial como una diferencia al cuadrado. <span style="float: right;">Pulsa &gt;</span>

Ejercicio 2 de 3. Ahora al contrario

	Buscamos dos sumandos que sean cuadrados
	El primer sumando es el cuadrado de __
	El segundo sumando es el cuadrado de __
	El otro sumando es el doble de __ por __
	Podemos escribir la expresión inicial como una diferencia al cuadrado. <span style="float: right;">Pulsa &gt;</span>

Ejercicio 3 de 3. Ahora al contrario

	Buscamos dos sumandos que sean cuadrados
	El primer sumando es el cuadrado de __
	El segundo sumando es el cuadrado de __
	El otro sumando es el doble de __ por __
	Podemos escribir la expresión inicial como una diferencia al cuadrado. <span style="float: right;">Pulsa &gt;&gt;</span>

**Serie 11. Cuadrado de una diferencia (escribir, guiado)**

Ejercicio 1 de 3. Tienes que escribir la expresión como el cuadrado de una diferencia.

	Escribe la fórmula de golpe, sin operar
$= ( \quad - \quad )^2$	Resultado Si está "Muy bien", pulsa >

Ejercicio 2 de 3. Tienes que escribir la expresión como el cuadrado de una diferencia.

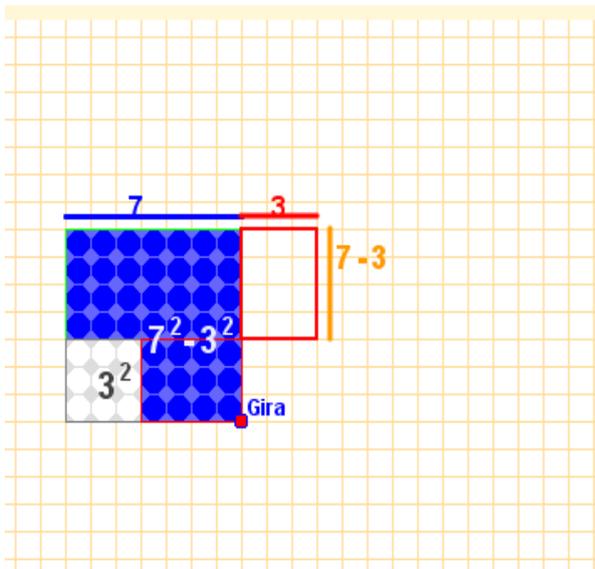
	Escribe la fórmula de golpe, sin operar
$= ( \quad - \quad )^2$	Resultado Si está "Muy bien", pulsa >

Ejercicio 3 de 3. Tienes que escribir la expresión como el cuadrado de una diferencia.

	Escribe la fórmula de golpe, sin operar
$= ( \quad - \quad )^2$	Resultado

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.c. Suma por diferencia



En la escena aparece una demostración geométrica de la fórmula que nos da la expresión para la suma por diferencia.

Tienes:

- Un cuadrado azul de lado 7, por tanto de área \_\_\_\_\_
- Otro gris de lado 3 y área \_\_\_\_\_
- En azul aparece la diferencia de los dos cuadrados, \_\_\_\_\_

Arrastra y gira el rectángulo inferior hasta el contorno rojo.

Se habrá formado un rectángulo de lados: \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_ y su área será \_\_\_\_\_.

Al hacerlo aparecerá la expresión:

Modifica los valores de a y b con los controles y comprueba la validez de la fórmula para distintos pares de valores.

y

Completa como en el ejemplo:

a	b	$(a+b) \cdot (a-b)$
7	3	$(7+3) \cdot (7-3) = 7^2 - 3^2 = 40$

a	b	$(a+b) \cdot (a-b)$

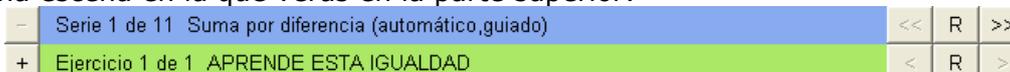
También puedes ver una demostración aritmética de la fórmula en la animación que aparece haciendo clic en

Copia en este espacio la fórmula que nos da producto de **suma por diferencia**:

Debes reconocer esta igualdad también al contrario, de manera que identifiques el polinomio  $x^2-16$  con la expresión  $(x+4) \cdot (x-4)$ .

Ahora pulsa en para hacer ejercicios.

Se abre una escena en la que verás en la parte superior:



Tendrás que ir avanzando por las 11 series de ejercicios que funcionan de diferentes modos. Completa los ejercicios y ejemplos que se indican en los recuadros siguientes:

**Serie 1. Suma por diferencia (automático, guiado)**

$(a+b) \cdot (a-b) =$	Para efectuar suma por diferencia,
	Efectuamos el cuadrado del primer sumando
	El cuadrado del segundo sumando
	Y se resta <span style="float: right;">Pulsa &gt;&gt;</span>

**Serie 2. Suma por diferencia (automático, libre)**

$( + ) \cdot ( - ) =$

Pulsa &gt;&gt;

**Serie 3. Suma por diferencia (automático, guiado)**

→ Es el mismo ejemplo que en la serie 2, pero con las explicaciones en el recuadro naranja.

**Serie 4. Suma por diferencia (automático, libre)**

$( + ) \cdot ( - )$

Pulsa &gt;&gt;

**Serie 5. Suma por diferencia (automático, guiado)**

→ Es el mismo ejemplo que en la serie 4, pero con las explicaciones en el recuadro naranja.

**Serie 6. Suma por diferencia (automático, libre)**

Ejercicio 1 de 5. Trata de comprender los siguientes ejemplos.

$( + ) \cdot ( - )$

Escribe el resultado final de cada uno de los otros 4 ejercicios de la serie 6:

Ejercicio 2	$( + ) \cdot ( - ) =$	>
Ejercicio 3	$( + ) \cdot ( - ) =$	>
Ejercicio 4	$( + ) \cdot ( - ) =$	>
Ejercicio 5	$( + ) \cdot ( - ) =$	>

Para pasar a la siguiente serie de ejercicios Pulsa &gt;&gt;

**Serie 7. Suma por diferencia (automático, guiado)**

$( + ) \cdot ( - ) =$	Escribe la fórmula de golpe, sin operar
	Opera todos los sumandos
	Resultado <span style="float: right;">Pulsa &gt;&gt;</span>

**Serie 8. Suma por diferencia (escribir, guiado)**

Ejercicio 1 de 3.

$( + ) \cdot ( - ) =$	Escribe la fórmula de golpe, sin operar	
	Opera todos los sumandos	
	Resultado	Pulsa >

Ejercicio 2 de 3.

$( + ) \cdot ( - ) =$	Escribe la fórmula de golpe, sin operar	
	Opera todos los sumandos	
	Resultado	Pulsa >

Ejercicio 3 de 3.

$( + ) \cdot ( - ) =$	Escribe la fórmula de golpe, sin operar	
	Opera todos los sumandos	
	Resultado	Pulsa >>

**Serie 9. Suma por diferencia (automático, libre)**

Ejercicio 1 de 5. Directamente el resultado

$( + ) \cdot ( - ) =$	Pulsa >
-----------------------	---------

Ejercicio 2 de 5. Directamente el resultado

$( + ) \cdot ( - ) =$	Pulsa >
-----------------------	---------

Ejercicio 3 de 5. Directamente el resultado

$( + ) \cdot ( - ) =$	Pulsa >
-----------------------	---------

Ejercicio 4 de 5. Directamente el resultado

$( + ) \cdot ( - ) =$	Pulsa >
-----------------------	---------

Ejercicio 5 de 5. Directamente el resultado

$( + ) \cdot ( - ) =$	Pulsa >>
-----------------------	----------

**Serie 10. Suma por diferencia (automático, guiado)**

Ejercicio 1 de 3. Ahora al contrario

	Tenemos una diferencia de cuadrados	
	El primer sumando es el cuadrado de ___	
	El segundo sumando es el cuadrado de ___	
	Se expresa como suma por diferencia	Pulsa >

Ejercicio 2 de 3. Ahora al contrario

	Tenemos una diferencia de cuadrados	
	El primer sumando es el cuadrado de ___	
	El segundo sumando es el cuadrado de ___	
	Se expresa como suma por diferencia	Pulsa >

Ejercicio 3 de 3. Ahora al contrario

	Tenemos una diferencia de cuadrados	
	El primer sumando es el cuadrado de __	
	El segundo sumando es el cuadrado de __	
	Se expresa como suma por diferencia	Pulsa >>

**Serie 11. Suma por diferencia (escribir, guiado)**

Ejercicio 1 de 3. Tienes que escribir la expresión como suma por diferencia.

$= ( + ) \cdot ( - )$	Resultado	Si está "Muy bien", pulsa	>
-----------------------	-----------	---------------------------	---

Ejercicio 2 de 3. Tienes que escribir la expresión como suma por diferencia.

$= ( + ) \cdot ( - )$	Resultado	Si está "Muy bien", pulsa	>
-----------------------	-----------	---------------------------	---

Ejercicio 3 de 3. Tienes que escribir la expresión como suma por diferencia.

$= ( + ) \cdot ( - )$	Resultado	Puedes cerrar el cuadro	
-----------------------	-----------	-------------------------	--

## EJERCICIOS

**10.** Desarrolla las siguientes expresiones

Expresión	Solución	Expresión	Solución
$(x+1)^2$		$(x-1)^2$	
$(2x+1)^2$		$(3-2x)^2$	
$(3x/2+5)^2$		$(x/3-2)^2$	
$(\sqrt{2}x+2)^2$		$(x-\sqrt{3})^2$	

**11.** Halla la expresión en coeficientes de los siguientes productos

Productos	Solución	Productos	Solución
$(x+2) \cdot (x-2)$		$(x-1/4) \cdot (x+1/4)$	
$(3x+7) \cdot (3x-7)$		$(1+\sqrt{2}x) \cdot (1-\sqrt{2}x)$	

**12.** Aplica las identidades notables para descomponer en factores los siguientes polinomios

Expresión	Solución	Expresión	Solución
$4x^2+12x+9$		$49x^2-36$	
$36x^2+36x+9$		$25x^2-9/4$	
$6x^5-12x^4+6x^3$		$4x^2-3$	

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.



## Recuerda lo más importante – RESUMEN

Monomio de grado 2

Haz clic en para ver una animación.

Completa:

Coeficiente	Variable	Grado

### EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Pulsa

Escribe a la derecha de cada imagen la expresión algebraica correspondiente y su clasificación:

<p><b>x · t</b> Monomio 2 variables Grado 2</p>	
<p><b>3x es el triple de x</b></p>	

<p><b><math>\frac{x+y}{2}</math></b></p>	
<p><b><math>x^2</math> es el cuadrado de x</b></p>	

En la escena de la derecha tienes un librito en el que podrás repasar los contenidos de esta quincena. Arrastra las páginas o haz clic en para pasar de página.

**CIDE@D** Matemáticas

Operaciones con polinomios

Identidades notables

Click o arrastrar para abrir >>>

#### Repasarás:

- Valor numérico
- Operaciones con polinomios:
  - Suma
  - Diferencia
  - Producto
  - Factor común
- **Identidades notables** (completa las fórmulas)
  - $(a + b)^2 =$
  - $(a - b)^2 =$
  - $(a + b) \cdot (a - b) =$
- **Algunos ejemplos de identificaciones útiles:**
  - $x^2 + 6x + 9 =$
  - $x^2 - 10x + 25 =$
  - $x^2 - 49 =$

Pulsa para ir a la página siguiente



## Para practicar

En la página de EJERCICIOS, los encontrarás de varios tipos:

- **Expresiones algebraicas, polinomios, valor numérico**
- **Operaciones con polinomios. Identidades notables**

### Expresiones algebraicas, polinomios

Para empezar, pulsa en el control elige opción para escoger el tipo de problema que prefieras. Es conveniente que resuelvas un problema de cada tipo. En el enunciado, rellena el espacio reservado al dato o datos que faltan, y después resuelve el problema.

<p><b>1. Números</b></p> <p>Hallar la expresión algebraica de un número de ___ cifras si la cifra de las unidades es _____ la cifra de las decenas.</p>	
<p><b>2. ¿Cuánto camino?</b></p> <p>De lunes a jueves camino <math>x</math> km diarios y de viernes a domingo, _____ km cada día. Halla la expresión algebraica de los km que camino en <math>z</math> semanas.</p>	
<p><b>3. Km de ciclismo</b></p> <p>Si practico ciclismo a una velocidad media de _____ km/h durante <math>t</math> horas al mes, ¿Cuántos km hago al cabo del año?</p>	
<p><b>4. Sueldo</b></p> <p>Mi sueldo mensual es de _____ euros . Cada año aumenta un <math>x\%</math>. Calcular el sueldo mensual dentro de _____ años.</p>	
<p><b>5. Geometría</b></p> <p>_____ es la expresión que define _____ en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿El grado? ¿El coeficiente? ¿El _____ para un radio de _____ cm?</p>	
<p><b>6. Coeficiente</b></p> <p>¿Cuál es el grado del polinomio de la izquierda? ¿Cuál es su coeficiente de grado _____? ¿Y el de grado _____? Calcula su valor numérico en <math>x = \underline{\hspace{1cm}}</math></p>	
<p><b>7. Horas</b></p> <p>¿Qué fracción de hora son _____ minutos y _____ segundos? ¿Sabes expresarla como valor numérico de un polinomio de segundo grado?</p>	
<p><b>8. Segundos</b></p> <p>¿Cuántos segundos hay en ___ h ___ min ___ seg? ¿Sabes expresarlos como el valor numérico de un polinomio de segundo grado?</p>	

**9. Docenas, gruesas, masas**

¿Cuántas unidades hay en \_\_\_\_\_ masas, \_\_\_\_\_ gruesas y \_\_\_\_\_ docenas? ¿Sabes expresarlas como el valor numérico de un polinomio de segundo grado?

Una masa = 12 gruesas, una gruesa = 12 docenas, una docena = 12 unidades.

**Operaciones con polinomios. Identidades notables**
**1. Suma y resta**

$P(x) =$  \_\_\_\_\_

$Q(x) =$  \_\_\_\_\_

Halla los coeficientes de \_\_\_\_\_

**2. Multiplica**

$P(x) =$  \_\_\_\_\_

$Q(x) =$  \_\_\_\_\_

Halla los coeficientes de  $P(x) \cdot Q(x)$

**3. Factor común**

$P(x) =$  \_\_\_\_\_

Saca factor común en el polinomio  $P(x)$

**4. Convierte en cuadrado**

¿Cuántas unidades tienes que añadir a \_\_\_\_\_ para convertir este binomio en el cuadrado de otro binomio? Es decir, observa la figura y convierte el rectángulo inicial en un cuadrado.

**5. Efectúa el cuadrado (tipo 1)**

Efectúa la potencia \_\_\_\_\_

**6. Efectúa el cuadrado (tipo 2)**

Efectúa la potencia \_\_\_\_\_

**7. Cálculo mental**

Calcula mentalmente \_\_\_\_\_

Si aplicas las identidades notables, debes tardar menos de 5 segundos en dar la respuesta.

**8. Simplificar fracciones (tipo 1)**

Aplicando las identidades notables, simplifica la fracción

**9. Simplificar fracciones (tipo 2)**

Aplicando las identidades notables, simplifica la fracción

**10. Simplificar fracciones (tipo 3)**

Aplicando las identidades notables, simplifica la fracción

Pulsa  para ir a la página siguiente

## Autoevaluación



**Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.**

	Enunciado	Solución	Corrección	
1	$P(x) =$ _____ $Q(x) =$ _____ $R(x) =$ _____ Calcula $P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$ y escribe los coeficientes del resultado.			
2	Calcula el valor numérico de _____ en $x =$ _____.			
3	Halla la expresión algebraica que define el área de _____ cuadrados de <b>lado <math>x+y</math></b> y _____ rectángulos de <b>base <math>x</math></b> y <b>altura <math>y</math></b> .			
4	¿Es cierta la igualdad? _____ En caso afirmativo introduce 1, en caso negativo, -1			
5	Halla los coeficientes de _____			
6	¿Qué constante hay que sumar a _____ Para obtener el cuadrado de un binomio?			
7	Calcula el coeficiente de primer grado de _____			
8	Aplica las identidades notables para calcular mentalmente el número que aparece al pulsar  Número: _____			
9	Simplifica la fracción _____			
10	Saca factor común la mayor potencia de $x$ en _____			

### Actividades para enviar al tutor

Haz las actividades y envíalas a tu profesor/a siguiendo sus instrucciones. Finalmente, no olvides visitar el enlace **Para saber más** para ampliar tus conocimientos.

## 3

## Ecuaciones de segundo grado

### Contenidos

1. Expresiones algebraicas  
Identidad y ecuación  
Solución de una ecuación
2. Ecuaciones de primer grado  
Definición  
Método de resolución  
Resolución de problemas
3. Ecuaciones de segundo grado  
Definición. Tipos  
Resolución de  $ax^2+bx=0$   
Resolución de  $ax^2+c=0$   
Resolución de  $ax^2+bx+c=0$   
Suma y producto de las raíces  
Discriminante de una ecuación  
Ecuación  $(x-a) \cdot (x-b)=0$   
Resolución de problemas

### Objetivos

- Identificar las soluciones de una ecuación.
- Reconocer y obtener ecuaciones equivalentes.
- Resolver ecuaciones de primer grado.
- Resolver ecuaciones de segundo grado tanto completas como incompletas.
- Utilizar el lenguaje algebraico y las ecuaciones para resolver problemas.

**Antes de empezar**

**Recuerda**

Haz memoria de cómo resolvías las ecuaciones en 2º ESO.

Intenta ahora resolver el siguiente problema:



Pulsa  para ir a la página siguiente.

**1. Igualdades algebraicas**

**1.a. Identidad y ecuación**

Lee el texto de pantalla: "Una **igualdad algebraica** está ..."

**EJERCICIO.** Contesta: ¿Qué diferencia hay entre una ecuación y una identidad?

En la escena: Selecciona el tipo de expresión algebraica Identidad  
Ecuación

Pulsa **OTRO EJEMPLO** para ver distintos ejemplos de Identidades y Ecuaciones:

a) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla para <b>IDENTIDAD</b> .	b) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla para <b>ECUACIÓN</b> verificando con la solución.	c) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla para <b>ECUACIÓN</b> con un número diferente de la solución.

Pulsa en el botón  para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS

1. Clasifica la expresión algebraica:  $6(7x - 1) + 3x = 4x + 76$ , en identidad o ecuación.
2. Clasifica la expresión algebraica:  $7(5x - 1) + 5x = 40x - 7$ , en identidad o ecuación.
3. Escribe una ecuación de la forma  $ax+b=c$  cuya solución sea  $x=4$

#### 1.b. Solución de una ecuación

Lee el texto de pantalla: "El valor de la letra que ..."

**EJERCICIO.** Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuándo es incompatible una ecuación? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cómo se obtienen ecuaciones equivalentes? \_\_\_\_\_

Pulsa **OTRO EJEMPLO** para ver distintos ejemplos.

a) Copia un ejemplo (1) completo tal y como aparece en la pantalla para ECUACIÓN COMPATIBLE.	b) Copia un ejemplo (2) completo tal y como aparece en la pantalla para ECUACIÓN COMPATIBLE.	c) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla para ECUACIÓN INCOMPATIBLE.

Pulsa en el botón  para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS

4. Escribe una ecuación de la forma  $ax = b$  que sea equivalente a  $5x + 4 = -16$
5. Escribe una ecuación de la forma  $x + b = c$  que sea equivalente a  $5x + 20 = 15$
6. Razona si  $x=2$  es solución de la ecuación:  $5x + 3(x - 1) = 13$
7. Razona si  $x=3$  es solución de la ecuación:  $7x + 3(x - 2) = 16$
8. Comprueba que  $x=-1$ , es solución de la ecuación  $5x + x^2 = -4$
9. Escribe una ecuación que sea incompatible.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2. Ecuaciones de primer grado

### 2.a. Definición

Lee el texto de pantalla: "Una **ecuación de primer grado con una incógnita es ...**"

**EJERCICIO.** Contesta la siguiente pregunta:

¿De qué grado es el exponente de la "x"? \_\_\_\_\_

Pulsa **OTRO EJEMPLO** para ver distintos ejemplos.

a) Copia un ejemplo (1) completo tal y como aparece en la pantalla.	b) Copia un ejemplo (2) completo tal y como aparece en la pantalla.	c) Copia un ejemplo (3) completo tal y como aparece en la pantalla.

Pulsa en el botón



para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS de Refuerzo

Resuelve aplicando las reglas de la suma y el producto las siguientes ecuaciones de primer grado:

- a)  $18x+1=-7$
- b)  $2x+15=9$
- c)  $10x+13=-17x+5$
- d)  $-9x-8=15x$
- e)  $12x+15=-5x$
- f)  $-x+15=18x+4$

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2.b. Método de resolución

Lee el texto de pantalla: "Para resolver una ecuación de primer grado ..."

Pulsa **OTRO EJEMPLO** para ver distintos ejemplos.

a) Copia un ejemplo (1) completo tal y como aparece en la pantalla.	b) Copia un ejemplo (2) completo tal y como aparece en la pantalla.	c) Copia un ejemplo (3) completo tal y como aparece en la pantalla.

Pulsa en el botón



para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\frac{\cancel{7}x + 5}{7} + \frac{\cancel{9}x - 7}{8} = 3$

b)  $\frac{\cancel{2}x(x+1)}{4} = \frac{5x+2}{6}$

c)  $\frac{\cancel{3}x(\cancel{x}+1)}{6} = \frac{\cancel{2}x-1}{3}$

d)  $\frac{\cancel{2}x-5}{3} - \frac{\cancel{2}x+8}{7} \Rightarrow$

e)  $\frac{\cancel{6}x(\cancel{x}+8)}{6} = \frac{\cancel{2}x+7}{3} \Rightarrow$

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

## 2.c. Resolución de problemas

Lee el texto de pantalla: "Para resolver un problema mediante una ecuación, hay que..."

### Ejemplos

Pulsa sobre



y continua con



para ver como se hace.

Y "< volver" para volver al menú. Para otros ejemplos del mismo tipo:

Pulsa si quieres  
cambiar los datos

CAMBIAR

a) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla tipo EDADES.	b) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla tipo MEZCLAS.	c) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla tipo MOVIMIENTOS.

Pulsa en el botón



para hacer unos ejercicios.

## EJERCICIOS

11. La edad de un padre es el triple que la de su hijo, si entre los dos suman 56 años ¿Cuál es la edad de cada uno?
12. ¿Cuántos litros de vino de 5€ el litro deben mezclarse con vino de 3€ el litro para obtener 50 litros de vino cuyo precio sea de 4€ el litro?

### EJERCICIOS de Refuerzo

Resuelve los problemas paso a paso:

- a) Un ciclista sale de la ciudad A hacia la ciudad B a una velocidad constante de 30 km/h y otro ciclista parte de B hacia A a una velocidad constante de 20 km/h. Si la distancia entre las dos ciudades es de 30 km, ¿a qué distancia de B se encontrarán?
- b) Tenemos 180 piedras y queremos hacer dos montones, de forma que uno tenga el triple de piedras que el otro. ¿Cuántas piedras tendrá cada montón?

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 3. Ecuaciones de segundo grado

### 3.a. Definición. Tipos.

Lee el texto de pantalla: "*Una **ecuación de segundo grado** con...*"

Pulsa **OTRO EJEMPLO** para ver distintos ejemplos.

a) Copia un ejemplo (1) de ecuación de segundo grado <b>COMPLETA</b> tal y como aparece en la pantalla.	b) Copia un ejemplo (2) de ecuación de segundo grado <b>INCOMPLETA SIN término independiente.</b>	c) Copia un ejemplo (3) de ecuación de segundo grado <b>INCOMPLETA CON término independiente.</b>

Pulsa en el botón



para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS de Refuerzo

Indica los valores de los coeficientes "a", "b" y "c" en cada una de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

- a)  $x^2 + 9 = 0$
- b)  $x^2 + 3 = 4x^2$
- c)  $7x^2 + 5x - 7 = 6x$
- d)  $-x^2 - 7 = 1$
- e)  $7x^2 - 1 = -4x$

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.b. Resolución de $ax^2+bx=0$ .

Lee el texto de pantalla: "Para resolver este tipo..."

Pulsa sobre Paso 1 para ver como se hace. Pulsa **OTRO EJEMPLO** para ver más ejemplos.

a) Copia un ejemplo (1) tal y como aparece en la pantalla.	b) Copia un ejemplo (2) tal y como aparece en la pantalla.	c) Copia un ejemplo (3) tal y como aparece en la pantalla.

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS de Refuerzo

Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas:

- a)  $-x^2 + 13x = 0$
- b)  $16x^2 + x = 0$
- c)  $x^2 + 85x = 0$
- d)  $27x^2 + 23x = 0$
- e)  $73x^2 - 81x = 0$

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.c. Resolución de $ax^2+c=0$ .

Lee el texto de pantalla: "Para resolver se despeja..."

**EJERCICIO.** Contesta la siguiente pregunta:

¿Cuándo hay dos soluciones para la ecuación  $ax^2+c=0$ ? \_\_\_\_\_  
 Escribe dos ejemplos de ecuaciones de este tipo:

--	--

Pulsa sobre para ver como se hace. Pulsa **OTRO EJEMPLO** para ver más ejemplos.

a) Copia un ejemplo (1) tal y como aparece en la pantalla.	b) Copia un ejemplo (2) tal y como aparece en la pantalla.	c) Copia un ejemplo (3) tal y como aparece en la pantalla.

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS de Refuerzo

Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas:

- a)  $2x^2 - 162 = 0$
- b)  $4x^2 - 9 = 0$
- c)  $4x^2 - 64 = 0$
- d)  $-2x^2 + 128 = 0$
- e)  $18x^2 - 162 = 0$

Quando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.d. Resolución de $ax^2+bx+c=0$ .

Lee el texto de pantalla: "La ecuación de segundo grado **completa**..."

**EJERCICIO.** Escribe la fórmula de la solución de la ecuación de segundo grado completa.

Ecuación	Fórmula

Pulsa sobre  para ver como se hace. Pulsa **OTRO EJEMPLO** para ver más ejemplos.

a) Copia un ejemplo (1) tal y como aparece en la pantalla.	b) Copia un ejemplo (2) tal y como aparece en la pantalla.

Pulsa en el botón  para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS de Refuerzo

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado completas:

- a)  $-x^2 - 11x - 28 = 0$
- b)  $-x^2 - x + 30 = 0$
- c)  $-x^2 + 2x + 24 = 0$
- d)  $-x^2 + 11x - 30 = 0$
- e)  $x^2 - 7x - 10 = 0$

Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3.e. Suma y producto de las raíces

Lee el texto de pantalla: "Si  $x_1$  y  $x_2$  son las raíces de una ecuación..."

Pulsa **OTRO EJEMPLO** para ver más ejemplos

a) Copia un ejemplo (1) tal y como aparece en la pantalla.	b) Copia un ejemplo (2) tal y como aparece en la pantalla.

Pulsa en el botón  para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS de Refuerzo

Resuelve los siguientes ejercicios sobre la suma y el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado:

- a) Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean -8 y 1.
- b) Calcula el valor de m, sabiendo que  $x = -8$  es una de las soluciones de la ecuación de segundo grado  $x^2 + 3x + m = 0$
- c) Sin resolver la ecuación, indica las raíces de la ecuación de segundo grado  $x^2 - 12x + 32 = 0$
- d) Calcula el valor de m, sabiendo que  $x = -10$  es una de las soluciones de la ecuación de segundo grado  $x^2 + 12x + m = 0$
- e) Sin resolver la ecuación, indica las raíces de la ecuación de segundo grado  $x^2 - 11x + 30 = 0$

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3.f. Discriminante

Lee el texto de pantalla: "Se llama discriminante de una ecuación..."

**EJERCICIO.** Contesta las siguientes preguntas:

- a) Escribe la expresión de una ecuación de segundo grado y la de su discriminante.  

Ecuación:

Discriminante:
- b) ¿Qué condición cumple el discriminante para que halla una única solución?
- c) ¿Qué condición cumple el discriminante para que halla dos soluciones?

En la escena de la derecha puedes ver un ejemplo del cálculo del discriminante.

Pulsa sobre  para ver como se hace. Pulsa **OTRO EJEMPLO** para ver más ejemplos.

a) Copia un ejemplo (1) tal y como aparece en la pantalla.	b) Copia un ejemplo (2) tal y como aparece en la pantalla.	c) Copia un ejemplo (3) tal y como aparece en la pantalla.

Pulsa en el botón  para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS de Refuerzo

Indica sin resolverla, el número de raíces distintas que tiene cada una de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

- a)  $6x^2 + 3 = 0$
- b)  $-3x^2 - 60x - 300 = 0$
- c)  $-2x^2 + 32x - 128 = 0$
- d)  $-2x^2 + 6x - 4 = 0$
- e)  $-x^2 - 16x - 64 = 0$

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.g. Ecuación $(x-a)(x-b)=0$

Lee el texto de pantalla: "Como sabes para que un producto de..."

Pulsa sobre para ver como se hace. Pulsa **OTRO EJEMPLO** para ver más ejemplos.

a) Copia un ejemplo (1) tal y como aparece en la pantalla.	b) Copia un ejemplo (2) tal y como aparece en la pantalla.	c) Copia un ejemplo (3) tal y como aparece en la pantalla.

Pulsa en el botón para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS de Refuerzo

Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado del tipo  $(x-a) \cdot (x-b) = 0$

- a)  $(-x + 2) \cdot (5x + 10) = 0$
- b)  $(-x + 3) \cdot (2x - 6) = 0$
- c)  $2x \cdot (x - 7) = 0$
- d)  $(-5x - 6) \cdot (x + 2) = 0$
- e)  $(9x + 4) \cdot (5x + 10) = 0$

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

**EJERCICIOS**

13. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

- a)  $x^2 - 6x = 0$
- b)  $x^2 + 27x = 0$
- c)  $3x^2 + 5x = 0$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

- a)  $x^2 - 36 = 0$
- b)  $4x^2 - 9 = 0$
- c)  $x^2 + 9 = 0$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado completas:

- a)  $x^2 - 7x + 10 = 0$
- b)  $3x^2 + 17x + 20 = 0$
- c)  $3x^2 + 5x + 4 = 0$

16. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean  $x = -1$ ,  $x = 4$ .

17. Resuelve las siguientes ecuaciones:

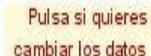
- a)  $(x-2)(x+3) = 0$
- b)  $(3x-1)(x-5) = 0$

**3.h. Resolución de problemas.**

Lee el texto de pantalla: "Para resolver un problema mediante una ecuación, hay que..."

Ejemplos: Pulsa sobre  y continua con  para ver como se hace.

Y "< volver" para volver al menú. Para otros ejemplos del mismo tipo:

 Pulsa si quieres cambiar los datos 

**a) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla tipo EDADES.**

**b) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla tipo GEOMETRÍA.**

**c) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla tipo NÚMEROS.**

Pulsa en el botón



para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS de Refuerzo

Resuelve los problemas paso a paso:

- Lucía tiene el cuádruplo de edad que Miguel. Si multiplicamos sus edades obtenemos el número 1444. ¿Qué edad tiene cada uno?
- La diagonal de un rectángulo mide 13 cm. Halla sus dimensiones si un cateto mide 7 cm más que el otro.
- El producto de un número positivo por el doble de ese mismo número es 1682. ¿Qué número es?
- La suma del cuadrado de un número con ese mismo número es 20. ¿Qué número es?
- Para vallar una finca rectangular de  $187 \text{ m}^2$  se utilizan 56 m de cerca. Calcula las dimensiones de la cerca.

Pulsa  para ir a la página siguiente.



## Recuerda lo más importante – RESUMEN

Lee el resumen tranquilamente y contesta a las siguientes preguntas:

¿Qué es una solución de una ecuación?

\_\_\_\_\_

¿Cuándo se dice que una ecuación es incompatible?

\_\_\_\_\_

¿Cuándo se dice que una ecuación es compatible?

\_\_\_\_\_

¿Cuándo son equivalentes dos ecuaciones?

\_\_\_\_\_

Expresión general de una ecuación de primer grado:

Solución:

\_\_\_\_\_

Expresión general de una ecuación de segundo grado completa:

Fórmula para calcular las soluciones de una ecuación de 2º grado completa:

\_\_\_\_\_

Expresión general de una ecuación de segundo grado incompleta ( $c=0$ ):

Fórmula para calcular las soluciones de una ecuación de 2º grado incompleta ( $c=0$ ):

\_\_\_\_\_

Expresión general de una ecuación de segundo grado incompleta ( $b=0$ ):

Fórmula para calcular las soluciones de una ecuación de 2º grado incompleta ( $b=0$ ):

\_\_\_\_\_

Ecuación canónica:

La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es: \_\_\_\_\_

El producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado es: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Una ecuación de segundo grado no tiene solución cuando:

Escribe un ejemplo.

\_\_\_\_\_

Una ecuación de segundo grado tiene sólo una solución cuando:

Escribe un ejemplo.

\_\_\_\_\_

Una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones cuando:

Escribe un ejemplo.

\_\_\_\_\_

Pulsa  para ir a la página siguiente.



## Para practicar

Puedes ir al apartado que quieras desde esta página (Ecuaciones de primer grado, ecuaciones de segundo grado), pulsando sobre los distintos enlaces, o bien siguiendo el orden correlativo de las páginas con el enlace de abajo.



### ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Aparece el enunciado de un ejercicio o de un problema. Cópialo a continuación y resuélvelo. Después comprueba la solución. Elige otro ejercicio y repite el mismo proceso. Haz al menos 2 ejercicios de ecuaciones y CUATRO problemas con enunciados diferentes.

#### EJERCICIOS DE ECUACIONES DE 1<sup>er</sup> GRADO.

1.	
2.	

#### PROBLEMAS DE ENUNCIADO

3.	
4.	
5.	
6.	

Pulsa  para ir a la página siguiente.

**ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO**

Aparece el enunciado de un ejercicio o de un problema. Cópialo a continuación y resuélvelo. Después comprueba la solución. Elige otro ejercicio y repite el mismo proceso.  
*Haz al menos TRES ejercicios de ecuaciones y TRES problemas con enunciados diferentes.*

**EJERCICIOS DE ECUACIONES DE 2º GRADO.**

7.	
8.	
9.	

**PROBLEMAS DE ENUNCIADO**

10.	
11.	
12.	

Pulsa  para ir a la página siguiente.

## Autoevaluación



Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.

1 Escribe una ecuación de la forma \_\_\_\_\_  
cuya solución sea  $x =$  \_\_\_\_

2 Resuelve la ecuación:

3 Encuentra un número sabiendo que \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_.

4 Resuelve la ecuación:

5 Resuelve la ecuación:

6 Resuelve la ecuación:

7 Resuelve la ecuación:

8 Escribe una ecuación de segundo grado  
cuyas soluciones sean \_\_\_\_ y \_\_\_\_

9 El cuadrado de un número positivo más el  
doble de su opuesto es \_\_\_\_\_. ¿Cuál es  
ese número?

10 Resuelve sin aplicar la fórmula general:



## Para practicar más

1. Determina si las siguientes igualdades algebraicas son identidades o son ecuaciones:

a)  $6(x-1) - 3x = 4x + 6 \rightarrow$

c)  $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow$

b)  $3(x-1) - 5 = 3x - 8 \rightarrow$

d)  $x - (2x - 5) = 3x - 8 \rightarrow$

2. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a)  $x^2 - 1 = x + 2 \rightarrow$

c)  $x^3 - 1 = x^3 + x^2 + 2 \rightarrow$

b)  $x^2 - 1 = x^2 + x + 2 \rightarrow$

d)  $x - 1 = 3x + 2 \rightarrow$

3. Indica si  $x=4$  es solución de las siguientes ecuaciones:

a)  $3(x-1) - 5 = 3x - 8 \rightarrow$

c)  $2(x+3) - 5x = x + 2 \rightarrow$

b)  $(x-1)^2 - 5 = x \rightarrow$

d)  $x^3 - 60 = x \rightarrow$

4. Escribe una ecuación de primer grado cuya solución sea:

a)  $x=2 \rightarrow$

b)  $x=3 \rightarrow$

c)  $x=1 \rightarrow$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a)  $10 - x = 3 \rightarrow$

b)  $2x - 5 = 15 \rightarrow$

c)  $-9 + 4x = x \rightarrow$

d)  $3x - 10 = 50 + x \rightarrow$

6. Calcula el valor de  $x$ :

a)  $3(x-1) + 2x = x + 1$

b)  $2 - 2(x-3) = 3(x-3) - 8$

c)  $2(x+3) + 3(x+1) = 24$

d)  $\frac{3x}{2} + 2(x-1) = 12$

7. Obtén la solución de las siguientes ecuaciones:

a)  $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{3} = 1$

b)  $\frac{x-3}{2} - 3(x+2) = -20$

c)  $\frac{2-2(x-3)}{2} - \frac{x+4}{4} = 3$

d)  $\frac{4(x+1)}{2} + x - \frac{x+3}{3} = 5 + 3(x-2)$

8. Encuentra dos números consecutivos que sumen 71

9. Encuentra un número tal que sumado con su triple sea igual a 100

10. ¿Qué edad tengo ahora si dentro de 12 años tendré el triple de la edad que tenía hace 8 años?

11. Juan tiene 12 años menos que María, dentro de 4 años María tendrá el triple de la edad de Juan ¿cuántos años tienen ahora?

12. A una fiesta asisten 43 personas. Si se marchasen 3 chicos, habría el triple de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas hay?

13. Resuelve

a)  $x^2 - 5x = 0$

c)  $x^2 - 9 = 0$

b)  $x^2 + 3x = 0$

d)  $x^2 + 5 = 0$

14. Resuelve

a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$

b)  $x^2 - 3x - 4 = 0$

c)  $x^2 + 3x - 10 = 0$

d)  $x^2 - 6x + 9 = 0$

**15.** Resuelve

a)  $(x + 2)(x - 3) = 0$

b)  $(3x + 1)(x + 5) = 0$

c)  $x(x + 9) = 0$

d)  $(2x + 8)(3x - 9) = 0$

**16.** Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean:

a)  $x=3$  y  $x=-5 \rightarrow$

b)  $x=2$  y  $x=4 \rightarrow$

c)  $x=-1$  y  $x=-9 \rightarrow$

d)  $x=0$  y  $x=-5 \rightarrow$

**17.** Resuelve

a)  $(x + 2)(x - 3) = 6$

b)  $(x + 1)(x - 5) = 16$

**18.** Calcula el valor de  $m$  sabiendo que  $x=3$  es solución de la ecuación de segundo grado  $x^2 - mx + 27 = 0$ 
**19.** La suma de un número natural y su cuadrado es 42. ¿De qué número se trata?

- 20.** La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Halla sus dimensiones si un lado mide 2 cm menos que el otro.
- 21.** Encuentra dos números positivos que se diferencien en 7 unidades sabiendo que su producto es 44.
- 22.** Encuentra dos números cuya suma sea 10 y su producto 24
- 23.** Un campo de fútbol mide 30 m más de largo que de ancho y su área es de 7000 m<sup>2</sup>, halla sus dimensiones.
- 24.** Tenemos un alambre de 17 cm. ¿Cómo hemos de doblarlo para que forme un ángulo recto de modo que sus extremos queden a 13 cm?
- 25.** Halla el valor de los coeficientes a, b y c en la ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  para que sus soluciones sean 3 y -2.
- 26.** La diagonal de un rectángulo tiene 10 cm. Calcula sus dimensiones si el lado pequeño mide  $\frac{3}{4}$  del lado grande.
- 27.** Reparte el número 20 en dos partes de forma que la suma de sus cuadrados sea 202.
- 28.** Encuentra dos números positivos sabiendo que se diferencian en 7 unidades y su producto es 60.
- 29.** Un triángulo rectángulo tiene de perímetro 24 metros, y la longitud de un cateto es igual a  $\frac{3}{4}$  del otro. Halla sus lados.
- 30.** Encuentra dos números sabiendo que suma 18 unidades y su producto es 77.

**4****Sistemas de ecuaciones****Contenidos**

1. Ecuaciones lineales  
Definición. Solución
2. Sistemas de ecuaciones lineales  
Definición. Solución  
Número de soluciones
3. Métodos de resolución  
Reducción  
Sustitución  
Igualación
4. Aplicaciones prácticas  
Resolución de problemas

**Objetivos**

- Reconocer y clasificar los sistemas de ecuaciones según su número de soluciones.
- Obtener la solución de un sistema mediante unas tablas.
- Resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, por los métodos de sustitución, igualación y reducción.
- Utilizar el lenguaje algebraico y los sistemas para resolver problemas.

**Antes de empezar**

Lee en la escena el texto del poema y trata de plantear una ecuación y de buscar la solución.

<p><i>Por presumir de certero un tirador atrevido se encontró comprometido en el lance que os refiero. Y fue, que ante una caseta de la feria del lugar presumió de no fallar ni un tiro con la escopeta, y el feriante alzando el gallo un duro ofreció pagarle por cada acierto y cobrarle a tres pesetas el fallo</i></p>	<p><i>Dieciséis veces tiró el tirador afamado al fin dijo, despechado por los tiros que falló: "Mala escopeta fue el cebo y la causa de mi afrenta pero ajustada la cuenta ni me debes ni te debo". Y todo el que atentamente este relato siguió podrá decir fácilmente cuántos tiros acertó.</i></p>	<p>Completa la tabla de premios para obtener la solución de otra forma:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="border: none;">Aciertos</th> <th style="border: none;">Fallos</th> <th style="border: none;">Premio</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="border: none;">16</td><td style="border: none;">0</td><td style="border: none;">80</td></tr> <tr><td style="border: none;">15</td><td style="border: none;">1</td><td style="border: none;">72</td></tr> <tr><td style="border: none;">14</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">13</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">12</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">11</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">10</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">9</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">8</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">7</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">6</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> </tbody> </table>	Aciertos	Fallos	Premio	16	0	80	15	1	72	14			13			12			11			10			9			8			7			6		
Aciertos	Fallos	Premio																																				
16	0	80																																				
15	1	72																																				
14																																						
13																																						
12																																						
11																																						
10																																						
9																																						
8																																						
7																																						
6																																						

Quando acabes pulsa para ir a la página siguiente.

**1. Ecuaciones lineales**

**1.a. Definición. Solución.**

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:** Completa:

	Respuestas
¿Cuál es el grado de las ecuaciones lineales?	
¿Cuál es la expresión general de una ecuación lineal con dos incógnitas?	
¿Qué es una solución de una ecuación lineal con dos incógnitas?	
¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal con dos incógnitas?	
¿Qué tipo de línea forman las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas si las representamos gráficamente?	

Copia cuatro de los ejemplos que aparecen en la escena en los siguientes recuadros y haz la gráfica de la recta que forman las soluciones de cada una de las ecuaciones:

Ecuación:		
x	y	

Ecuación:		
x	y	

Ecuación:

x	y	

Ecuación:

x	y	

Quando hayas comprendido bien el concepto ... Pulsa en  para hacer ejercicios.

**EJERCICIO:**

Completa a continuación tres de los enunciados que aparecen en esa escena de ejercicios y resuélvelos. Después comprueba la solución en la escena:

	Soluciones
Halla una solución (x,y) de la ecuación _____ sabiendo que _____	
Razona si $x =$ , $y =$ es una solución de la ecuación: _____	
¿Cuánto vale "c" si $x =$ , $y =$ es una solución de la ecuación: _____	

Resuelve más ejercicios hasta que hayas comprendido bien el concepto de solución de una ecuación lineal con dos incógnitas.

**EJERCICIOS**

- Dada la ecuación:  $3x + 2y = 17$  , razona si los siguientes pares son solución.
  - $x=1$  ,  $y=3$
  - $x=5$  ,  $y=1$
- Dada la ecuación  $5x - 2y = c$  , halla el valor de c sabiendo que una solución es:
  - $x=3$  ,  $y=6$
  - $x=4$  ,  $y=1$
- Halla una solución (x,y) de la ecuación  $-4x + 5y = 17$  sabiendo que:
  - $x=7$
  - $y=1$
- Escribe una ecuación lineal con dos incógnitas cuya solución sea:
  - $x=1$  ,  $y=3$
  - $x=-2$  ,  $y=1$
- Haz una tabla de valores (x,y) que sean solución de la ecuación:  $2x + y = 17$  , y representa estos valores en un sistema de coordenadas.

Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2. Sistemas de ecuaciones lineales

### 2.a. Definición. Solución.

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:** Completa:

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas \_\_\_\_\_

Fórmula general de un sistema de dos ecuaciones



Una solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es \_\_\_\_\_

Copia **dos ejemplos** de los que aparecen en la escena y haz la gráfica de las rectas que corresponden a cada una de las ecuaciones e indica cuál es la solución del sistema:

Sistema: {		Gráfica 																							
Ec. 1:	Ec. 2:																								
y =	y =																								
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="width: 50px;">x</th><th style="width: 50px;">y</th></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> </table>	x		y											<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="width: 50px;">x</th><th style="width: 50px;">y</th></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> </table>	x	y									
x	y																								
x	y																								

**Solución del sistema**

( , )

Sistema: {		Gráfica 																							
Ec. 1:	Ec. 2:																								
y =	y =																								
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="width: 50px;">x</th><th style="width: 50px;">y</th></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> </table>	x		y											<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="width: 50px;">x</th><th style="width: 50px;">y</th></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> </table>	x	y									
x	y																								
x	y																								

**Solución del sistema**

( , )

Cuando hayas comprendido bien el concepto ... Pulsa en para hacer ejercicios.

**EJERCICIO:**

Completa a continuación tres de los enunciados que aparecen en esa escena de ejercicios y resuélvelos. Después comprueba la solución en la escena:

	Soluciones								
Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución sea: $x = \quad , y = \quad$	{								
Razona si $x = \quad , y = \quad$ es una solución del sistema: {									
Haz una tabla de valores y da la solución del sistema: {	X								
	y								

Resuelve más ejercicios hasta que hayas comprendido bien el concepto de solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

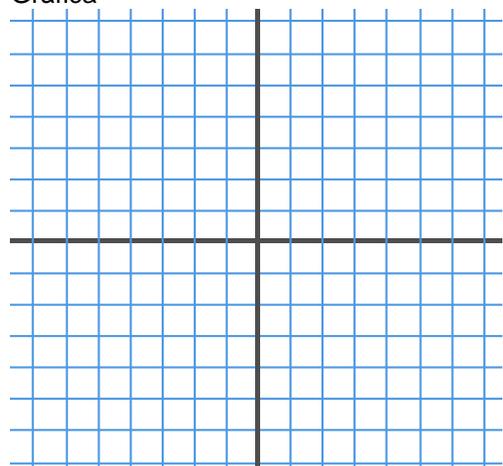
**2.b. Número de soluciones.**

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado. Aprende cómo se llaman los sistemas dependiendo del número de soluciones que tienen y como son en cada caso las rectas que forman las soluciones correspondientes a cada una de las ecuaciones que lo forman.

**EJERCICIO:** Contesta:

	Respuestas
¿Cómo se llama un sistema que tiene una única solución? ¿Cómo son las rectas que lo forman?	
¿Cómo se llama un sistema que tiene infinitas soluciones? ¿Cómo son las rectas que lo forman?	
¿Cómo se llama un sistema que no tiene solución? ¿Cómo son las rectas que lo forman?	

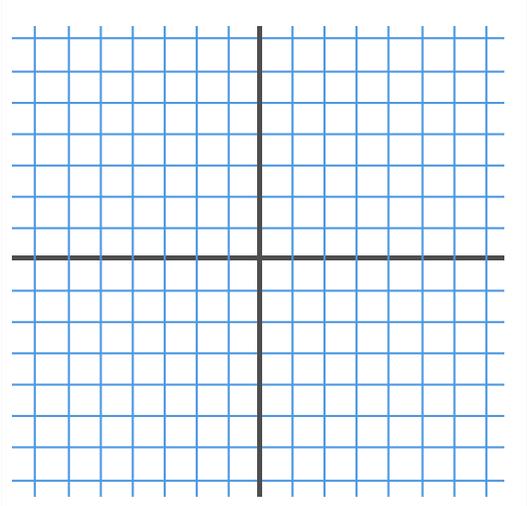
En la escena de la derecha elige la opción: Sistema Compatible Determinado ▼

<p>Sistema: {</p> <table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 50%;">Ec. 1:</td> <td style="width: 50%;">Ec. 2:</td> </tr> <tr> <td>=</td> <td>=</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">x    y</td> <td style="text-align: center;">x    y</td> </tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> </table>	Ec. 1:	Ec. 2:	=	=	x    y	x    y									<p>Gráfica</p> 	<p>Las rectas son:</p> <p>_____</p> <p>¿Cuántas soluciones tiene el sistema?</p> <p>_____</p>
Ec. 1:	Ec. 2:															
=	=															
x    y	x    y															

En la escena de la derecha elige la opción:

Sistema Compatible Indeterminado ▼

Sistema: {			
Ec. 1:		Ec. 2:	
=		=	
x	y	x	y



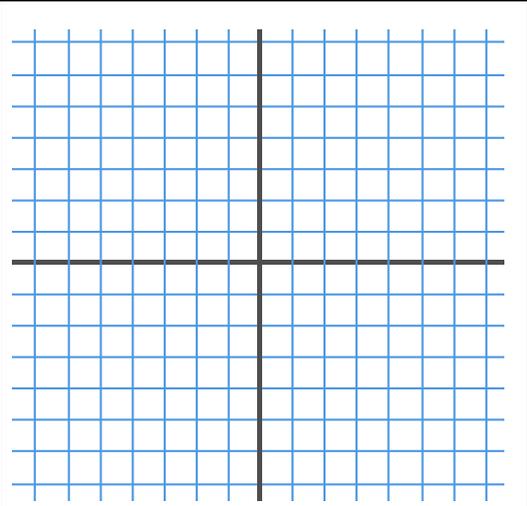
Las rectas son: \_\_\_\_\_

¿Cuántas soluciones tiene el sistema? \_\_\_\_\_

En la escena de la derecha elige la opción:

Sistema Incompatible ▼

Sistema: {			
Ec. 1:		Ec. 2:	
=		=	
x	y	x	y



Las rectas son: \_\_\_\_\_

¿Cuántas soluciones tiene el sistema? \_\_\_\_\_

### EJERCICIOS

6. Dado el sistema:  $\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ , razona si los siguientes pares son solución.

a)  $x=3, y=4$

b)  $x=5, y=1$

c)  $x=3, y=1$

7. Escribe un sistema de dos ecuaciones cuya solución sea:

b)  $x=1, y=2$

b)  $x=3, y=1$

c)  $x=2, y=3$

8. Haz una tabla de valores y da la solución del sistema:  $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$

9. Indica cuántas soluciones tiene el sistema:  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

### 3. Métodos de resolución

#### 3.a. Reducción.

Lee en la pantalla en qué consiste el método de reducción.

**EJERCICIO:** Completa:

Resolver un sistema por el método de reducción consiste en encontrar otro sistema, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

En la escena puedes ver como se resuelve un sistema por el método de reducción paso a paso. Completa en este recuadro el ejemplo que aparece en la escena.

Resolver el sistema: {

**Paso 1:** Multiplicar la primera ecuación por   
 Multiplicar la segunda ecuación por   
 Sumar las dos ecuaciones para eliminar la letra

**Paso 2:** Sustituir  en la  ecuación

**Paso 3:** Despejar la

**Paso 4:** Dar la solución

Observa que puedes **cambiar la letra** que se reduce y que puedes utilizar cualquiera de las dos ecuaciones a la hora de sustituir para hallar el valor de la otra incógnita. Practica con esa escena hasta que hayas comprendido bien el método.

Después... Pulsa en  para hacer ejercicios.

Aparece una escena con un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Resuélvelo en este recuadro.

Después pulsa  **Solución** para comprobar

Resolver el sistema por reducción: {

Multiplicar la primera ecuación por   
 Multiplicar la segunda ecuación por   
 Sumar las dos ecuaciones para eliminar la letra

Sustituir el valor de  en la ecuación

x =   
 y =

Pulsa

**OTRO EJEMPLO**

Y resuélvelo del mismo modo: Primero en el papel y después comprueba la solución.

Resolver el sistema por reducción: {

Multiplicar la primera ecuación por

Multiplicar la segunda ecuación por

Sumar las dos ecuaciones para eliminar la letra

Sustituir el valor de  en la ecuación

x =

y =

Haz varios ejemplos. Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

**3.b. Sustitución.**

Lee en la pantalla en qué consiste el método de sustitución.

**EJERCICIO:** Completa:

Para resolver un sistema por el método de sustitución \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

En la escena puedes ver como se resuelve un sistema por el método de sustitución paso a paso. Completa en este recuadro el ejemplo que aparece en la escena.

Resolver el sistema: {

**Paso 1:** Despejar la letra  en la  ecuación

**Paso 2:** Sustituir la letra  en la  ecuación

**Paso 3:** Resolver la ecuación de una incógnita que resulta:

**Paso 4:** Calcular la  Sustituyendo en la ecuación despejada

**Paso 5:** Dar la solución

Observa que podrías empezar **despejando la misma letra** en la otra ecuación o **la otra letra** en **cualquiera de las ecuaciones** y siempre obtendrías el mismo resultado. Practica con esa escena hasta que hayas comprendido bien el método.

Después... Pulsa en para hacer ejercicios.

Aparece una escena con un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Resuélvelo en este recuadro.

Después pulsa **Solución** para comprobar

Resolver el sistema por sustitución: {

Se despeja la  en la  ecuación ...

Solución: x =  
y =

Haz varios ejemplos. Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.c. Igualación.

Lee en la pantalla en qué consiste el método de igualación.

**EJERCICIO:** Completa:

Para resolver un sistema por el método de igualación \_\_\_\_\_

En la escena puedes ver como se resuelve un sistema por el método de igualación paso a paso. Completa en este recuadro el ejemplo que aparece en la escena.

Resolver el sistema: {

<p><b>Paso 1:</b> Despejar la letra <input type="text"/> en las dos ecuaciones</p> <div style="border: 1px solid black; height: 40px; width: 100%;"></div>	<p><b>Paso 2:</b> Igualar las dos ecuaciones despejadas</p> <div style="border: 1px solid black; height: 40px; width: 100%;"></div>
<p><b>Paso 3:</b> Resolver la ecuación de una incógnita que resulta:</p> <div style="border: 1px solid black; height: 30px; width: 100%;"></div>	
<p><b>Paso 4:</b> Calcular la <input type="text"/> sustituyendo en la ecuación despejada</p> <div style="border: 1px solid black; height: 40px; width: 100%;"></div>	<p><b>Paso 5:</b> Dar la solución</p> <div style="border: 1px solid black; height: 30px; width: 100%;"></div>

Observa que podrías empezar **despejando la otra letra** en **las dos ecuaciones** y obtendrías el mismo resultado.

Practica con esa escena hasta que hayas comprendido bien el método.

Después... Pulsa en para hacer ejercicios.

Aparece una escena con un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Resuélvelo en este recuadro.

Después pulsa



para comprobar

Resolver el sistema por igualación: {

Se despeja la  en las dos ecuaciones...

Solución: x =  
y =

### EJERCICIOS

**10.** Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

a)  $\begin{cases} 2x + 7y = 20 \\ 3x - 7y = 4 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

**11.** Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución:

a)  $\begin{cases} x + 7y = 11 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$

**12.** Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación:

a)  $\begin{cases} x + 7y = 23 \\ x - 5y = -13 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + y = 13 \\ x + y = 9 \end{cases}$

### EJERCICIOS de Refuerzo

Resuelve los siguientes sistemas por el método que consideres más adecuado en cada caso:

a)  $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x - 5y = 11 \\ -2x + 7y = -19 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 4x + 5y = 17 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + 5y = -12 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 2x + 5y = -2 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases}$

f)  $\begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 2x + 9y = 4 \end{cases}$

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

## 4. Aplicaciones prácticas

### 4.a. Resolución de problemas.

Lee el texto de pantalla: "Para resolver un problema mediante un sistema..."

Ejemplos. En la escena puedes ver ejemplos de problemas de tres tipos

Pulsa sobre Edades Geometría y continua con  para ver como se hace. Mezclas

Y "< volver" para volver al menú.

Para otros ejemplos del mismo tipo:

Pulsa si quieres  
cambiar los datos CAMBIAR

**a) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla tipo EDADES.**

**b) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla tipo GEOMETRÍA.**

**c) Copia un ejemplo completo tal y como aparece en la pantalla tipo MEZCLAS.**

Después... Pulsa en  para hacer ejercicios.

En la escena irán apareciendo diferentes problemas. Busca seis enunciados que comiencen con las frases que se indican a continuación. Complétalos y resuélvelos (utiliza el método que consideres más adecuado en cada uno de ellos). Después comprueba si lo has hecho bien.

**Ejemplo 1:**

Hallar dos números sabiendo que \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Solución: 

$x =$	$y =$
-------	-------

**Ejemplo 2:**

Paco tiene en su monedero \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Solución: 

$x =$	$y =$
-------	-------

**Ejemplo 3:**

Al dividir un número entre otro \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Solución: 

$x =$	$y =$
-------	-------

**Ejemplo 4:**

La base de un rectángulo mide \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Solución: 

$x =$	$y =$
-------	-------

**Ejemplo 5:**

En una clase \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Solución: 

$x =$	$y =$
-------	-------

**Ejemplo 6:**

Salvador ha hecho un examen que \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Solución: 

$x =$	$y =$
-------	-------

**EJERCICIOS**

13. Ana tiene en su cartera billetes de 10€ y 20€, en total tiene 20 billetes y 440€  
¿Cuántos billetes tiene de cada tipo?
14. La suma de las edades de Miguel y Pedro es 97. Dentro de 4 años la edad de Pedro será cuatro veces la edad de Miguel. ¿Qué edades tienen ambos?
15. Se quiere obtener 90 kg de café a 8'5 €/kg mezclando café de 15 €/kg con café de 6 €/kg, ¿cuántos kg de cada clase hay que mezclar?
16. En un taller hay 154 vehículos entre coches y motocicletas, si el número de ruedas es de 458, ¿cuántas motocicletas y coches hay?

**Recuerda lo más importante – RESUMEN**

Ecuación de primer grado con dos incógnitas: \_\_\_\_\_

a y b son los \_\_\_\_\_, c es el \_\_\_\_\_.

Las soluciones de la ecuación son \_\_\_\_\_

Hay \_\_\_\_\_. Las soluciones, si las representamos, están \_\_\_\_\_

Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. {

**a, b, p, q** son los \_\_\_\_\_, **c y r** son los \_\_\_\_\_.

Métodos de resolución:   •  
  •  
  •

**Sistema Compatible Determinado:** El que \_\_\_\_\_

**Sistema Compatible Indeterminado:** El que \_\_\_\_\_

**Sistema Incompatible:** El que \_\_\_\_\_

**Para resolver problemas:**

- 1) \_\_\_\_\_
- 2) \_\_\_\_\_
- 3) \_\_\_\_\_
- 4) \_\_\_\_\_
- 5) \_\_\_\_\_

Pulsa para ir a la página siguiente



## Para practicar

En esta unidad encontrarás dos páginas de ejercicios: Sistemas de ecuaciones y Resolver problemas con sistemas

### SISTEMAS DE ECUACIONES

Resolver dos sistemas de los que aparecen en esa página de ejercicios, por cada método:

#### Por SUSTITUCIÓN

1. {	
2. {	

#### Por IGUALACIÓN

3. {	
4. {	

**Por REDUCCIÓN**

5. {	
6. {	

**RESOLVER PROBLEMAS CON SISTEMAS**

Aparece el enunciado de un problema. Cópialos en el primer recuadro y resuélvelo en el espacio reservado para ello. Después comprueba en el ordenador si los has hecho bien.

Pulsando en " Ejercicio" aparecerán otros enunciados.

Resuelve un mínimo de cinco problemas procurando que los enunciados sean diferentes.

7.

Resolución:

8.

Resolución:

9.

Resolución:

10.

Resolución:

11.

Resolución:

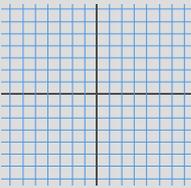
# Autoevaluación



Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.

1 Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución sea  $x = \_\_\_$ ,  $y = \_\_\_$

2 Completa el sistema para que sea:  
\_\_\_\_\_

3  (Dibuja las rectas en los ejes)  
Indica que tipo de sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es el representado.

4 Escribe una solución de la ecuación:  
\_\_\_\_\_

5 Resuelve por reducción: {

6 Resuelve por sustitución: {

7 Resuelve por igualación: {

8 Encuentra dos números \_\_\_\_\_ sea \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_ sea \_\_\_\_\_ .

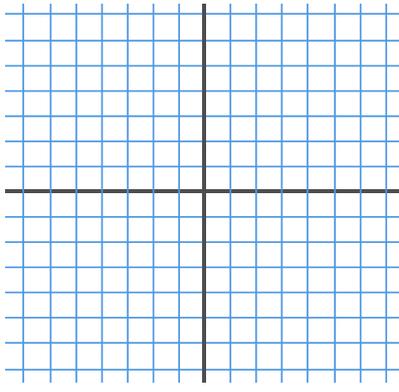
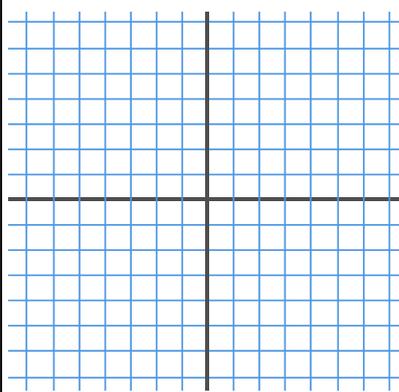
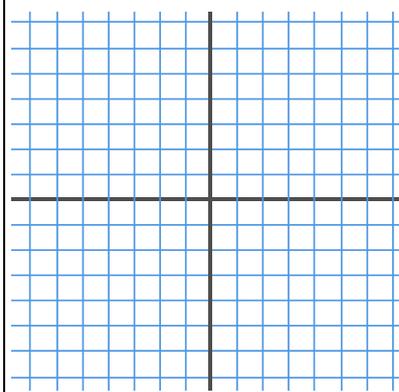
9 Indica sin resolver si el sistema es Incompatible o Compatible Indeterminado. {

10 Halla las dimensiones de un rectángulo de perímetro \_\_\_\_\_ si \_\_\_\_\_ .



## Para practicar más

- Calcula el valor de  $c$  para que la solución de la ecuación,  $x + 7y = c$  sea:
  - $x = 1, y = 2 \rightarrow$
  - $x = 3, y = -3 \rightarrow$
  - $x = 5, y = 0 \rightarrow$
  - $x = -2, y = 3 \rightarrow$
- Halla una solución  $(x,y)$  de la ecuación  $-4x + y = 17$  sabiendo que:
  - $x = 1 \rightarrow$
  - $y = -7 \rightarrow$
- Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución:
  - $x = 4, y = -3 \rightarrow \left\{ \right.$
  - $x = 1, y = -2 \rightarrow \left\{ \right.$
  - $x = 0, y = 5 \left\{ \right.$
  - $x = 1, y = 1 \left\{ \right.$
- Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que:
  - tenga infinitas soluciones  $\rightarrow \left\{ \right.$
  - tenga una sola solución  $\rightarrow \left\{ \right.$
  - no tenga solución  $\rightarrow \left\{ \right.$
- Razona si el punto  $(x,y)$  es solución del sistema:
  - $x = 3, y = 4 \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases} \rightarrow$
  - $x = 1, y = 2 \rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases} \rightarrow$
- Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$ 	b) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 	c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 10 \end{cases}$ 
---	---	---

**7. Resuelve por reducción:**

a) $\begin{cases} 2x + y = 15 \\ x - 2y = -15 \end{cases}$	b) $\begin{cases} -7x + 6y = -29 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$	c) $\begin{cases} -9x - 4y = -53 \\ 9x + 8y = 61 \end{cases}$
--	---	---

**8. Resuelve por sustitución:**

a) $\begin{cases} x - 12y = 1 \\ -4x - 9y = 15 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + 6y = 3 \\ -9x + 2y = -83 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x + 2y = -17 \\ 5x + 2y = -21 \end{cases}$
---	---	--

**9. Resuelve por igualación:**

a) $\begin{cases} x - 2y = 17 \\ 7x - 6y = 47 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x - 4y = 32 \\ x - 3y = -17 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x - 2y = -14 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$
--	--	---

- 10.** Hallar dos números sabiendo que el mayor más seis veces el menor es igual a 62 y el menor más cinco veces el mayor es igual a 78.
- 11.** Al dividir un número entre otro el cociente es 2 y el resto es 5. Si la diferencia entre el dividendo y el divisor es de 51, ¿de qué números se trata?
- 12.** La base de un rectángulo mide 20 dm más que su altura. Si el perímetro mide 172 dm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?
- 13.** En una clase hay 80 alumnos entre chicos y chicas. En el último examen de matemáticas han aprobado 60 alumnos, el 50% de las chicas y el 90 % de los chicos. ¿Cuántos chicos y chicas hay en la clase?
- 14.** La base de un rectángulo mide 70 dm más que su altura. Si el perímetro mide 412 dm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?
- 15.** Juan ha realizado un examen que constaba de 68 preguntas, ha dejado sin contestar 18 preguntas y ha obtenido 478 puntos. Si por cada respuesta correcta se suman 10 puntos y por cada respuesta incorrecta se resta un punto, ¿cuántas preguntas ha contestado bien y cuántas ha contestado mal?
- 16.** Paco tiene en su monedero 210€ en billetes de 5 y 20 euros. Si dispone de 15 billetes, ¿cuántos billetes tiene de cada clase?
- 17.** La suma de dos números es 85 y su diferencia es 19. ¿Cuáles son los números?
- 18.** La suma de las edades de Luisa y de Miguel es 32 años. Dentro de 8 años la edad de Miguel será dos veces la edad de Luisa. ¿Qué edades tienen ambos?

- 19.** María ha comprado un pantalón y un jersey. Los precios de estas prendas suman 77€, pero le han hecho un descuento del 10% en el pantalón y un 20% en el jersey, pagando en total 63'60€. ¿Cuál es el precio sin rebajar de cada prenda?
- 20.** Encontrar un número de dos cifras sabiendo que suman 10 y que si le restamos el número que resulta al intercambiar sus cifras el resultado es 72.
- 21.** Halla las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 88cm y que el triple de la base más el doble de la altura es igual a 118.
- 22.** La suma de las edades de Raquel y Luisa son 65 años. La edad de Luisa más cuatro veces la edad de Raquel es igual a 104. ¿Qué edades tienen ambos?.
- 23.** Se quiere obtener 25 kg de café a 12'36 €/kg, mezclando café de 15 €/kg con café de 9 €/kg. ¿Cuántos kilogramos de cada clase hay que mezclar?
- 24.** Un hotel tiene 94 habitaciones entre dobles e individuales. Si el número de camas es 170. ¿Cuántas habitaciones dobles tiene? ¿Cuántas individuales?
- 25.** Halla dos números tales que si se dividen el primero por 3 y el segundo por 4, la suma de los cocientes es 15, mientras si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5 la suma de los productos es 188.
- 26.** En un corral hay gallinas y conejos: si se cuentan las cabezas, son 50, si se cuentan las patas son 134. ¿Cuántos animales de cada clase hay?.
- 27.** Calcula dos números que sumen 150 y cuya diferencia sea cuádruple del menor.



## Progresiones

### Contenidos

1. Sucesiones  
Definición. Regla de formación  
Término general
2. Progresiones Aritméticas  
Definición  
Término general  
Suma de  $n$  términos
3. Progresiones Geométricas  
Definición  
Término general  
Suma de  $n$  términos  
Suma de todos los términos  
Producto de  $n$  términos
4. Aplicaciones  
Interpolación  
Interés Compuesto  
Resolución de problemas

### Objetivos

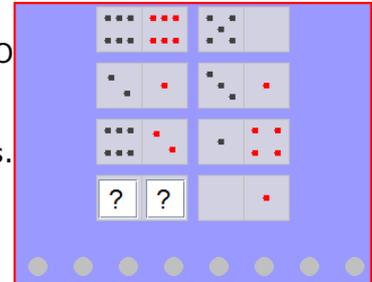
- Reconocer una sucesión de números.
- Reconocer y distinguir las progresiones aritméticas y geométricas.
- Calcular el término general de una progresión aritmética y geométrica.
- Hallar la suma de los términos de una progresión aritmética finita y geométrica finita o infinita.
- Hallar el producto de los términos de una progresión geométrica finita.
- Resolver problemas con la ayuda de las progresiones.
- Resolver problemas de interés compuesto.

**Antes de empezar**

Para empezar se propone un juego en el que debes averiguar cuál es la ficha que falta en cada secuencia de fichas de dominó

ENCUENTRA EL DOMINÓ QUE FALTA Y PULSA INTRO

Hay 10 propuestas diferentes.



Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

**1. Sucesiones**

**1.a. Definición. Regla de formación**

Lee el texto de la pantalla.

**Contesta:**

¿Qué es una sucesión? \_\_\_\_\_

¿Cómo se llama cada elemento de la sucesión? \_\_\_\_\_

¿Cómo se llama el criterio a partir del cual se determinan los términos de una sucesión?

En la escena tienes varios ejemplos para ver las reglas de formación de sucesiones. Lee detenidamente varios ejemplos y completa dos de ellos en los siguientes recuadros:

**Ejemplo 1**

Sucesión: \_\_\_\_\_

Regla de formación:

<p>Términos:</p> <p><math>a_1 =</math></p> <p><math>a_2 =</math></p> <p><math>a_3 =</math></p> <p><math>a_4 =</math></p> <p><math>a_5 =</math></p>
--

**Ejemplo 2**

Sucesión: \_\_\_\_\_

Regla de formación:

<p>Términos:</p> <p><math>a_1 =</math></p> <p><math>a_2 =</math></p> <p><math>a_3 =</math></p> <p><math>a_4 =</math></p> <p><math>a_5 =</math></p>
--

Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena

### EJERCICIOS de Refuerzo

- A.** Escribe la regla de formación de la siguiente sucesión:
- a) 9, 11, 14, 18, ...
  - b) 7, -21, 63, -189, ...
  - c) -8, 34, -134, 538, ...
  - d) -729, -243, -81, -27, ...
- B.** Escribe los 4 primeros términos de una sucesión si el primer término es -4, y la regla de formación es: Cada término es igual al anterior más 4.
- C.** Escribe los 4 primeros términos de una sucesión si el primer término es -9, y la regla de formación es: Cada término es igual al anterior por 2 más 4.
- D.** Escribe los 4 primeros términos de una sucesión si el primer término es -6, y la regla de formación es: Cada término es igual al anterior por 5 más 4.
- E.** Escribe los 4 primeros términos de una sucesión si el primer término es 9, y la regla de formación es: Cada término es igual al anterior por 4.

Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.b. Término general

Lee el texto de la pantalla y contesta:

¿Qué posición ocupa el término general de una sucesión? \_\_\_\_\_.

En la escena tienes varios ejemplos sobre "Término general" de sucesiones. Lee detenidamente varios ejemplos y completa dos de ellos en los siguientes recuadros:

#### Ejemplo 1

Sucesión: \_\_\_\_\_

Regla de formación:

Término general:  $a_n =$

Términos:

$a_1 =$

$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

$a_5 =$

#### Ejemplo 2

Sucesión: \_\_\_\_\_

Regla de formación:

Término general:  $a_n =$

Términos:

$a_1 =$

$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

$a_5 =$

Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios de cálculo de los primeros términos de una sucesión a partir de su término general, son similares a los de esa escena:

### EJERCICIOS de Refuerzo

Escribe los 4 primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones:

- a)  $a_n = 9n$
- b)  $a_n = -3n - 7$
- c)  $a_n = 5n^2 + 9$
- d)  $a_n = -9n^2 + 6$
- e)  $a_n = 4^{n-1}$
- f)  $a_n = 3^{-n+5}$

### EJERCICIOS

1. El primer término de una sucesión es 4, escribe los cuatro primeros términos de ella si: "Cada término es igual al anterior más el lugar que ocupa":
2. Escribe la regla de formación de la siguiente sucesión: 3, 8, 13, 18,...
3. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión formada por los cuadrados de los números naturales.
4. Calcula los 4 primeros términos de la sucesión de término general:  $a_n = \frac{n}{n+1}$
5. Escribe los 5 primeros términos de una sucesión cuya regla de formación es: "Cada término es la suma de los dos anteriores"  $a_1 = 3$  y  $a_2 = 7$
6. Escribe el término general de estas sucesiones:
  - a) 2, 3, 4, 5, 6, ....
  - b) 2, 4, 8, 16, 32, ....

Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2. Progresiones Aritméticas

### 2.a. Definición

Lee el texto de la pantalla y completa:

Una **progresión aritmética** es \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Si  $d > 0$ , los números cada vez son \_\_\_\_\_, se dice que la progresión es \_\_\_\_\_

Si  $d < 0$ , los números cada vez son \_\_\_\_\_, se dice que la progresión es \_\_\_\_\_

En la escena tienes varios ejemplos para ver las reglas de formación de progresiones aritméticas. Lee detenidamente varios ejemplos y completa dos en los recuadros siguientes:

**Ejemplo 1**

Progresión: \_\_\_\_\_

Regla de formación:

Términos:

$$a_2 = a_1 + \quad = \quad + \quad =$$

$$a_3 = a_2 + \quad = \quad + \quad =$$

$$a_4 = a_3 + \quad = \quad + \quad =$$

$$a_5 = a_4 + \quad = \quad + \quad =$$

$$a_6 = a_5 + \quad = \quad + \quad =$$

 La diferencia es:  $d =$ 

La progresión es \_\_\_\_\_

**Ejemplo 2**

Progresión: \_\_\_\_\_

Regla de formación:

Términos:

$$a_2 = a_1 + \quad = \quad + \quad =$$

$$a_3 = a_2 + \quad = \quad + \quad =$$

$$a_4 = a_3 + \quad = \quad + \quad =$$

$$a_5 = a_4 + \quad = \quad + \quad =$$

$$a_6 = a_5 + \quad = \quad + \quad =$$

 La diferencia es:  $d =$ 

La progresión es \_\_\_\_\_

Después... Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena:

**EJERCICIOS de Refuerzo**
**A.** Escribe el siguiente término de la progresión aritmética:

a) 0, -2, -4, -6, ...

c) -4, 5, 14, 23, ...

b) 14, 7, 0, -7, ...

d) 11, 6, 1, -4, ...

**B.** Razona si la siguiente progresión aritmética es creciente o decreciente:

a) 3, 4, 5, 6, ...

c) -3, -6, -9, -12, ...

b) -2, -7, -12, -17, ...

d) -2, -1, 0, 1, ...

**C.** Razona si la siguiente sucesión es una progresión aritmética:

a) 2, 5, 8, 11, ...

c) 11, 8, 5, 2, ...

b) 1, -6, -13, -20, ...

d) 9, 3, -3, -9, ...

**D.** Escribe la regla de formación de la siguiente progresión aritmética:

c) 4, 8, 12, 16, ...

c) 16, 9, 2, -5, ...

d) 2, -2, -6, -10, ...

d) -6, -3, 0, 3, ...

Pulsa para ir a la página siguiente.

## 2.b. Término general

Lee el texto de la pantalla. Fíjate en el proceso que se sigue para obtener el término general de una progresión aritmética y completa la fórmula en el recuadro:

El **término general** de una **progresión aritmética** es

**a<sub>1</sub>** es \_\_\_\_\_ y **d** es \_\_\_\_\_

En la escena tienes varios ejemplos de cálculo del término general. Completa dos de ellos en los siguientes recuadros:

<b>Ejemplo 1</b>
Progresión: _____
El primer término es: $a_1 =$ _____
La diferencia es: $d =$ _____
El término general es: $a_n =$ _____

<b>Ejemplo 2</b>
Progresión: _____
El primer término es: $a_1 =$ _____
La diferencia es: $d =$ _____
El término general es: $a_n =$ _____

Después... Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena:

### EJERCICIOS de Refuerzo

- A.** En una progresión aritmética, el término 9 es 31 y la diferencia es 4. Halla el término general.
- B.** En una progresión aritmética, el término 8 es 35 y el término 18 es 105. Halla el término general.
- C.** Halla el término general de la progresión aritmética: 2, -6, -14, -22, ...
- D.** En una progresión aritmética, el término 10 es 43 y la diferencia es 5. Halla el término general.
- E.** En una progresión aritmética, el término 4 es 1 y el término 19 es -44. Halla el término general.
- F.** Halla término general de la progresión aritmética: -1, -8, -15, -22, ...
- G.** En una progresión aritmética, el término 10 es -46 y la diferencia es -6. Halla el término general.
- H.** En una progresión aritmética, el término 4 es -1 y el término 23 es 56. Halla el término general.
- I.** Halla término general de la progresión aritmética: 12, 4, -4, -12, ...

Pulsa para ir a la página siguiente.

## 2.c. Suma de n términos

Lee el texto de la pantalla. Fíjate en la explicación por la cual se llega a la fórmula para calcular la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

Observa que hay un enlace: "Para ver como se obtiene la fórmula haz "clic" **aquí**" que abre una ventana con una explicación más detallada de la obtención de la fórmula.

Completa:

La **suma** de los n primeros términos de una **progresión aritmética** es

$a_1$  es \_\_\_\_\_,  $a_n$  es \_\_\_\_\_, y  $n$  es \_\_\_\_\_

En la escena tienes varios ejemplos sobre "Suma de los términos" y "Términos equidistantes" de progresiones aritméticas. Lee detenidamente y completa dos en los siguientes recuadros:

### Ejemplo 1

#### Términos equidistantes:

Observamos que la suma de los términos equidistantes es la misma:

$$a_1 + \quad =$$

$$a_2 + \quad =$$

$$a_3 + \quad =$$

$$a_4 + \quad =$$

$$a_5 + \quad =$$

...

#### Suma de los n términos:

Hay \_\_\_\_ términos

El primero es: \_\_\_\_    S =

El último es: \_\_\_\_

### Ejemplo 2

#### Términos equidistantes:

Observamos que la suma de los términos equidistantes es la misma:

$$a_1 + \quad =$$

$$a_2 + \quad =$$

$$a_3 + \quad =$$

$$a_4 + \quad =$$

$$a_5 + \quad =$$

...

#### Suma de los n términos:

Hay \_\_\_\_ términos

El primero es: \_\_\_\_    S =

El último es: \_\_\_\_

Después... Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

Resuelve varios ejercicios de los que se proponen en la escena.

Cuando hayas practicado suficientemente, haz los que se proponen en el siguiente recuadro que son similares a los de esa escena.

### EJERCICIOS de Refuerzo

- A. Calcular la suma de los primeros 22 múltiplos de 4.
- B. Calcular la suma de los 800 primeros términos de la sucesión:  $-9, -7, -5, -3, -1, \dots$
- C. Calcular la suma de los términos de una progresión aritmética de diferencia  $-4$  sabiendo que el primero es  $3$  y el último es  $-45$ .
- D. Calcular la suma de los 300 primeros términos de la sucesión:  $10, 8, 6, 4, 2, \dots$
- E. Calcular la suma de los múltiplos de  $4$  comprendidos entre  $10$  y  $650$ .
- F. Calcular la suma de los términos de una progresión aritmética de diferencia  $-2$  sabiendo que el primero es  $-5$  y el último es  $-23$ .
- G. Calcular la suma de los múltiplos de  $7$  comprendidos entre  $22$  y  $3032$ .
- H. Calcular la suma de los 43 primeros términos de la sucesión:  $3, 1, -1, -3, -5, \dots$
- I. Calcular la suma de los términos de una progresión aritmética de diferencia  $2$  sabiendo que el primero es  $-8$  y el último es  $28$ .

### EJERCICIOS

- 7. Determina la diferencia de las siguientes progresiones aritméticas:
  - a)  $1, 4, 7, 10, 13, \dots$
  - b)  $8, 6, 4, 2, 0, \dots$
  - c)  $2, 6, 10, 14, 18, \dots$
- 8. Escribe el término general de las siguientes progresiones aritméticas:
  - a)  $4, 6, 8, 10, \dots$
  - b)  $3, -1, -5, -9, \dots$
  - c)  $5, 8, 11, 14, \dots$
- 9. Calcular la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética:  $2, 4, 6, 8, 10, \dots$
- 10. Calcular la suma de los 20 primeros términos de la progresión aritmética:  $3, 7, 11, 15, 19, \dots$
- 11. El primer término de una progresión aritmética de diferencia  $5$  es  $4$  y el último término es  $499$ . Halla la suma de todos ellos.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3. Progresiones geométricas

#### 3.a. Definición

Lee el texto de la pantalla y completa:

 Una **progresión geométrica** es \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_.

En la escena tienes varios ejemplos para ver las reglas de formación de progresiones geométricas. Lee detenidamente varios ejemplos. Completa dos en los recuadros siguientes:

#### Ejemplo 1

Progresión: \_\_\_\_\_

Regla de formación:

Términos:

$$a_2 = a_1 \cdot \quad = \quad \cdot \quad =$$

$$a_3 = a_2 \cdot \quad = \quad \cdot \quad =$$

$$a_4 = a_3 \cdot \quad = \quad \cdot \quad =$$

$$a_5 = a_4 \cdot \quad = \quad \cdot \quad =$$

La razón es:  $r =$

La progresión es \_\_\_\_\_

#### Ejemplo 2

Progresión: \_\_\_\_\_

Regla de formación:

Términos:

$$a_2 = a_1 \cdot \quad = \quad \cdot \quad =$$

$$a_3 = a_2 \cdot \quad = \quad \cdot \quad =$$

$$a_4 = a_3 \cdot \quad = \quad \cdot \quad =$$

$$a_5 = a_4 \cdot \quad = \quad \cdot \quad =$$

La razón es:  $r =$

La progresión es \_\_\_\_\_

Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena:

### EJERCICIOS de Refuerzo

**A.** Escribe el siguiente término de la progresión geométrica:

a) 81, 27, 9, 3, ...

c) 4096, 1024, 256, 64, ...

b) 64, 32, 16, 8, ...

d) -27, -81, -243, -729, ...

**B.** Razona si la siguiente progresión geométrica es creciente, decreciente o alternada:

a) 243, 81, 27, 9, ...

c) 4096, 512, 64, 8, ...

b) -81, -243, -729, -2187, ...

d) 256, 64, 16, 4, ...

**C.** Razona si la siguiente sucesión es una progresión geométrica:

a) 1, 5, 25, 125, ...

c) -7, -35, -175, -1750, ...

b) 5, 35, 245, 1715, ...

d) -9, -36, -144, -576, ...

Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3.b. Término general

Lee el texto de la pantalla. Fíjate en el proceso que se sigue para obtener el término general de una progresión geométrica. Completa:

El **término general** de una **progresión geométrica** es

$a_1$  es \_\_\_\_\_ y  $r$  es \_\_\_\_\_

En la escena tienes varios ejemplos sobre "Término general" de progresiones geométricas. Completa dos de ellos en los siguientes recuadros:

Ejemplo 1
Progresión: _____
El primer término es: $a_1 =$ _____
La razón es: $r =$ _____
El término general es: $a_n =$ _____

Ejemplo 2
Progresión: _____
El primer término es: $a_1 =$ _____
La razón es: $r =$ _____
El término general es: $a_n =$ _____

Después... Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena:

EJERCICIOS de Refuerzo

- A.** En una progresión geométrica, el término 3 es 28 y la razón es -2. Halla el término general.
- B.** En una progresión geométrica, el término 6 es 6561 y la razón es 3. Halla el término general.
- C.** En una progresión geométrica creciente, el término 5 es 112 y el término 6 es 224. Halla el término general.
- D.** En una progresión geométrica creciente, el término 4 es 81 y el término 5 es 243. Halla el término general.
- E.** En una progresión geométrica decreciente, el término 4 es -40 y el término 5 es -80. Halla el término general.
- F.** En una progresión geométrica decreciente, el término 4 es -40 y el término 5 es -80. Halla el término general.
- G.** Halla el término general de la progresión geométrica: 9, 27, 81, 243, ...
- H.** Halla el término general de la progresión geométrica: 3, -6, 12, -24, ...

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.c. Suma de n términos

Lee el texto de la pantalla. Fíjate en la explicación por la cual se llega a la fórmula para calcular la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica y completa:

La <b>suma</b> de los <b>n</b> primeros términos de una <b>progresión geométrica</b> es: <div style="border: 1px solid black; width: 150px; height: 30px; margin: 5px auto;"></div> a <sub>1</sub> es _____, y r es _____	Observamos que la fórmula también se puede escribir: <div style="border: 1px solid black; width: 150px; height: 30px; margin: 5px auto;"></div> a <sub>1</sub> es _____, a <sub>n</sub> es _____, y r es _____
--	---

En la escena tienes varios ejemplos sobre “Suma de los n términos” de progresiones geométricas. Lee detenidamente varios ejemplos y completa dos en los siguientes recuadros:

**Ejemplo 1**

**Suma de los n términos:**

$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$	Hay ____ términos El primero es: ____ La razón es: ____ S = _____
$S_n = \frac{a_n r^n - a_1}{r - 1}$	El primero es: ____ El último es: ____ La razón es: ____ S = _____

**Ejemplo 2**

**Suma de los n términos:**

$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$	Hay ____ términos El primero es: ____ La razón es: ____ S = _____
$S_n = \frac{a_n r^n - a_1}{r - 1}$	El primero es: ____ El último es: ____ La razón es: ____ S = _____

Después... Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena:

### EJERCICIOS de Refuerzo

- A.** Halla la suma de los primeros 8 términos de la progresión: -3, -9, -27, -81, ...
- B.** En una progresión geométrica creciente, el término 7 es 512 y el término 8 es 1024. Halla la suma de los primeros 12 términos.
- C.** En una progresión geométrica, el término 3 es 27 y la razón es -3. Halla la suma de los 7 primeros términos.
- D.** Halla la suma de los primeros 13 términos de la progresión: -1, 2, -4, 8, ...
- E.** Halla la suma de los primeros 6 términos de progresión geométrica cuyo término general es:  $a_n = (-4)^{n-1}$
- F.** En una progresión geométrica creciente, el término 9 es 4096 y el término 10 es 8192. Halla la suma de los primeros 13 términos.

- G. Halla la suma de los primeros 10 términos de progresión geométrica cuyo término general es:  $a_n = -7 \cdot 3^{n-1}$
- H. En una progresión geométrica, el término 6 es 96 y la razón es 2. Halla la suma de los 13 primeros términos.

Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.d. Suma de todos los términos ( $|r| < 1$ )

Lee la explicación para comprender cómo se llega a la fórmula para calcular la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, cuando la razón esta entre -1 y 1. Completa:

La **suma** de los infinitos términos de una **progresión geométrica** de razón  $r$ ,  $-1 < r < 1$  es:

$a_1$  es \_\_\_\_\_

En la escena tienes varios ejemplos sobre "Suma de todos los términos ( $|r| < 1$ )" de progresiones geométricas. Lee varios ejemplos y completa dos en los siguientes recuadros:

**Ejemplo 1**

**Suma de todos los términos:**

---

El primero es: \_\_\_\_\_

La razón es: \_\_\_\_\_

La suma es:  $S =$  \_\_\_\_\_

**Ejemplo 2**

**Suma de todos los términos:**

---

El primero es: \_\_\_\_\_

La razón es: \_\_\_\_\_

La suma es:  $S =$  \_\_\_\_\_

Después... Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena:

**EJERCICIOS de Refuerzo**

- A. Halla la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica sabiendo que  $a_7 = 3$  y  $a_6 = 6$
- B. Halla la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón  $\frac{1}{7}$  y primer término 7.
- C. Halla la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica cuyo término general es:  $a_n = 2^{-n+5}$
- D. Halla la suma de los infinitos términos de la progresión: -4, -8, -16, -32, ...
- E. En una progresión geométrica la suma de los infinitos términos es 16 y la razón  $\frac{1}{2}$ . Halla el primer término.

F. Halla la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica sabiendo que

$$a_4 = 2 \text{ y } r = \frac{1}{4}$$

G. En una progresión geométrica la suma de los infinitos términos es 1458 y la razón

$$\frac{1}{3}. \text{ Halla el primer término.}$$

H. Halla la suma de los infinitos términos de la progresión:  $-5, \frac{-10}{3}, \frac{-20}{9}, \frac{-40}{27}, \dots$

Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3.e. Producto de los n términos

Lee el texto de la pantalla. Fíjate en la explicación por la cual se llega a la fórmula para calcular el producto de los n primeros términos de una progresión geométrica.

Observa que hay un enlace: "Si quieres ver como se obtiene la fórmula pulsa **aquí**" que abre una ventana con una explicación más detallada de la obtención de la fórmula.

Completa:

El **producto** de los **n** primeros términos de una **progresión geométrica** es

$a_1$  es \_\_\_\_\_,  $a_n$  es \_\_\_\_\_, y **n** es \_\_\_\_\_

En la escena tienes varios ejemplos sobre "Producto de los términos" y "Términos equidistantes" de progresiones geométricas. Lee detenidamente varios ejemplos. y completa dos en los siguientes recuadros:

#### Ejemplo 1

**Términos equidistantes:**

Observamos que el producto de los términos equidistantes es el mismo:

$$a_1 \cdot \quad =$$

$$a_2 \cdot \quad =$$

$$a_3 \cdot \quad =$$

...

**Producto de los n términos:**

Hay \_\_\_\_\_ términos

El primero es: \_\_\_\_\_ P =

El último es: \_\_\_\_\_

#### Ejemplo 2

**Términos equidistantes:**

Observamos que el producto de los términos equidistantes es el mismo:

$$a_1 \cdot \quad =$$

$$a_2 \cdot \quad =$$

$$a_3 \cdot \quad =$$

...

**Producto de los n términos:**

Hay \_\_\_\_\_ términos

El primero es: \_\_\_\_\_ P =

El último es: \_\_\_\_\_

Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena:

### EJERCICIOS de Refuerzo

- A. Halla el producto de los primeros 7 términos de la progresión: 3, 9, 27, 81, ...
- B. En una progresión geométrica, el término 2 es 4 y el término 4 es 16. Halla el producto de los primeros 5 términos.
- C. Halla el producto de los primeros 34 términos de la progresión geométrica cuyo término general es:  $a_n = 2^{n+1}$
- D. En una progresión geométrica, el término 6 es 2187 y la razón es 3. Halla el producto de los primeros 6 términos.
- E. Halla el producto de los primeros 6 términos de la progresión: 27, 81, 243, 729, ...
- F. En una progresión geométrica, el término 4 es 64 y la razón es 2. Halla el producto de los primeros 7 términos.
- G. En una progresión geométrica, el término 2 es 8 y el término 3 es 16. Halla el producto de los primeros 4 términos.
- H. Halla el producto de los primeros 14 términos de la progresión geométrica cuyo término general es:  $a_n = 7^{4n+4}$

### EJERCICIOS

- 12. Determina la razón de las siguientes progresiones geométricas:
  - a) 1, 2, 4, 8, 16, ...
  - b) 81, 27, 9, 3, 1, ...
- 13. Escribe el término general de las siguientes progresiones geométricas:
  - a) 4, 12, 36, 108, ...
  - b) 8, 16, 32, 64, ...
- 14. Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16, ...
- 15. Calcula la suma de los términos de una progresión geométrica finita de primer término 1, razón 3 y último término 243:
- 16. Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica: 8, 4, 2, 1, ...
- 17. Calcula el producto de los 8 primeros términos de la progresión geométrica:  $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 4. Aplicaciones

### 4.a. Interpolación

Lee la explicación para comprender el concepto de **interpolación** y completa:

Interpolación significa: \_\_\_\_\_.



Dados números  $a$  y  $b$ , **interpolación  $n$  medios (diferenciales ó geométricos) entre  $a$  y  $b$**  es \_\_\_\_\_ de forma que \_\_\_\_\_ formen una progresión (aritmética ó geométrica).

En la escena tienes varios ejemplos sobre "Interpolación aritmética" e "Interpolación geométrica". Lee detenidamente y completa dos de cada tipo en los siguientes recuadros:

**INTERPOLACIÓN ARITMÉTICA**

**Ejemplo 1**

**Interpolación \_\_\_\_\_ medios aritméticos entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_**

Hay que encontrar \_\_\_\_\_ números entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_ de modo que formen una progresión aritmética de \_\_\_\_\_ términos, con  $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$

Para ello hay que encontrar \_\_\_\_\_ de la progresión:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$d = \underline{\hspace{2cm}}$$

Los medios aritméticos son:

**Ejemplo 2**

**Interpolación \_\_\_\_\_ medios aritméticos entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_**

Hay que encontrar \_\_\_\_\_ números entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_ de modo que formen una progresión aritmética de \_\_\_\_\_ términos, con  $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$

Para ello hay que encontrar \_\_\_\_\_ de la progresión:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$d = \underline{\hspace{2cm}}$$

Los medios aritméticos son:

**INTERPOLACIÓN GEOMÉTRICA**

**Ejemplo 1**

**Interpolar \_\_\_ medios geométricos entre \_\_\_ y \_\_\_**

Hay que encontrar \_\_\_ números entre \_\_\_ y \_\_\_ de modo que formen una progresión geométrica de \_\_\_ términos, con  $a_1 = \underline{\hspace{1cm}}$  y  $a_n = \underline{\hspace{1cm}}$

Para ello hay que encontrar \_\_\_\_\_ de la progresión:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$r = \boxed{\hspace{2cm}}$$

Los medios geométricos son:

**Ejemplo 2**

**Interpolar \_\_\_ medios geométricos entre \_\_\_ y \_\_\_**

Hay que encontrar \_\_\_ números entre \_\_\_ y \_\_\_ de modo que formen una progresión geométrica de \_\_\_ términos, con  $a_1 = \underline{\hspace{1cm}}$  y  $a_n = \underline{\hspace{1cm}}$

Para ello hay que encontrar \_\_\_\_\_ de la progresión:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$r = \boxed{\hspace{2cm}}$$

Los medios geométricos son:

Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena:

**EJERCICIOS de Refuerzo**

- A. Interpolar 4 medios aritméticos entre -9 y 1.
- B. Interpolar 6 medios aritméticos entre 1 y 71.
- C. Interpolar 5 medios aritméticos entre 2 y 110.
- D. Interpolar 2 medios geométricos entre 6 y 750.
- E. Interpolar 3 medios geométricos entre 3 y 768.
- F. Interpolar 4 medios geométricos entre 2 y 64.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 4.b. Interés compuesto

Lee la explicación para comprender el concepto de **interés compuesto** y contesta:

¿Cómo hay que hacer una inversión de un capital durante un periodo de tiempo,  $t$ , a un rédito,  $r\%$ , para que sea una operación de **interés compuesto**?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



El capital final  $C_f$  obtenido al invertir un Capital  $C$ , al rédito  $r\%$ , durante  $t$  años, a interés compuesto viene dado por la fórmula:

Observa que hay un enlace: "Para ver como se obtiene la fórmula pulsa **aquí**" que abre una ventana con la secuencia de fórmulas que conducen su obtención.

En la escena tienes varios ejemplos sobre "Interés compuesto". Lee detenidamente varios ejemplos y completa uno en los siguientes recuadros:

**INTERÉS COMPUESTO**

**Ejemplo**

Depositamos \_\_\_\_\_ al \_\_\_\_\_ de interés compuesto anual. ¿Qué cantidad de dinero tendremos al cabo de \_\_\_\_\_ años?

Hay que encontrar \_\_\_\_\_ números entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_ de modo que formen una progresión aritmética de \_\_\_\_\_ términos, con  $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$

Aplicamos la fórmula del interés simple:

Año	C. Inicial	Interés	C. Final
-----	------------	---------	----------

Observa que si aplicamos la fórmula del interés compuesto:

Se obtiene el mismo capital final:

Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena:

### EJERCICIOS de Refuerzo

- A.** Depositamos 8000 € al 6% de interés compuesto anual. ¿Qué cantidad de dinero tendremos al cabo de 367 días?
- B.** Depositamos 20 € al 3% de interés compuesto anual. ¿Qué cantidad de dinero tendremos al cabo de 9 meses?
- C.** Depositamos 3000 € al 4% de interés compuesto anual. ¿Qué cantidad de dinero tendremos al cabo de 5 años?
- D.** Un capital de 9000 € se convierte en 10528,73 € al cabo de 4 años, a cierto interés compuesto anual. ¿Cuál es el interés?
- E.** Un capital de 70 € se convierte en 81,89 € al cabo de 4 años, a cierto interés compuesto anual. ¿Cuál es el interés?
- F.** Calcula el capital, que invertido a un interés compuesto del 3%, produce en 4 años un capital de 90,04 €.
- G.** Calcula el capital, que invertido a un interés compuesto del 6%, produce en 2 años un capital de 8988,8 €.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

#### 4.c. Resolución de problemas

Las progresiones aparecen en multitud de ocasiones en la resolución de distintos problemas de la vida real.

En la escena tienes varios ejemplos sobre resolución de problemas. Aparecen tres tipos de problemas: Economía, Capitalización y Generatriz.

Elige cada uno de esos tipos y lee detenidamente su resolución.

Completa uno de cada tipo en los siguientes recuadros:

#### PROBLEMA DE ECONOMÍA

**1º. Comprender el enunciado:**



**2º. Interpretar el problema:**



**3º. Identificar la progresión:** 

**4º. Aplicar la fórmula adecuada para dar la solución:** 

**PROBLEMA DE CAPITALIZACIÓN**

**1º. Comprender el enunciado:** 

**2º. Interpretar el problema:** 

**3º. Identificar la progresión:** 

**4º. Aplicar la fórmula adecuada para dar la solución:** 

**PROBLEMA DE FRACCIONES GENERATRICES**

1º. Comprender el enunciado:



2º. Interpretar el problema:



3º. Identificar la progresión:



4º. Aplicar la fórmula adecuada para dar la solución:



Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena:

**EJERCICIOS de Refuerzo**

- A. El número de usuarios de un gimnasio en la primera semana comenzó siendo de 140 personas y aumentó en 50 personas cada semana. ¿Cuántas personas habrán usado el gimnasio en las 15 primeras semanas?
- B. En un aparcamiento cobran 0,15€ por la primera hora de estacionamiento y, por cada hora siguiente, el triple de lo cobrado en la hora anterior. ¿Cuánto pagaremos por estar aparcados 6 horas?
- C. Un árbol de rápido crecimiento multiplica su altura por 1,8 cada año. Si al comenzar el año medía a 0,5 m. ¿Qué altura tendrá dentro de 5 años?
- D. Halla la profundidad de un pozo si por la excavación del primer metro se han pagado 30€ y por la de cada uno de los restantes, se pagan 5€ más que en el anterior, siendo el coste total de 450€

- E.** Una rana está en el borde de una charca circular de 8m de radio y quiere llegar al centro saltando. Da un primer salto de 4m y, después, avanza en cada uno la mitad del salto anterior. ¿Logrará llegar al centro?
- F.** Durante los cinco primeros meses de vida, un bebé ha ido ganando cada mes un 10 % de peso. Si al nacer pesaba 3000 gramos. ¿Cuál ha sido su peso al final del quinto mes?
- G.** Una escalera tiene todos los peldaños iguales menos el primero, que mide 23 cm. Al subir 70 escalones, la altura ascendida es de 1472 cm. ¿Qué altura tiene cada peldaño?
- H.** En un examen las preguntas estaban ordenadas según su dificultad. La primera valía 4 puntos y cada una de las restantes valía 3 puntos más que la anterior. Si en total cuentan 100 puntos, ¿cuántas preguntas tenía el examen?
- I.** Las medidas de los ángulos de un triángulo forman una progresión aritmética. Si el ángulo menor mide  $21^\circ$  ¿Cuál es la medida de los otros dos?
- J.** Para participar en una carrera Juan entrena el primer día 7 km y cada día siguiente aumenta en 3 km la distancia recorrida el día anterior. ¿Qué distancia recorre el undécimo día?
- K.** Un jardinero coloca geranios en un jardín en forma de triángulo, en la primera fila coloca 4, en la segunda 9, en la tercera 14 y así hasta colocar 9 filas. ¿Cuántos geranios coloca en total?
- L.** El precio de un coche decrece un 30% por cada año que pasa. ¿Cuál será el precio de un coche que vale 17000€ dentro de 7 años?

## EJERCICIOS

- 18.** Interpola 3 medios aritméticos entre 4 y 29.
- 19.** Interpola 4 medios geométricos entre 1 y 243:
- 20.** Calcula el capital obtenido invirtiendo 2000 € al 3 % de interés compuesto anual durante 5 años.
- 21.** Un árbol de rápido crecimiento multiplica su altura por  $1\frac{1}{2}$  cada año. Si al comenzar el año medía 0'75 m, ¿qué altura tendrá dentro de 8 años?
- 22.** Lanzamos una pelota a lo largo de un pasillo. En cada bote que da avanza una distancia igual a la mitad de la distancia anterior. Si al octavo bote cae en un foso de tierra y se para, ¿qué distancia habrá recorrido si antes del primer bote ha recorrido 2 m?

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.



## Recuerda lo más importante – RESUMEN

**Completa los textos:**

*Sucesión de números*

\_\_\_\_\_

Término de la sucesión

\_\_\_\_\_

Sucesión decreciente

\_\_\_\_\_

Sucesión creciente

\_\_\_\_\_

*Progresión Aritmética*

\_\_\_\_\_

Término General de una progresión aritmética

\_\_\_\_\_

Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética

\_\_\_\_\_

*Progresión Geométrica*

\_\_\_\_\_

Término General de una progresión geométrica

\_\_\_\_\_

Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica

\_\_\_\_\_

Producto de los n primeros términos de una progresión geométrica

\_\_\_\_\_

Suma de los infinitos términos de una progresión geométrica

Pulsa  para ir a la página siguiente



## Para practicar

En esta unidad encontrarás ejercicios relacionados con progresiones aritméticas y geométricas.

### PROGRESIONES

*Copia el enunciado y resuelve el ejercicio en el recuadro reservado para ello, después de resolverlo comprueba la solución en el ordenador para ver si lo has hecho bien.*

*Debes hacer un mínimo de 15 ejercicios.*

1)	
2)	
3)	
4)	
5)	
6)	
7)	

<b>8)</b>	
<b>9)</b>	
<b>10)</b>	
<b>11)</b>	
<b>12)</b>	
<b>13)</b>	
<b>14)</b>	
<b>15)</b>	

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## Autoevaluación



**Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.**

1 Escribe el término \_\_\_ de la sucesión:

\_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / ...

2 Escribe el término general de la sucesión:

\_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / ...

3 Escribe el término general de la sucesión:

\_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / ...

4 Escribe el término de \_\_\_ de la sucesión:

\_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / ...

5 Halla la suma de todos los términos de la progresión:

\_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / ...

6 Halla la suma de los \_\_\_ primeros términos de la sucesión:

\_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / ...

7 Halla el producto de los \_\_\_ primeros términos de la sucesión:

\_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ / ...

8 Cuánto dinero me devolverá el banco si hago una imposición de \_\_\_\_\_ € a plazo fijo durante \_\_\_\_\_ al \_\_\_ % de interés compuesto anual.

9 Calcula la suma de todos los múltiplos de \_\_\_ de \_\_\_ cifras.

10 El padre de Juan decide guardar un euro el día que Juan cumple un año. Ira duplicando la cantidad en todos lo cumpleaños de su hijo. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado el día que cumpla \_\_\_ años?



## Para practicar más

- Completa las sucesiones con los términos que faltan:
  - 3, 7, 11, 15, \_\_, \_\_, ....
  - 3, 6, 12, 24, \_\_, \_\_, ....
  - 32, 16, 8, 4, \_\_, \_\_, ....
  - 5, 10, 17, 26, \_\_, \_\_, ....
- Calcula los 4 primeros términos de la sucesión de término general:
  - $a_n = n + 5$
  - $a_n = 2^{n-1}$
  - $a_n = \sqrt[n+1]{n+2}$
  - $a_n = 5n$
- Calcula el término general de las sucesiones:
  - 1, 2, 3, 4, 5, ....
  - 1, 4, 9, 16, 25, ....
  - $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$
  - $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$
- Halla el término 100 de la sucesión de término general:
  - $a_n = 3n + 2$
  - $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$
  - $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$
- Averigua la ley de recurrencia de cada una de las sucesiones:
  - 3, 7, 10, 17, 27, ....
  - 3, 6, 12, 24, 48, ....
  - 3, 7, 11, 15, 19, ....
  - 9, 3, 6, -3, 9, ....
- Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.
  - 4, 7, 10, 13, 16, ....
  - 1, 3, 5, 7, 9, ....
  - 7, 11, 15, 19, 23, ....
  - 3, 4, 5, 6, 7, ....
- Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas.
  - 4, 8, 16, 32, 64, ....
  - 1, 3, 9, 27, 81, ....
  - 16, 8, 4, 2, 1, ....
  - $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots$
- Calcula la diferencia de una progresión aritmética si se conocen:
  - $a_{10} = 30$  y  $a_1 = -6$
  - $a_{30} = 95$  y  $a_{20} = 45$
- Calcula la razón de una progresión geométrica si se conoce
  - $a_9 = 80$  y  $a_8 = 16$
  - $a_{10} = 40$  y  $a_7 = 5$

- 10.** Calcula el primer término de una progresión aritmética si se conoce:
- a)  $a_{20} = 34$  y  $d = 7$
- b)  $a_{31} = 13$  y  $d = 3$
- 11.** Calcula el primer término de una progresión geométrica si se conoce:
- a)  $a_7 = 320$  y  $r = 2$
- b)  $a_6 = 915$  y  $r = 3$
- 12.** Calcula el número de términos de una progresión aritmética finita si el primero es 100 el último 420 y la diferencia es 4.
- 13.** Calcula la suma de los primeros 101 términos de la progresión: 1, 4, 7, 17, 20, ....
- 14.** Calcula la suma de los múltiplos de 3 menores de 1000 y mayores que 100
- 15.** Calcula la suma de los primeros 8 términos de la progresión: 1, 2, 4, 8, 16, ....
- 16.** Calcula el producto de los primeros 8 términos de la progresión:  $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$
- 17.** Calcula la suma de los infinitos términos de la progresión: 16, 8, 4, 2, 1, ....
- 18.** Calcula el producto de los primeros 10 términos de la progresión 16, 8, 4, 2, 1, ....
- 19.** Depositamos 6000 € al 5 % de interés compuesto anual. ¿Cuánto dinero tendré después de 3 años?
- 20.** Determina el capital que con un interés compuesto del 5% anual, produce 200 € en 4 años.
- 21.** Halla el capital obtenido invirtiendo 100 € al 3 % de interés compuesto anual durante 4 años?
- 22.** Interpola 6 términos entre 1 y 10 para que formen una progresión aritmética.
- 23.** Interpola 3 términos entre 1 y 16 para que formen una progresión geométrica
- 24.** En un examen la primera pregunta valía dos puntos y cada una de las siguientes valía tres puntos más que la anterior. Si en total hay 50 preguntas, ¿cuántos puntos vale el examen?
- 25.** El número inicial de moscas de una población es de 50 y cada tres días el número de moscas se duplica, ¿cuántas moscas habrá a los 30 días?
- 26.** Escribe la fracción generatriz de  $1\sqrt{2}$ , utilizando la suma de una progresión.
- 27.** En una progresión geométrica el término sexto vale 64 y el cuarto es 16. Halla el término general.
- 28.** Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, si el más pequeño mide  $40^\circ$  ¿cuál es la medida de los otros dos?



## Figuras planas, propiedades métricas

### Contenidos

1. Ángulos en la circunferencia  
Ángulo central y ángulo inscrito
2. Semejanza  
Figuras semejantes  
Semejanza de triángulos, criterios
3. Triángulos rectángulos  
Teorema de Pitágoras  
Aplicaciones del Teorema de Pitágoras
4. Lugares geométricos  
Definición y ejemplos  
Más lugares geométricos: las cónicas
5. Áreas de figuras planas

### Objetivos

- Reconocer los ángulos importantes en una circunferencia y sus relaciones.
- Averiguar cuándo dos triángulos son semejantes.
- Utilizar el teorema de Pitágoras para resolver algunos problemas.
- Identificar la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo como conjuntos de puntos.
- Calcular el área de recintos limitados por líneas rectas y por líneas curvas.



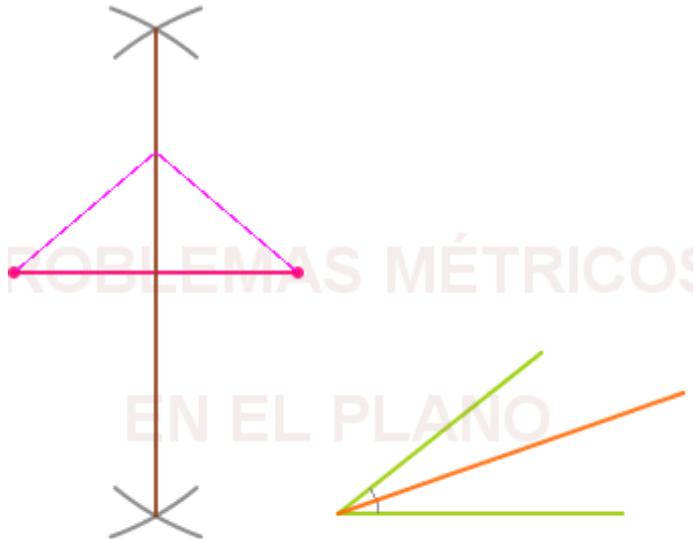
**Antes de empezar**

Observa en la escena que van apareciendo algunas figuras geométricas. En este tema trabajaremos con esas figuras y estudiaremos sus propiedades.

¿Qué figuras reconoces en esa escena?

En estas dos figuras de la derecha aparecen dos construcciones que habrás estudiado en cursos anteriores.

¿Sabrías a que corresponde cada una de ellas?



Pulsa en



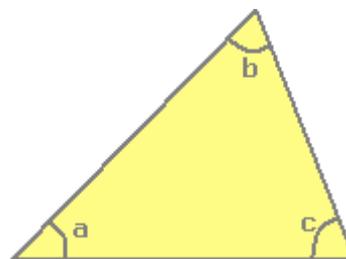
Para RECORDAR una propiedad importante de los triángulos.

**PROPIEDAD**

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a \_\_\_\_\_

Pulsa  para ver la demostración

Completa el dibujo y la demostración



Cuando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

# 1. Ángulos en la circunferencia

## 1.a. Ángulo central y ángulo inscrito

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

En la circunferencia de la escena de la derecha:

¿Dónde tiene su vértice el ángulo  $\alpha$ ?

\_\_\_\_\_

¿Cómo se llama ese ángulo?

\_\_\_\_\_

¿A qué arco corresponde su medida? \_\_\_\_\_

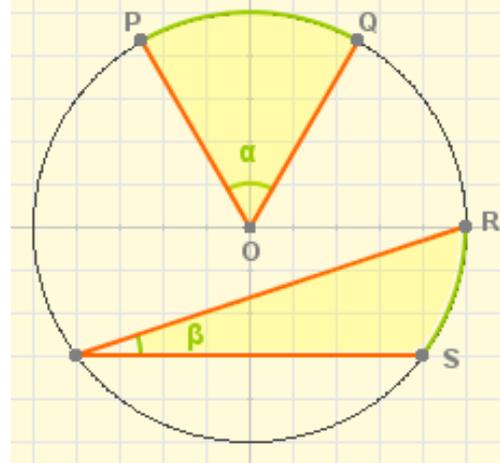
¿Dónde tiene su vértice el ángulo  $\beta$ ?

\_\_\_\_\_

¿Cómo se llama ese ángulo?

\_\_\_\_\_

¿A qué arco corresponde su medida? \_\_\_\_\_



En la escena pulsa

Aparece un círculo y en él un **ángulo central** y un **ángulo inscrito** que comparten un mismo arco de circunferencia RS.

Mueve el punto R hasta un punto cualquiera.

¿Qué relación hay entre las medidas del ángulo central y del inscrito?

\_\_\_\_\_

Pulsa nuevamente

Ahora mueve el punto P y fíjate en la medida del ángulo inscrito.

¿Cambia el valor del ángulo inscrito al cambiar el vértice de posición? \_\_\_\_\_

Es decir, **ángulos inscritos que abarcan el mismo arco de circunferencia son** \_\_\_\_\_

Pulsa nuevamente

Ahora sitúa el punto R en  $x=-5, y=0$

¿Cuánto mide ahora el ángulo central? \_\_\_\_\_ ¿y el inscrito? \_\_\_\_\_

Escribe la propiedad que relaciona las medidas de un ángulo central y de un ángulo inscrito que abarcan un mismo arco de circunferencia:

Después... Pulsa en para hacer ejercicios.

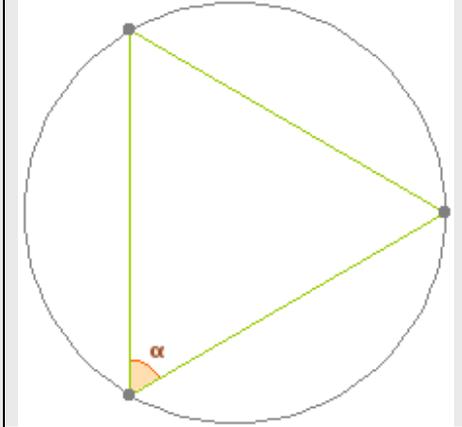
Se abre una ventana en la que aparecerán 3 escenas con ejercicios que debes resolver en los cuadros de la página siguiente.

Pulsa: Comenzar

### EJERCICIOS

1. Calcula el valor del ángulo o de los ángulos marcados en cada caso.

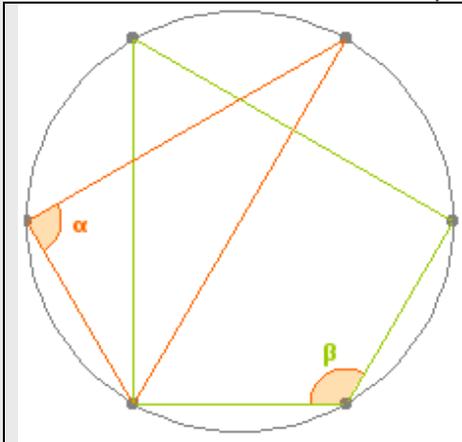
*Circunferencia dividida en tres partes iguales*



Operaciones

Valor de  $\alpha =$

*Circunferencia dividida en seis partes iguales*

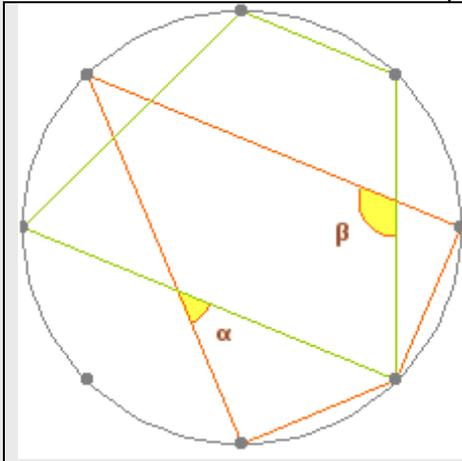


Operaciones

Valor de  $\alpha =$

Valor de  $\beta =$

*Circunferencia dividida en ocho partes iguales*



Operaciones

Valor de  $\alpha =$

Valor de  $\beta =$

Cuando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2. Semejanza

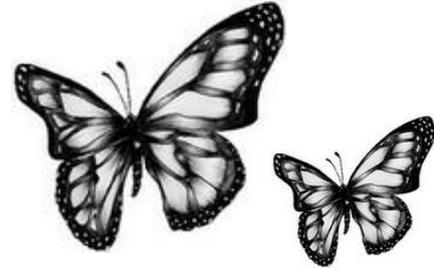
### 2.a. Figuras semejantes

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

Observa a la derecha, en la escena de pantalla, algunas parejas de **figuras semejantes**.

¿Qué es lo que tienen en común? \_\_\_\_\_

¿Qué es lo que tienen diferente? \_\_\_\_\_



Completa:

Dos figuras planas se consideran **semejantes** si existe \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_, llamada \_\_\_\_\_,  
 entre sus \_\_\_\_\_ homólogos y además sus \_\_\_\_\_  
 homólogos son \_\_\_\_\_.

Pulsa la flecha de avanzar en la escena de la derecha

En las siguientes escenas verás la explicación del TEOREMA DE THALES. En la primera aparece su enunciado de este teorema.

*Si quieres detener la escena, pulsa el botón secundario del ratón y aparecerá un recuadro que en su parte inferior tiene los botones de retroceso y pausa/avance:*

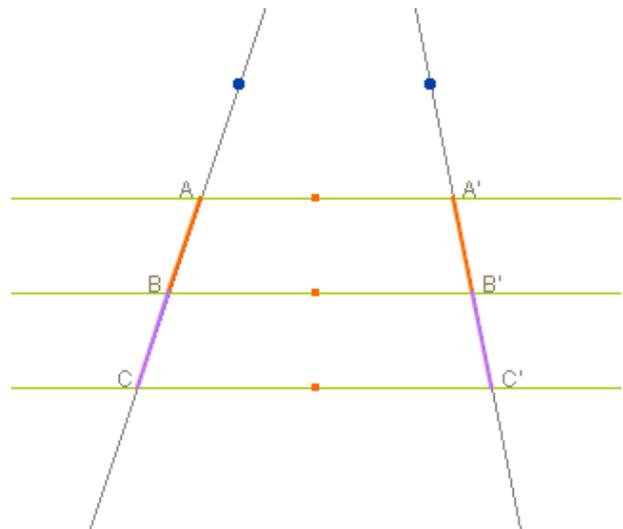
#### Enunciado del Teorema de Thales

Pulsando Continuar

Irá apareciendo una figura formada por tres rectas paralelas (que puedes mover arrastrando el punto naranja) y dos rectas que las cortan (que también puedes mover utilizando los puntos azules).

Anota aquí las medidas de los segmentos que se indican y los cocientes entre esos segmentos:

$\overline{AB} =$	$\overline{A'B'} =$	$\overline{AB} =$	$\overline{A'B'} =$
$\overline{BC} =$	$\overline{B'C'} =$	$\overline{AC} =$	$\overline{A'C'} =$
$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} =$	$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} =$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} =$	$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} =$



¿Qué relaciones observas?

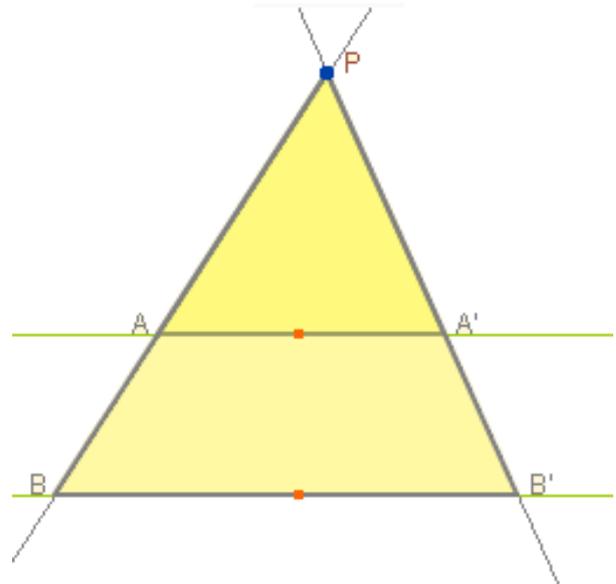
Pulsa Continuar

Haz lo que se indica:

Une los puntos azules para construir dos triángulos PAB y PA'B'. ¿En que posición se dice que están?

Mueve en la escena el punto P y en cualquier posición toma nota de las siguientes medidas:

$$\begin{array}{l} \overline{PA} = \quad \quad \quad \overline{PB} = \quad \quad \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \\ \overline{PA'} = \quad \quad \quad \overline{PB'} = \quad \quad \quad \frac{\overline{PB'}}{\overline{PA'}} = \\ \overline{AA'} = \quad \quad \quad \overline{BB'} = \quad \quad \quad \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \end{array}$$



Pulsa Continuar

Aparecen dos **figuras semejantes**.

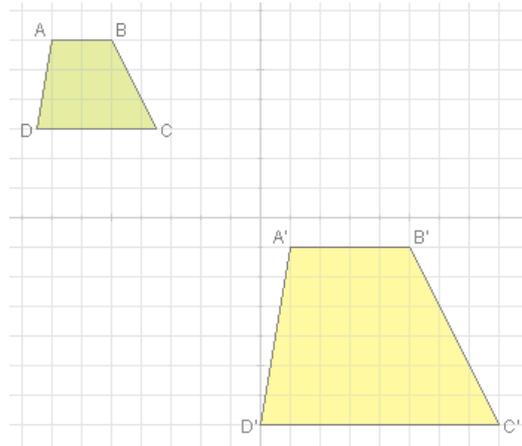
Observa la escena detenidamente.

¿Cómo son entre sí los ángulos homólogos?

A A'    B B'    C C'    D D'

Los cuatro pares de lados guardan la misma

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{D'C'}}$$

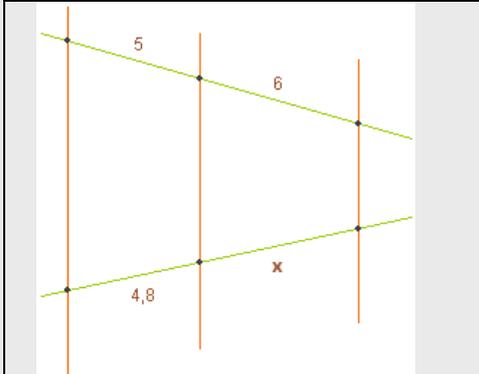


Pulsa en para hacer ejercicios. Aparecerán los mismos de los siguientes recuadros:

### EJERCICIOS

2. a) Calcula el valor de "x" utilizando el teorema de Tales.

1



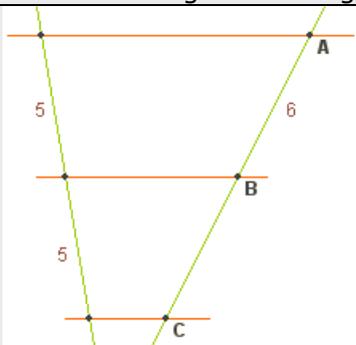
Operaciones

Valor de x =

### EJERCICIOS

2. b) Calcula la longitud del segmento BC.

2

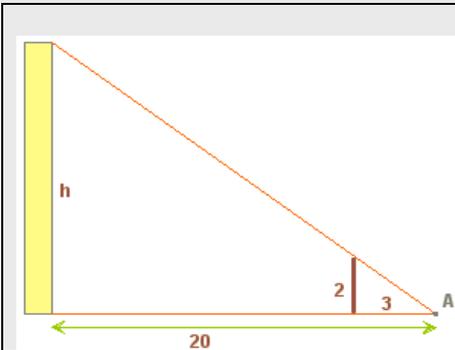


Operaciones

Medida de BC =

3. Calcula la altura "h" del edificio.

3

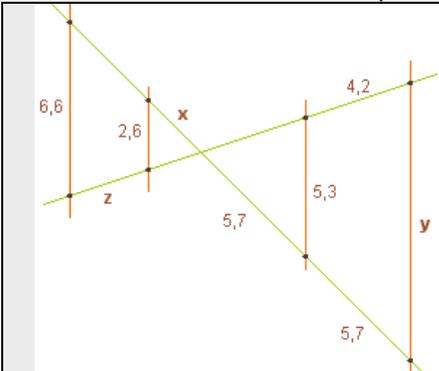


Operaciones

Altura: h =

4. Utiliza el teorema de Thales para calcular las medidas de x, y, z:

4

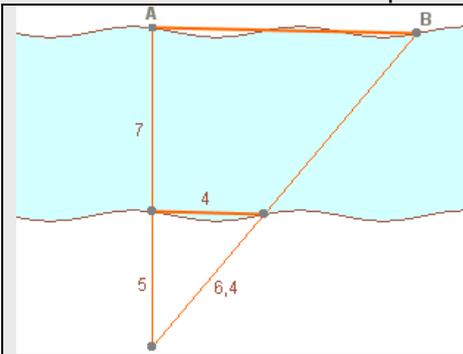


Operaciones

Medidas: x =      y =      z =

5. Calcula la distancia entre los puntos A y B.

5



Operaciones

Distancia entre A y B =

## 2.b. Triángulos semejantes. Criterios

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

¿Cuándo se dice que dos triángulos son semejantes?

\_\_\_\_\_

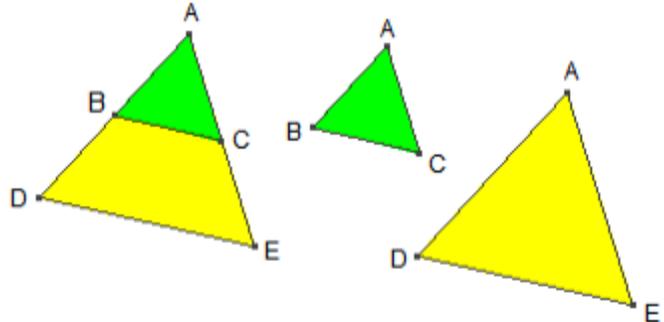
\_\_\_\_\_

¿Cómo son entre si los **lados homólogos**?

\_\_\_\_\_

¿Cómo son entre si los **ángulos**?

\_\_\_\_\_



### Criterios de semejanza de triángulos

En la escena de la derecha puedes ver los tres criterios de semejanza de triángulos.

En cada uno de ellos puedes ver la demostración pulsando 

Lee atentamente cada una de las demostraciones y escribe cada uno de los criterios en los siguientes recuadros:

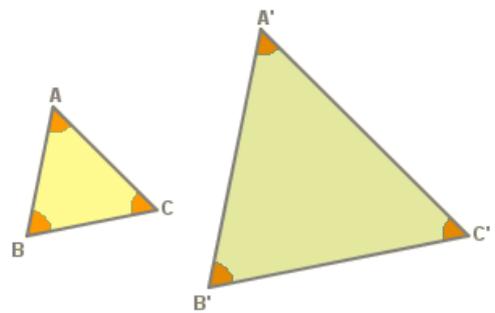
Pulsa Criterio 1

#### Primer criterio de semejanza

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



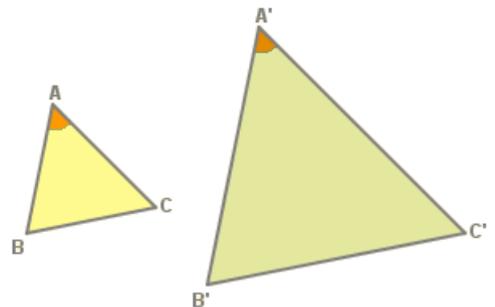
Pulsa Criterio 2

#### Segundo criterio de semejanza

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



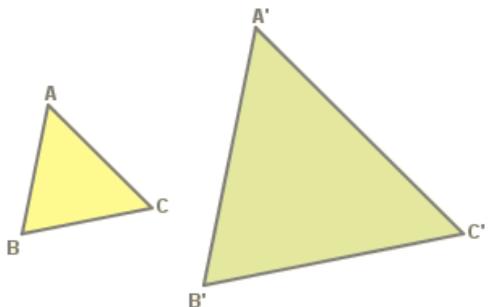
Pulsa Criterio 3

#### Tercer criterio de semejanza

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

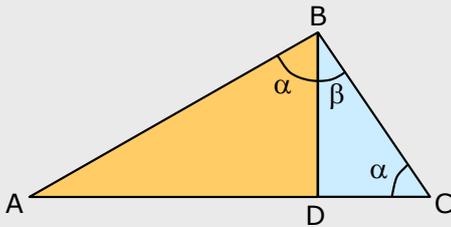


Pulsa en  para hacer ejercicios. Aparecerán los mismos del siguiente recuadro:

### EJERCICIOS

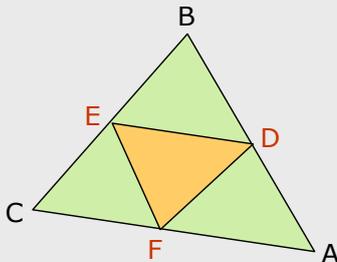
6. En un triángulo rectángulo ABC ( $B=90^\circ$ ) se traza la altura sobre el lado AC, formándose así los triángulos también rectángulos, BDA y BCD, ¿son semejantes también estos triángulos? ¿Qué criterio aplicas?

1



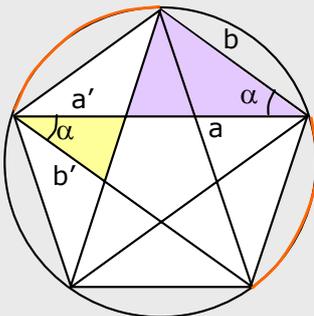
7. En un triángulo cualquiera ABC, se unen los puntos medios de los lados para formar otro triángulo DEF. ¿Son semejantes estos dos triángulos? ¿Qué criterio aplicas?

2



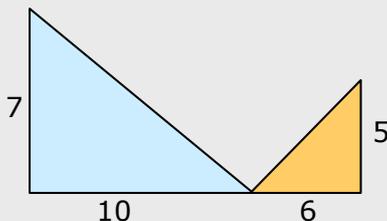
8. La figura era conocida en la antigüedad como "pentagrama pitagórico". En ella se pueden ver bastantes parejas de triángulos semejantes. Los de color amarillo y morado, ¿son semejantes? ¿Qué criterio aplicas?

3



9. Los triángulos de la figura, ¿son semejantes?

4



Cuando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3. Triángulos rectángulos

#### 3.a. El teorema de Pitágoras

Lee en pantalla el enunciado del **Teorema de Pitágoras** y escríbelo en el siguiente recuadro:

---



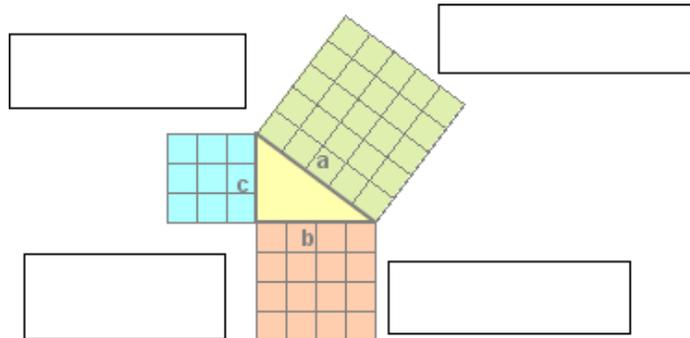
---



---

Debajo del enunciado del teorema de Pitágoras puedes ver una explicación geométrica.

Completa lo que falta en este dibujo:

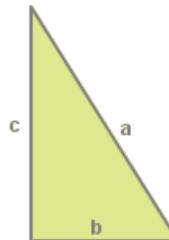


En la escena pulsa Para ver una demostración del TEOREMA DE PITÁGORAS

Aparece un triángulo rectángulo de hipotenusa **a** y catetos **b** y **c**

Paso 1. Construimos un cuadrado de lado el cateto **b** y otro cuadrado de lado el cateto **c**:

(Completa el dibujo)→



Pulsa nuevamente

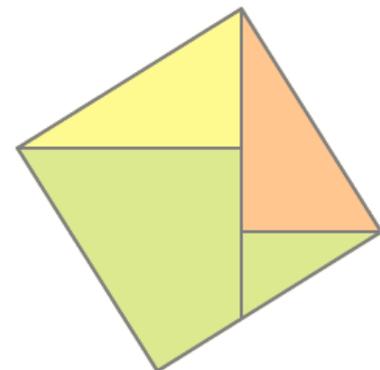
Observa como a partir de los cuadrados anteriores puedes obtener el siguiente cuadrado. Completa los datos en el dibujo:

¿Cuál es el área del cuadrado de lado **b**?

¿Cuál es el área del cuadrado de lado **c**?

¿Cuál es el área del cuadrado grande que se ha construido?

¿Qué relación hay entre esas tres áreas?



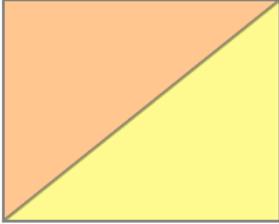
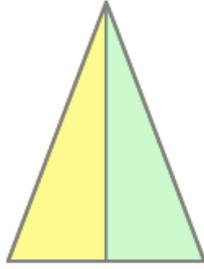
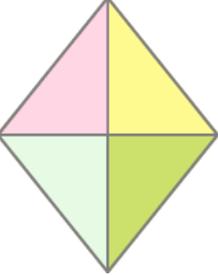
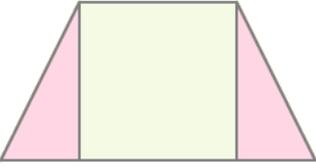
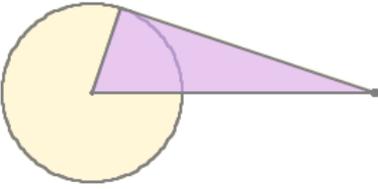
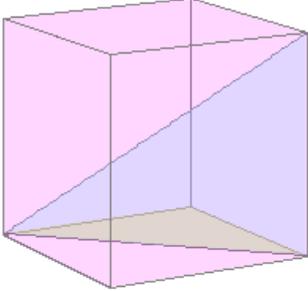
Pulsa Repetir Para ver de nuevo esta demostración

Para ver otra demostración pulsa en

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.b. Aplicaciones del teorema de Pitágoras

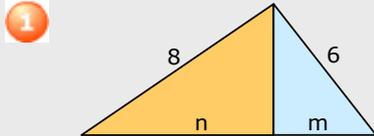
El **teorema de Pitágoras** es de gran utilidad en multitud de problemas en los que se presenta algún triángulo rectángulo. En la escena de la derecha verás ejemplos de cada uno de ellos.

Pulsa Comenzar  Para ver el 1 <sup>er</sup> ejemplo	Pulsa Continuar  para ver el siguiente
<p><b>DIAGONAL DE UN RECTÁNGULO</b></p> <p>Completa el dibujo      Fórmulas</p> 	<p><b>ALTURA DE UN TRIÁNGULO ISÓSCELES</b></p> <p>Completa el dibujo      Fórmulas</p> 
Pulsa Continuar  para ver el siguiente	Pulsa Continuar  para ver el siguiente
<p><b>LADO DE UN ROMBO</b></p> <p>Completa el dibujo      Fórmulas</p> 	<p><b>ALTURA DE UN TRAPECIO</b></p> <p>Completa el dibujo      Fórmulas</p> 
Pulsa Continuar  para ver el siguiente	Pulsa Continuar  para ver el siguiente
<p><b>SEGMENTO DE TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA</b></p> <p>Completa el dibujo      Fórmulas</p> 	<p><b>DIAGONAL DE UN CUBO</b></p> <p>Completa el dibujo      Fórmulas</p> 

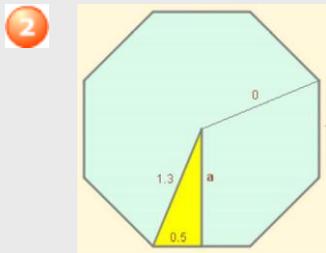
Pulsa en  para hacer ejercicios. Aparecerán los mismos del siguiente recuadro:

### EJERCICIOS

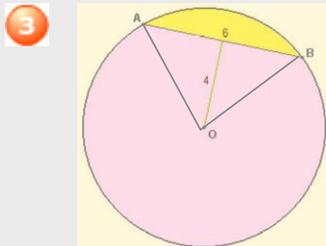
**10.** En el triángulo rectángulo de la figura se traza la altura sobre la hipotenusa dando lugar a los triángulos naranja y azul. Calcula el valor de **m** y de **n**.



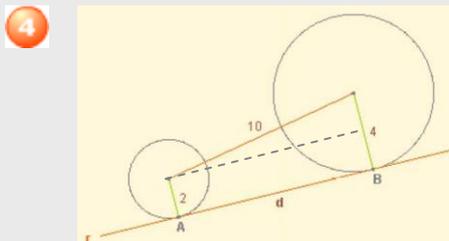
**11.** Calcula cuanto mide la apotema de un octógono regular de lado 1 dm y radio 1,3 dm.



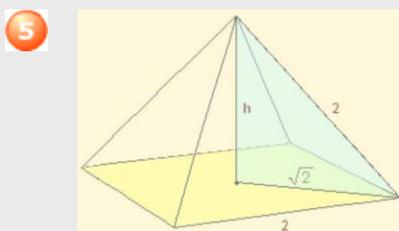
**12.** En una circunferencia se sabe la longitud de una cuerda AB, 6 cm, y la distancia de ésta al centro de la circunferencia, 4 cm. ¿Cuánto mide el radio?



**13.** La recta r es tangente a las dos circunferencias en los puntos A y B. Halla la distancia que hay entre ambos puntos de tangencia.



**14.** La pirámide de la figura es regular, sus caras son triángulos equiláteros y su base un cuadrado de lado 2 m. Calcula su altura.



## 4. Lugares geométricos

### 4.a. Definición y ejemplos

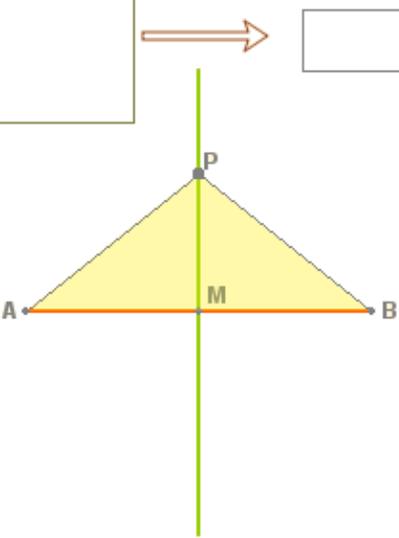
Completa:

Un **lugar geométrico** en el plano es \_\_\_\_\_, que cumplen todos ellos \_\_\_\_\_.

En la escena de la derecha, pulsa mediatriz de un segmento

En las siguientes escenas verás la explicación de la construcción geométrica con regla y compás de la **MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO**.

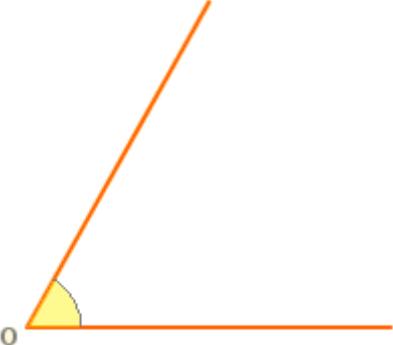
Si quieres detener la escena, pulsa el botón secundario del ratón y aparecerá un recuadro que en su parte inferior tiene los botones de retroceso y pausa/avance: .

PASOS PARA REALIZAR LA CONSTRUCCIÓN	DIBUJO DE LA MEDIATRIZ
<p>1.- Trazamos un arco de circunferencia _____</p> <p>_____</p> <p>2.- Con centro en B _____</p> <p>_____</p> <p>La recta que pasa _____</p> <p>_____</p> <p>La <b>MEDIATRIZ</b> del segmento AB es _____</p> <p>_____</p> <p>_____</p>	
<p>Una vez dibujada la mediatriz del segmento AB, vamos a definirla como LUGAR GEOMÉTRICO.</p> <p>Completa el siguiente gráfico y razona cuál es la propiedad que cumple cualquier punto P que esté situado en la mediatriz.</p>	
<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 40px; margin-right: 20px;"></div> <div style="font-size: 2em; margin-right: 10px;">→</div> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 40px; margin-right: 20px;"></div> </div> 	<p>La <b>MEDIATRIZ</b> del segmento AB es el <b>LUGAR GEOMÉTRICO</b> de los puntos, P,</p> <p>que: _____</p> <p>_____</p>

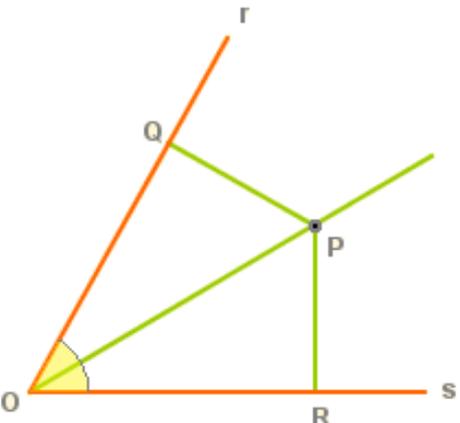
En la escena de la derecha, pulsa

bisectriz de un ángulo

Ahora veremos la construcción geométrica con regla y compás de la BISECTRIZ DE UN ÁNGULO.

PASOS PARA REALIZAR LA CONSTRUCCIÓN	DIBUJO DE LA BISECTRIZ
<p>1.- Con centro en O, trazamos _____ _____</p> <p>2.- Este arco corta _____ _____</p> <p>3.- Con centros en A y B _____ _____</p> <p>La recta que pasa _____ _____</p> <hr/> <p>La <b>BISECTRIZ</b> de un ángulo es _____ _____ _____</p>	

Ahora vamos a definir la bisectriz como LUGAR GEOMÉTRICO.  
 En la escena ves que situando un punto P en cualquier lugar de la bisectriz, se trazan perpendiculares a los lados del ángulo r y s obteniendo los puntos Q y R.  
 Se forman así dos triángulos rectángulos OQP y ORP.

	<p>¿Cómo son entre si los dos triángulos ORP y OQP?</p> <p>_____</p> <p>¿Cómo son entre si los segmentos RP y QP?</p> <p>_____</p> <p><b>CONCLUSIÓN:</b>                  La <b>BISECTRIZ</b> de un ángulo es el <b>LUGAR GEOMÉTRICO</b> de los puntos del plano que _____</p> <p>_____</p>
---	---

Pulsa en  para ver otro ejemplo interesante: **ARCO CAPAZ**

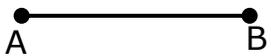
Pulsa en Definición

Completa:

El arco capaz de un ángulo  $\alpha$  sobre un segmento AB es \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Pulsa en Construcción

Indica un valor para el ángulo utilizando el control numérico  Pulsa Continuar 

<b>PASOS PARA REALIZAR LA CONSTRUCCIÓN</b>	<b>DIBUJO DEL ARCO CAPAZ</b>
1.- Empezamos trazando _____ _____ _____ <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">Pulsa Continuar </div>	
2.- A continuación trazamos _____ _____ Y obtenemos el punto _____ _____ <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">Pulsa Continuar </div>	
3.- Observamos que el ángulo inicial $\alpha$ es igual al ángulo azulado que obtenemos, formado por _____ <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">Pulsa Continuar </div>	
4.- Por fin trazamos _____ _____ _____ <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">Pulsa Continuar </div>	
Observa en la escena, moviendo el punto P, que ha quedado dibujado el <b>arco capaz</b> .	

Quando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

### 4.b. Más lugares geométricos: Cónicas

Completa:

Las **curvas cónicas**, conocidas desde la antigüedad, pueden obtenerse seccionando \_\_\_\_\_ con \_\_\_\_\_.

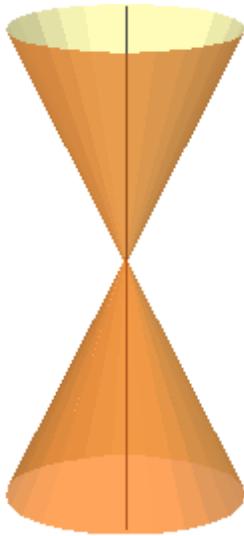
Las **curvas cónicas** son tres:

- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_

En la escena de la derecha aparece un cono (superficie cónica ilimitada). Fíjate que puedes girarlo verticalmente si haces arrastre mientras pulsas el botón del ratón.

En el menú superior elige: circunferencia ▼

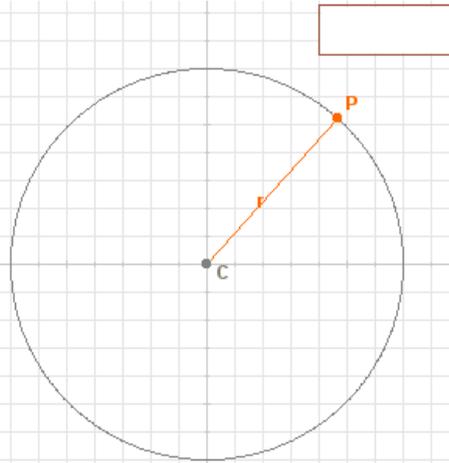
Aparece un plano que corta a la superficie cónica. Dibújalo a continuación:



¿En que posición está el plano? \_\_\_\_\_

Pulsa en la esquina inferior derecha de la escena: **Definición>>**

Aparece una nueva escena en la que se observa la propiedad y la definición de esta curva cónica como lugar geométrico.



Escribe la fórmula en el recuadro.

**COMPLETA:**

**Circunferencia:** Lugar geométrico de los puntos del plano que \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

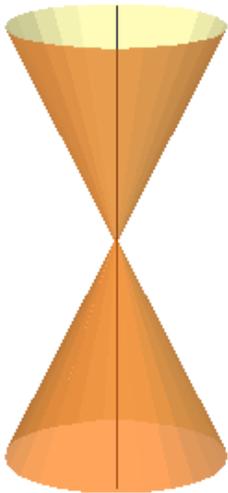
\_\_\_\_\_

Pulsa en la esquina inferior izquierda de la escena: **<< Volver**

Para ver otra curva cónica...

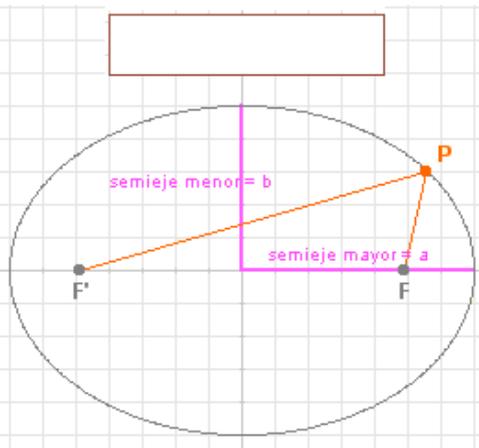
En el menú superior elige: elipse ▼

Aparece un plano que corta a la superficie cónica. Dibújalo



¿En que posición está el plano? \_\_\_\_\_

Pulsa en la esquina inferior derecha de la escena: **Definición>>**



Escribe la fórmula en el recuadro.

**COMPLETA:**  
**Elipse:** Lugar geométrico de los puntos del plano que \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

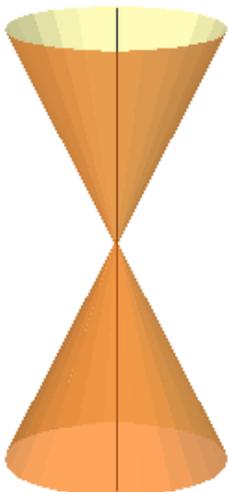
\_\_\_\_\_

Pulsa en la esquina inferior izquierda de la escena: **<< Volver**

Para ver otra curva cónica...

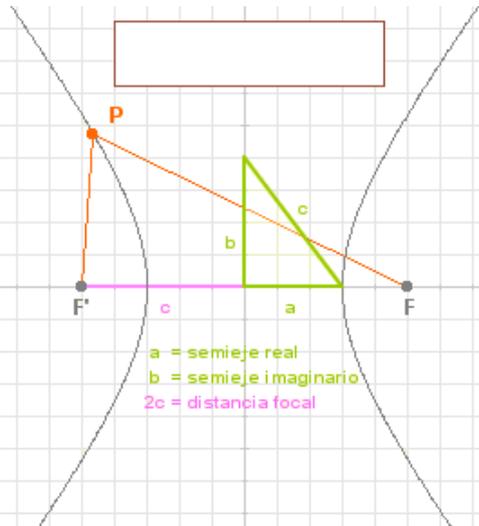
En el menú superior elige: hipérbola

Aparece un plano que corta a la superficie cónica. Dibújalo



¿En que posición está el plano? \_\_\_\_\_

Pulsa en la esquina inferior derecha de la escena: **Definición>>**



a = semieje real  
b = semieje imaginario  
2c = distancia focal

Escribe la fórmula en el recuadro.

**COMPLETA:**  
**Hipérbola:** Lugar geométrico de los puntos del plano que \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

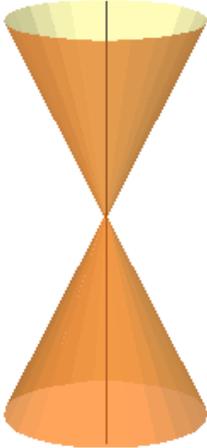
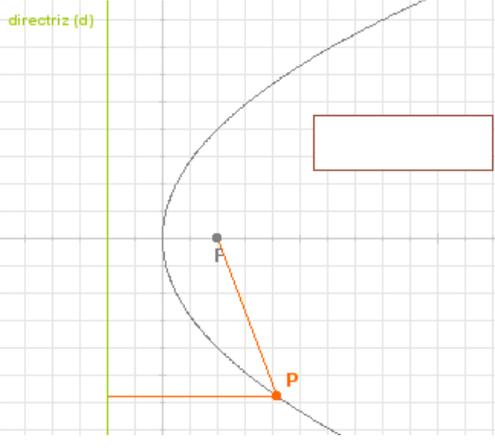
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Pulsa en la esquina inferior izquierda de la escena: << Volver

Para ver otra curva cónica...

En el menú superior elige:

<p>Aparece un plano que corta a la superficie cónica. Dibújalo</p> 	<p>¿En que posición está el plano? _____</p> <p>Pulsa en la esquina inferior derecha de la escena: <b>Definición&gt;&gt;</b></p>  <div style="border: 1px solid red; width: 100px; height: 20px; margin: 10px auto;"></div> <p>Escribe la fórmula en el recuadro.</p> <p><b>COMPLETA:</b>  <b>Parábola:</b> Lugar geométrico de los puntos del plano que _____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p>
---	--

Pulsa en  para ver otra propiedad de las cónicas:

Completa:

Las <b>curvas cónicas</b> tienen un parámetro que permite _____. Dicho parámetro se llama _____.			
En la escena aparece	<input type="text" value="e +"/> <input type="text" value="0,60"/> <input type="text" value="e -"/>	Y debajo el dibujo de una elipse.	$e = \underline{\quad}$
Pulsa el botón	<input type="text" value="e -"/>	Y observa como evoluciona la elipse.	
Cuando <b>e = 0</b> , ¿qué curva cónica se obtiene? _____			
Pulsa el botón	<input type="text" value="e +"/>	Y observa como evoluciona la elipse.	
Cuando <b>e = 1</b> , ¿qué curva cónica se obtiene? _____			
Cuando <b>e &gt; 1</b> , ¿qué curva cónica se obtiene? _____			

Pulsa Ejercicio  Escribe debajo de cada figura el valor de su excentricidad.

					
$e =$	$e =$				

Quando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

## 5. Aplicaciones

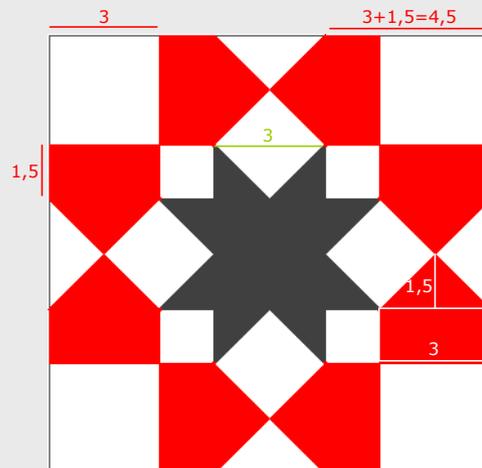
### 5.a. Áreas de figuras planas

Completa los nombres de las figuras geométricas y las fórmulas para calcular sus áreas:

Figura	Nombre y Área	Figura	Nombre y Área

### EJERCICIOS

15. La figura de la derecha está compuesta por áreas de color blanco (cuadrados y triángulos), rojo (pentágonos) y negro. Calcula el área de cada color. Toda la figura es un cuadrado de 12 m de lado.





## Recuerda lo más importante – RESUMEN

Teorema de Tales	Teorema de Pitágoras
<div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 30px; margin: 0 auto;"></div>	

Semejanza	
<p>Dos figuras planas son <b>semejantes</b> si llamada _____, entre _____</p> <p>En el caso de los triángulos basta que se cumpla uno de los criterios: →</p>	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> </div> <div style="margin-top: 20px;"> <p>1. _____</p> <p>2. _____</p> <p>3. _____</p> <p style="text-align: center;">— = — = —</p> </div>

Lugares geométricos	Un <b>lugar geométrico</b> en el plano es _____.	
La <b>mediatriz</b> de un segmento AB es el lugar geométrico _____.	La <b>bisectriz</b> de un ángulo es el lugar geométrico _____.	La <b>circunferencia</b> , es el lugar geométrico _____.
(Completa los dibujos)		

Pulsa para ir a la página siguiente



## Para practicar

En esta unidad encontrarás ejercicios de:

- **Semejanza, teorema de Pitágoras y lugares geométricos**
- **Áreas de figuras planas**

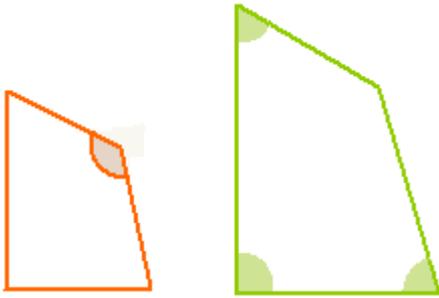
Completa los enunciados y resuélvelos. Después comprueba si lo has hecho bien.

### TEOREMA DE THALES

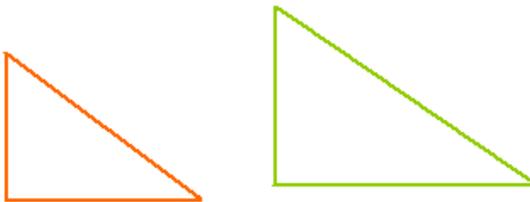
1. Las rectas  $r$ ,  $s$  y  $t$  son paralelas, determina el valor de  $x$  en cada caso:


**SEMEJANZA**

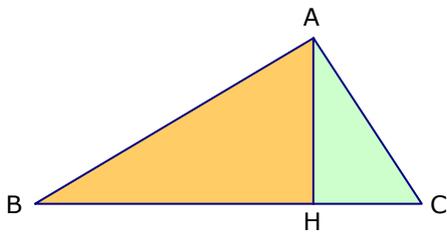
2. Los cuadriláteros de la figura son semejantes. Halla la longitud del lado  $x$  y el ángulo  $B$ .



3. Los triángulos de la figura son rectángulos y semejantes, calcula los elementos que faltan en cada uno.



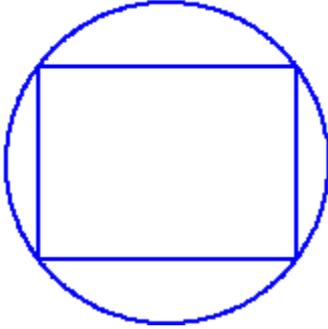
4. Comprueba que en un triángulo rectángulo  $ABC$ , los triángulos que determina la altura sobre la hipotenusa y el mismo  $ABC$  son semejantes. Si los catetos miden  $8\text{ cm}$  y  $5\text{ cm}$ , calcula la altura.



**TEOREMA DE PITÁGORAS**

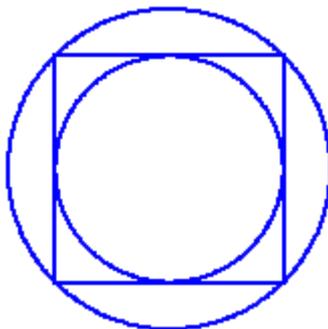
5. Los lados de un triángulo miden \_\_\_\_\_. ¿Es rectángulo? En caso afirmativo, ¿cuánto mide la hipotenusa?

6. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia de la figura?



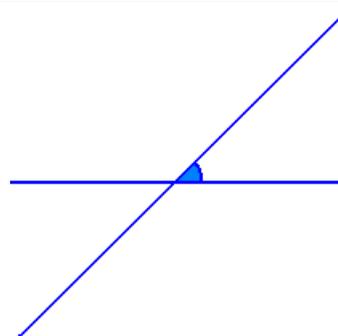
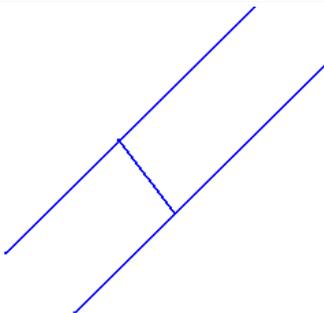
7. En un triángulo isósceles los lados iguales miden 12 cm y el lado desigual 8 cm, ¿cuánto mide la altura?

8. El radio de la circunferencia mayor mide 10 cm, ¿cuánto mide el radio de la menor?

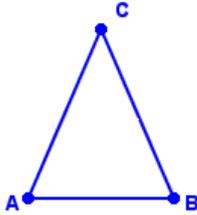


**LUGARES GEOMÉTRICOS**

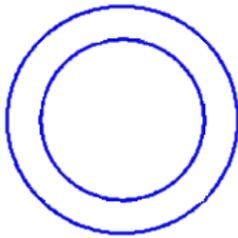
9. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas de las figuras:



10. El triángulo de la figura es isósceles. Si se desplaza el vértice C de forma que el triángulo siga siendo isósceles, ¿qué lugar geométrico determina C?



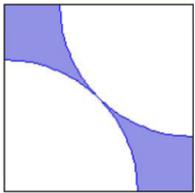
11. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos circunferencias concéntricas, de radios respectivos \_\_\_\_\_.



**ÁREAS DE RECINTOS PLANOS**

**El mural – Tipo 1**

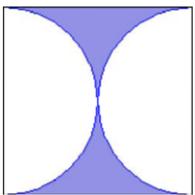
12. Se quiere construir un mural de \_\_\_\_\_ de largo por \_\_\_\_\_ de alto uniendo cuadrados de \_\_\_\_\_ de lado como el de la figura. ¿Qué superficie quedará de color azul?



--	--

**El mural – Tipo 2**

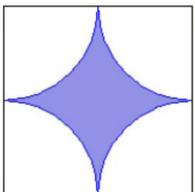
13. Se quiere construir un mural de \_\_\_\_\_ de largo por \_\_\_\_\_ de alto uniendo cuadrados de \_\_\_\_\_ de lado como el de la figura. ¿Qué superficie quedará de color azul?



--	--

**El mural – Tipo 3**

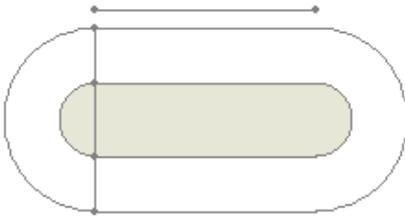
14. Se quiere construir un mural de \_\_\_\_\_ de largo por \_\_\_\_\_ de alto uniendo cuadrados de \_\_\_\_\_ de lado como el de la figura. ¿Qué superficie quedará de color azul?



--	--

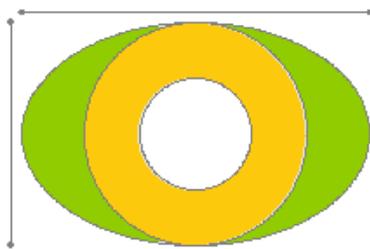
**El estadio**

15. Un estadio tiene la forma y dimensiones del dibujo. ¿Qué superficie ocupan las pistas?



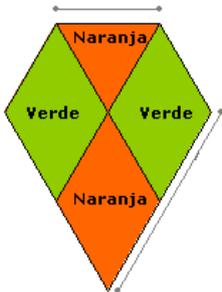
**La plaza**

16. Una plaza tiene forma elíptica y las dimensiones de la figura. En el centro hay una fuente circular de \_\_\_\_\_ de radio, rodeada de un paseo de tierra y en el resto hay césped. ¿Qué superficie ocupa el césped?, ¿y el paseo?



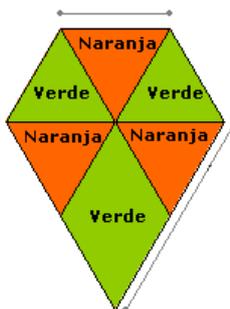
**La cometa - Tipo 1**

17. Para construir una cometa se ha empleado tela de color verde y naranja como en la figura. ¿Qué cantidad de cada color?



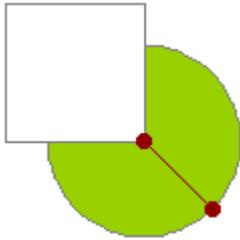
**La cometa - Tipo 2**

18. Para construir una cometa se ha empleado tela de color verde y naranja como en la figura. ¿Qué cantidad de cada color?



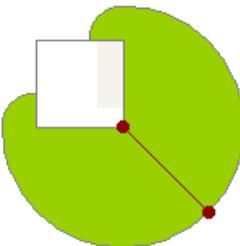
**La cabra – Tipo 1**

19. Una cabra está atada en la esquina de un corral cuadrado de \_\_\_\_\_ de lado, con una cuerda de \_\_\_\_\_ de largo, ¿cuál es la superficie sobre la que puede pastar?



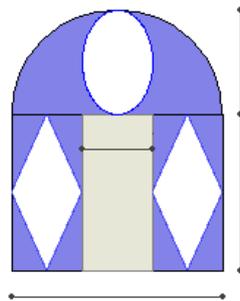
**La cabra – Tipo 2**

20. Una cabra está atada en la esquina de un corral cuadrado de \_\_\_\_\_ de lado, con una cuerda de \_\_\_\_\_ de largo, ¿cuál es la superficie sobre la que puede pastar?



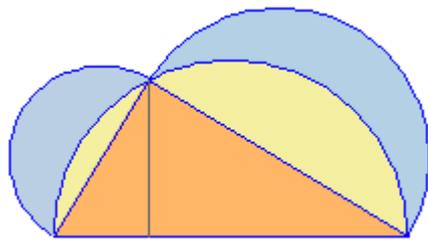
**La catedral**

21. La portada de una catedral románica está decorada con frescos pintados sobre una zona como la coloreada en la figura. ¿Qué superficie se ha pintado?



**Las lúnulas**

22. La base del triángulo de la figura mide \_\_\_\_\_ y la altura \_\_\_\_\_. Calcula el área del recinto de color azul (formado por dos figuras parecidas a dos lunas).



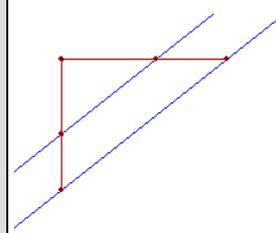
## Autoevaluación



Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.

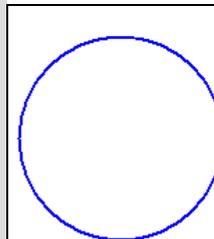
- 1 ¿Son paralelas las dos rectas de color azul de la figura?

*(Utiliza el teorema de Thales para comprobar la respuesta)*

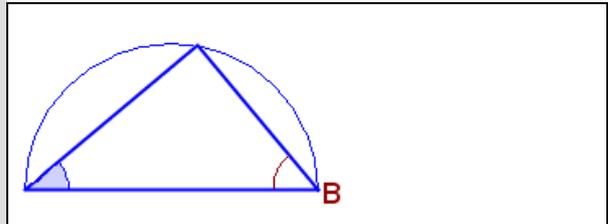


- 2 ¿Cuánto mide el ángulo  $\alpha$  de la figura?

*(Dibújalo primero en el círculo de la derecha)*



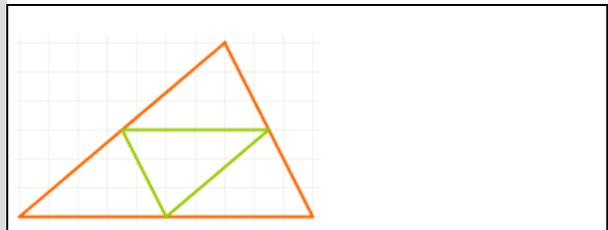
- 3 ¿Cuánto mide el ángulo B de la figura?



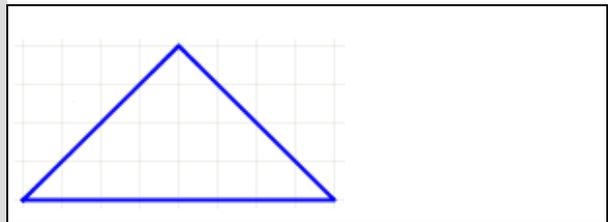
- 4 Los lados de un rectángulo miden \_\_\_\_\_ y los de otro \_\_\_\_\_.  
¿Son semejantes esos dos rectángulos?



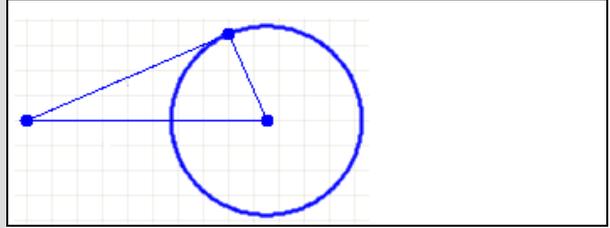
- 5 Los lados del triángulo verde (el interior) miden \_\_\_\_\_. ¿Cuánto mide el lado mayor del triángulo naranja?



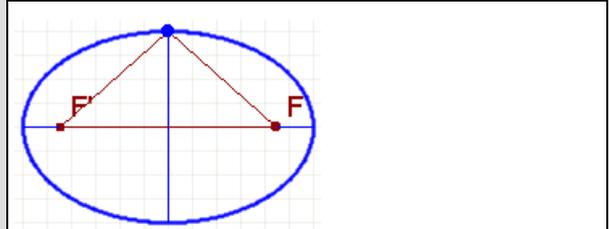
- 6 Los lados iguales de un triángulo isósceles y rectángulo miden \_\_\_\_\_. ¿Cuánto mide el lado desigual?



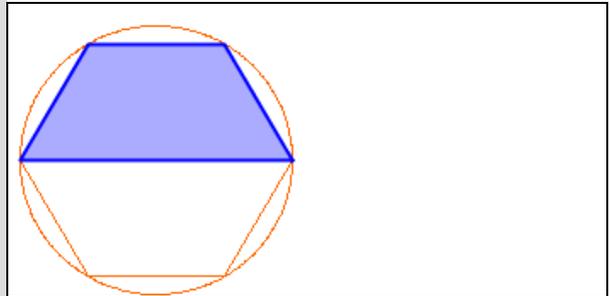
7 Calcula el radio de la circunferencia de la figura.



8 La suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos es \_\_\_\_\_ y el semieje menor mide \_\_\_\_\_. ¿Cuál es la distancia entre los focos?

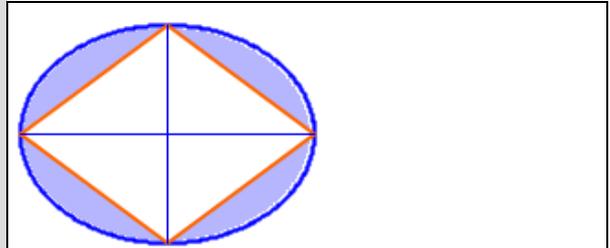


9 Calcula el área de la figura azul inscrita en una circunferencia de radio \_\_\_\_\_.



10 Las diagonales del rombo de la figura miden \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_. Calcula el área del recinto de color azul.

*(Comprendido entre el rombo y la elipse)*





## Movimientos en el plano

### Contenidos

1. Vectores  
Concepto de vector. Coordenadas  
Vectores equipolentes  
Suma de vectores
2. Traslaciones  
Traslación según un vector  
Composición de traslaciones
3. Giros  
Giro de centro  $O$  y ángulo  $\alpha$   
Simetría central  
Figuras invariantes de orden  $n$
4. Simetría axial  
Simetría de eje  $e$   
Figuras con eje de simetría  
Composición de simetrías axiales

### Objetivos

- Manejar el concepto de vector como elemento direccional del plano.
- Reconocer los movimientos principales en el plano: traslaciones, giros y simetrías.
- Aplicar uno o más movimientos a una figura geométrica.
- Reconocer movimientos geométricos en el arte, la naturaleza, etc..



**Antes de empezar**

**Recuerda**

... que en el plano cada punto tiene sus coordenadas.

Pulsa en el botón

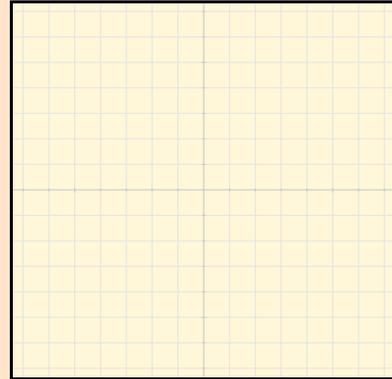


para hacer unos ejercicios.

**EJERCICIO de Refuerzo**

Representa sobre el sistema de coordenadas los siguientes puntos:

- a) P(-1,3)
- b) Q(0,-2)
- c) R(2,-5)
- d) S(2,5)
- e) T(-2,5)



Pulsa



para ir a la página siguiente.

**1. Vectores**

**1.a. Concepto de vector. Coordenadas**

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado y haz clic en el botón play de la escena para ver la animación.

**EJERCICIO:**

Dado un vector  $\vec{AB}$  determinado por  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$ , completa:

ORIGEN:	
EXTREMO:	
COORDENADAS:	
MÓDULO:	
DIRECCIÓN:	
SENTIDO:	

Cuando hayas comprendido bien los conceptos ...

Pulsa en

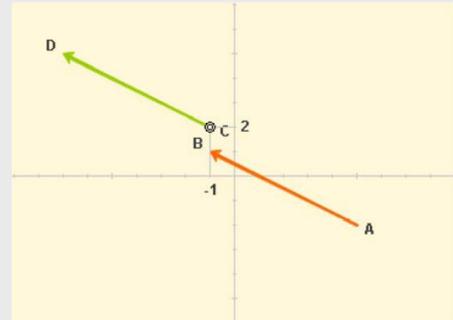


para hacer unos ejercicios.



### EJERCICIO

3. Los vectores equipolentes tienen las mismas coordenadas. Dados el punto A(5,-2) y el B(-1,1), ¿cuáles son las coordenadas del punto D?



### EJERCICIOS de Refuerzo

a) Sabiendo que los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{CD}$  son equipolentes al vector  $\vec{u}$  de coordenadas (2,-1) completa la tabla siguiente:

Vector	Origen	Extremo
$\vec{AB}$	A(1,1)	
$\vec{CD}$		D(0,0)

b) Dados dos puntos cualesquiera A y B:

¿Cómo son los módulos de  $\vec{AB}$  y  $\vec{BA}$ ? \_\_\_\_\_

¿Y sus direcciones? \_\_\_\_\_

¿Y sus sentidos? \_\_\_\_\_

¿Son equipolentes dichos vectores? \_\_\_\_\_

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.c. Suma de vectores

Lee el texto de pantalla: "La suma de dos vectores..."

#### Completa:

La suma de dos vectores,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , es otro vector,  $\vec{u} + \vec{v}$ , que podemos construir de dos formas:

• _____ _____
• _____ _____

Observa la escena para ver detalladamente cómo se suman dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

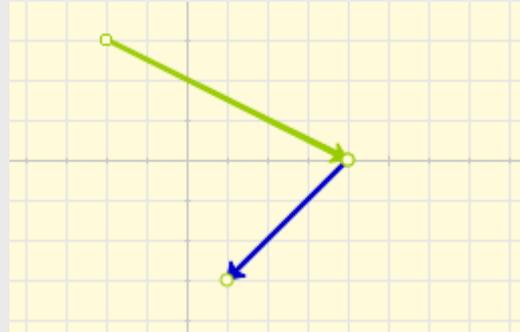
Después... Pulsa en  para hacer unos ejercicios.

**EJERCICIO**

4. Suma en cada caso gráfica y analíticamente, los vectores verde  $\vec{u}$ , y azul  $\vec{v}$ .

a)  $\vec{u} = (-4, -3)$   $\vec{v} = (6, -3)$

b)  $\vec{u} = (6, -3)$   $\vec{v} = (-3, -3)$



Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

**2. Vectores**

**2.a. Traslación según un vector**

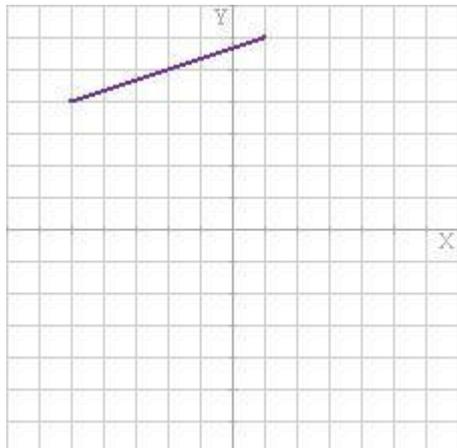
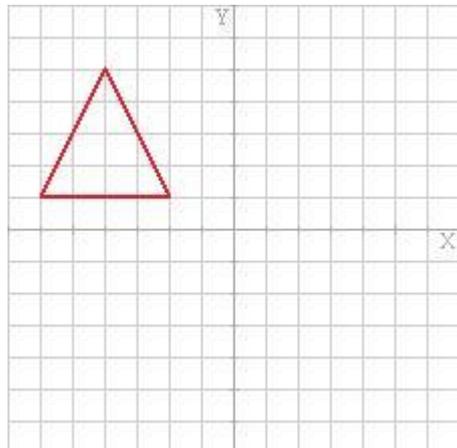
Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

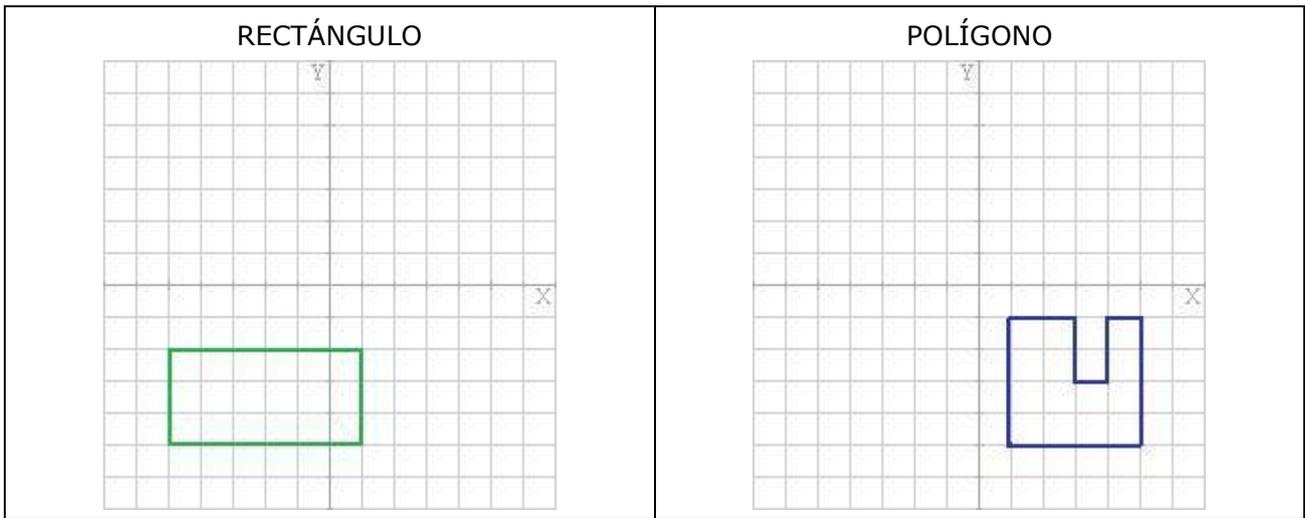
**Completa:**

Una traslación de vector $\vec{u}$ es un movimiento que transforma _____ _____
Una traslación es un movimiento directo ( _____ ) e isomorfo ( _____ ).

Practica con la escena para ver traslaciones de distintas figuras.

**EJERCICIO:** Copia ejemplos de traslaciones de distintas figuras:

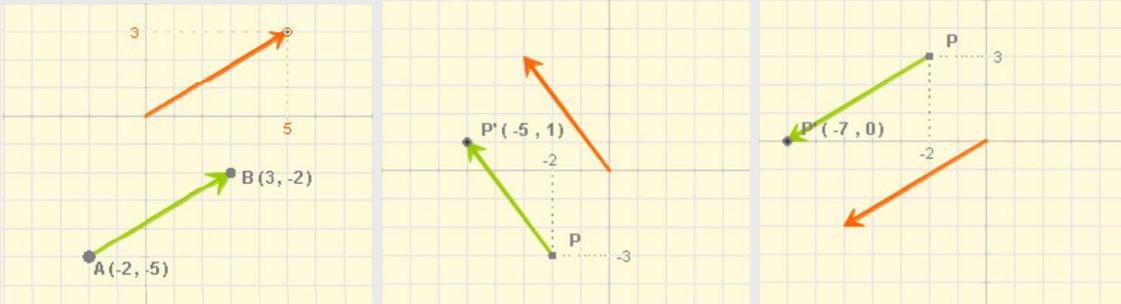
<p>SEGMENTO</p> 	<p>TRIÁNGULO</p> 
---	---



Después... Pulsa en  para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS

5. Al trasladarse las coordenadas de un punto se ven incrementadas por las del vector de traslación. Compruébalo en los siguientes casos:



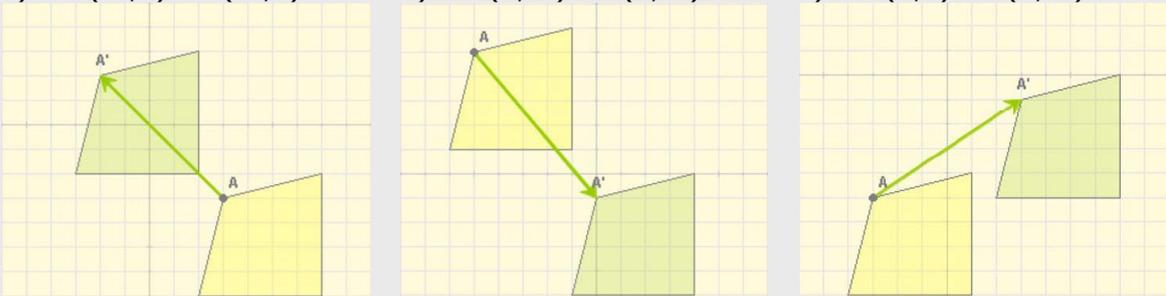
$\vec{u} =$		$\vec{u} =$		$\vec{u} =$	
A( __ , __ )	B( __ , __ )	P( __ , __ )	P'( __ , __ )	P( __ , __ )	P'( __ , __ )

6. El cuadrilátero verde es el trasladado del amarillo en cada caso. Calcula las coordenadas del punto A.

a)  $\vec{v} = (-5, 5)$     A'(-2, 2)

b)  $\vec{v} = (5, -6)$     A'(0, -1)

c)  $\vec{v} = (6, 4)$     A'(3, -1)



Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

**2.b. Composición de traslaciones**

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado y observa en la escena como se construye un friso y un mosaico a partir de cada una de las figuras que aparecen.

**EJERCICIO:** Copia un par de ejemplos de frisos y otro par de mosaicos:

FRISO 1	FRISO 2
MOSAICO 1	MOSAICO 2

Después... Pulsa en  para ver unas fotografías.

**EJERCICIO**

7. El arte muestra traslaciones como puedes apreciar en los ejemplos siguientes. Dibuja sobre ellos el vector de traslación que ha dado lugar a los frisos.



Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3. Giros

#### 3.a. Giro de centro O y ángulo $\alpha$

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**Completa:**

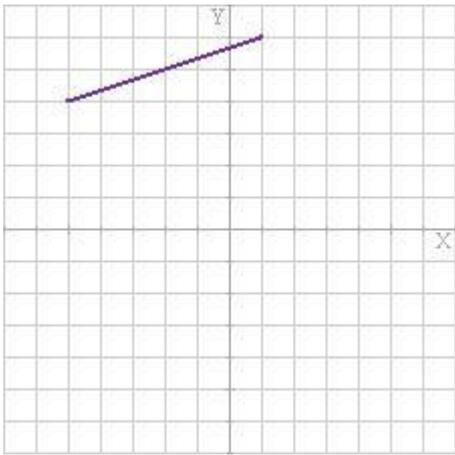
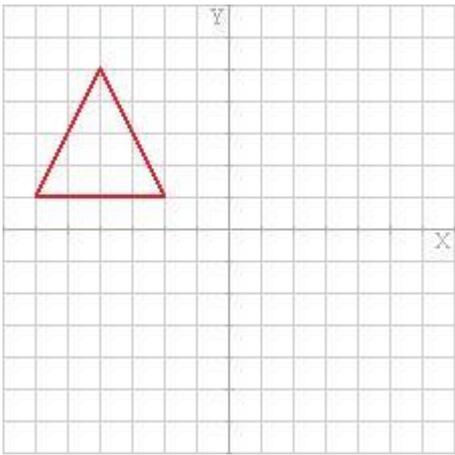
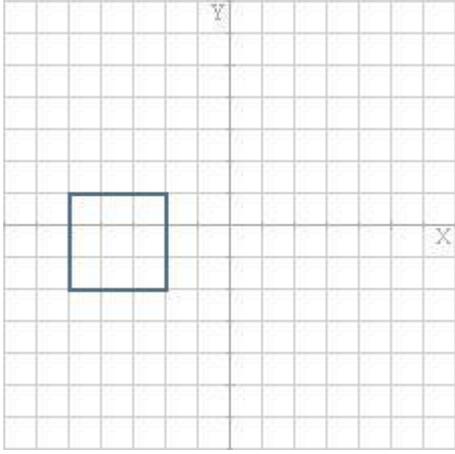
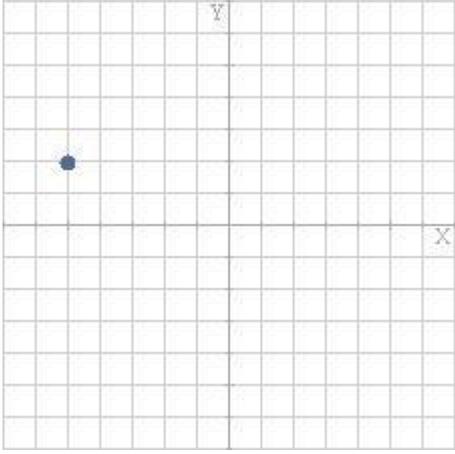
Un giro, de centro un punto O y amplitud un ángulo  $\alpha$ , transforma \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Debes tener en cuenta que un giro puede tener **orientación positiva** ( \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_ ) o **negativa** ( \_\_\_\_\_ ).

Practica con la escena para ver giros de distintas figuras.

**EJERCICIO:**

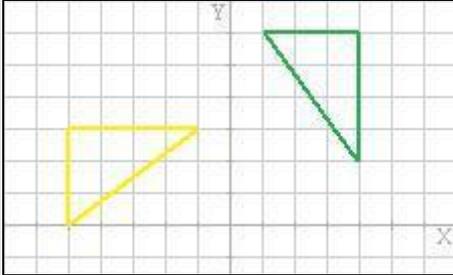
Copia ejemplos de giros de diferentes figuras usando distintos centros y ángulos (positivos y negativos):

<p>SEGMENTO</p> 	<p>TRIÁNGULO</p> 
<p>CUADRADO</p> 	<p>PUNTO</p> 

Después... Pulsa en  para ver cómo se determina el centro y el ángulo de giro.

**EJERCICIO**

8. ¿Cuál es el centro del giro que transforma el triángulo amarillo en el verde?



Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

**3.b. Simetría central**

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

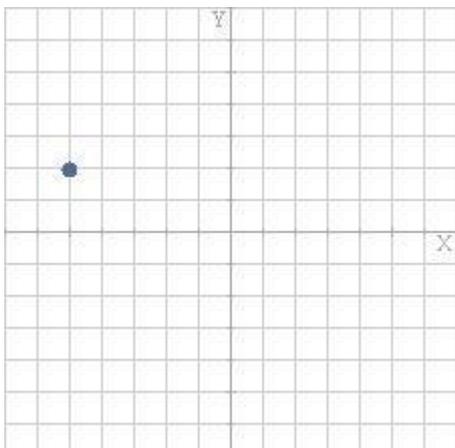
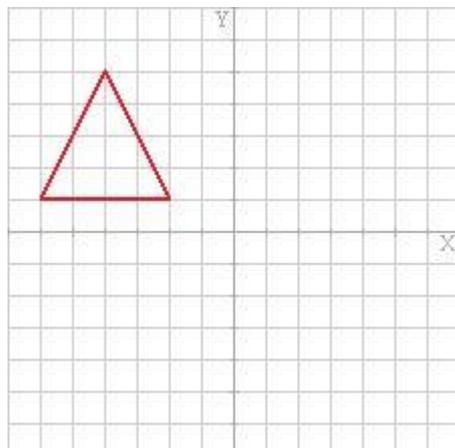
**Define:**

Simetría central: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Centro de simetría: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Practica con la escena para ver simetrías centrales de distintas figuras, ejemplos de centro de simetría y una aplicación de las simetrías centrales a la producción de mosaicos.

**EJERCICIO:** Copia dos ejemplos de simetrías centrales aplicadas a distintas figuras.

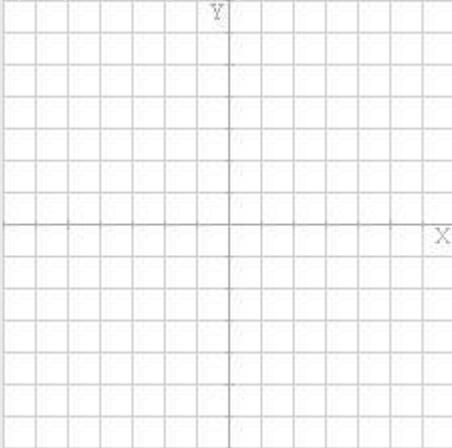
<p><b>PUNTO</b></p> 	<p><b>TRIÁNGULO</b></p> 
---	--

Después... Pulsa en  para hacer unos ejercicios.

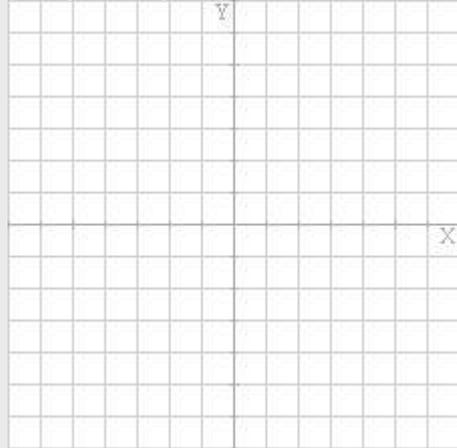
### EJERCICIOS

9. ¿Cuáles son las coordenadas del punto  $P'$ , simétrico del  $P$  en la simetría de centro el punto  $O$ ?

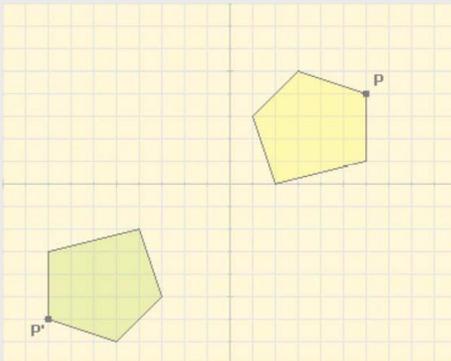
a)  $O(1,1)$        $P(-3,-3)$



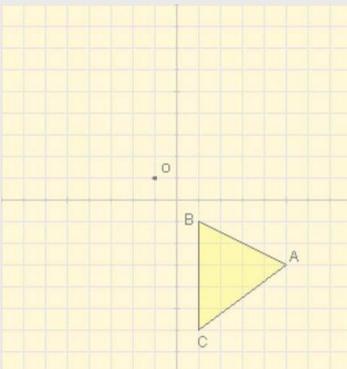
b)  $O(-2,1)$        $P(2,-3)$



10. En la imagen se muestra un polígono (color amarillo) y su simétrico (color verde) respecto al punto  $O$ , ¿cuáles son las coordenadas de  $O$ ?

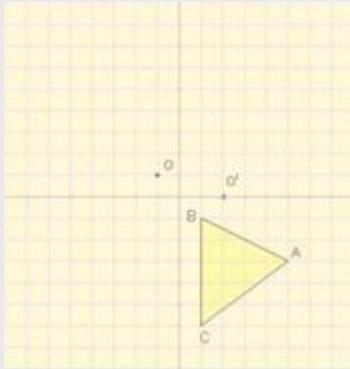


11. Al triángulo amarillo le aplicamos sucesivamente dos simetrías centrales respecto al mismo punto,  $O$ , ¿cuál es el resultado?



**EJERCICIO**

12. Se aplica al triángulo amarillo una simetría de centro O, y después otra de centro O', ¿cuál es el resultado?



Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

**3.c. Figuras invariantes de orden n**

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**Define:**

Centro de giro: _____ _____ _____
Figura invariante de orden n: _____ _____

Observa en la escena diferentes figuras con centro de giro. Fíjate bien en cómo se halla el centro de giro y cuál es la amplitud del giro en las sucesivas coincidencias.

**EJERCICIO:**

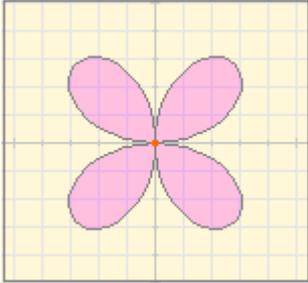
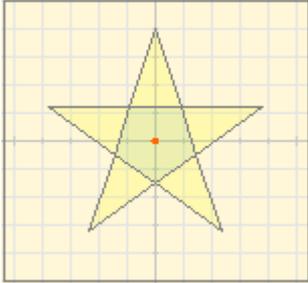
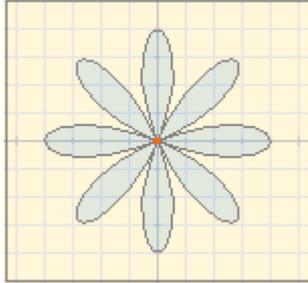
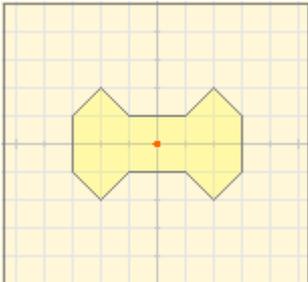
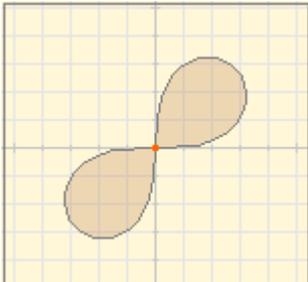
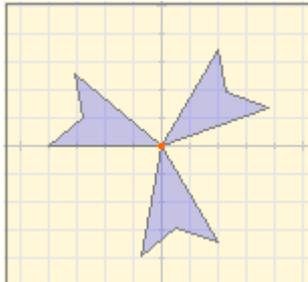
Dibuja figuras con centro de giro señalando en ellas dicho centro de giro:

FIGURA INVARIANTE DE ORDEN 3	FIGURA INVARIANTE DE ORDEN 6
------------------------------	------------------------------

Después... Pulsa en  para hacer unos ejercicios.

**EJERCICIO:**

Indica el orden del centro de giro de las siguientes figuras (número de coincidencias) y la amplitud del giro en que se produce la primera coincidencia:

<p>FIGURA 1</p> 	<p>FIGURA 2</p> 	<p>FIGURA 3</p> 
Orden: ____ Ángulo: ____	Orden: ____ Ángulo: ____	Orden: ____ Ángulo: ____
<p>FIGURA 4</p> 	<p>FIGURA 5</p> 	<p>FIGURA 6</p> 
Orden: ____ Ángulo: ____	Orden: ____ Ángulo: ____	Orden: ____ Ángulo: ____

Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

**4. Simetría axial**

**4.a. Simetría de eje e**

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**Completa:**

Una simetría respecto a un eje <b>e</b> es un movimiento que transforma _____
Según esta definición, debe cumplirse que:
• _____
• _____
Una simetría axial es un <b>movimiento</b> _____ porque se _____ el sentido de giro.

Practica con la escena para ver cómo se halla el simétrico de un punto, cómo se obtiene el eje de simetría dado un punto y su simétrico, el efecto de una simetría en la orientación y qué ocurre cuando el eje de simetría coincide con un lado del triángulo.

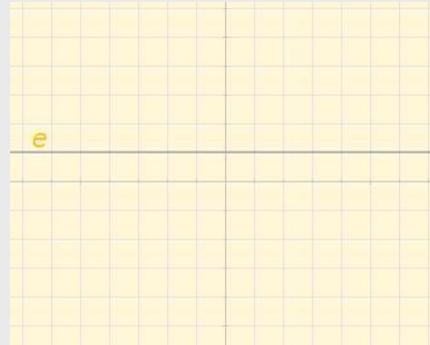
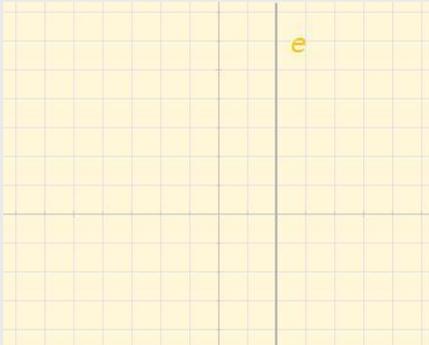
Después... Pulsa en  para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS

13. Calcula las coordenadas del punto P', simétrico del P respecto al eje de la figura.

a) P (-2,4)

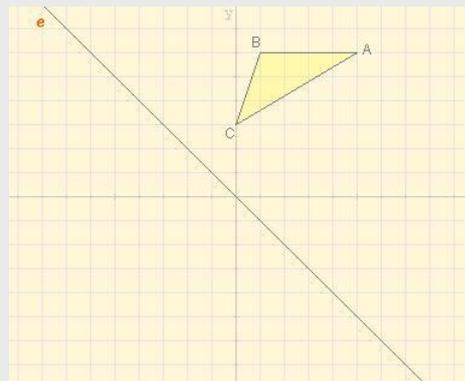
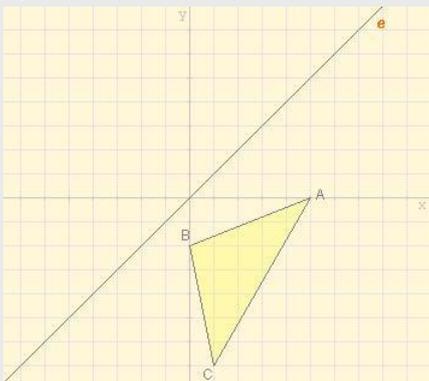
b) P (2,3)



14. En cada caso dibuja el triángulo simétrico respecto del eje e, del de color amarillo e indica las coordenadas de los vértices del transformado.

a) A (5,0), B (0,-2), C (1,-7)

b) A (5,6), B (1,6), C (0,3)



Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

#### 4.b. Figuras con eje de simetría

Lee en la pantalla el texto "Hay figuras que son..." y observa en la escena de la derecha los ejes de simetría de algunas figuras.

**Contesta:**

¿Qué es una figura invariante al aplicarle una simetría axial? _____ _____
¿Qué es el eje de simetría de una figura? _____ _____
¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo equilátero? _____
¿Y un hexágono regular? _____

Después... Pulsa en  para ver unas imágenes.

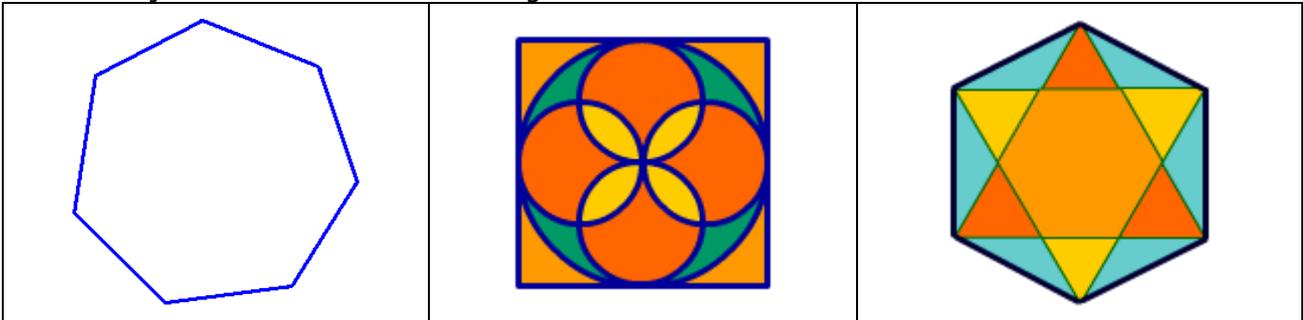
**EJERCICIO:**

Dibuja en cada imagen un eje de simetría que la deje invariante:



**EJERCICIO:**

¿Cuántos ejes de simetría tiene cada figura?



Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

**4.c. Composición de simetrías axiales**

Lee en la pantalla el texto "La aplicación consecutiva de dos..."

**EJERCICIO:**

La aplicación consecutiva de dos simetrías axiales, de ejes  $e$  y  $e'$ , da lugar a un nuevo movimiento que depende de la situación relativa de los ejes  $e$  y  $e'$ :

- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_

**Completa:**

El resultado de **componer dos simetrías axiales** es un \_\_\_\_\_

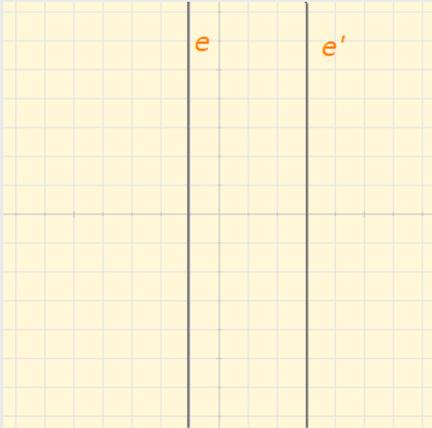
Observa en la escena los dos casos posibles en la composición de dos simetrías axiales.

Después... Pulsa en  para hacer unos ejercicios.

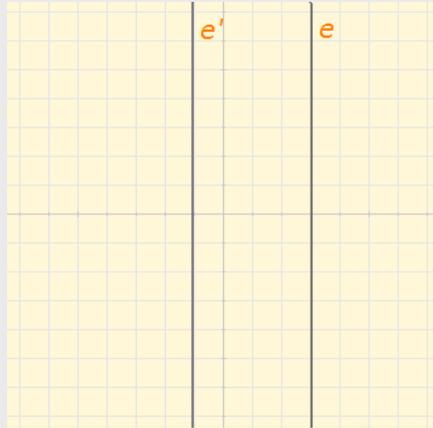
### EJERCICIOS

15. Calcula las coordenadas del punto que resulta al aplicarle a P primero una simetría de eje e y luego otra de eje e'.

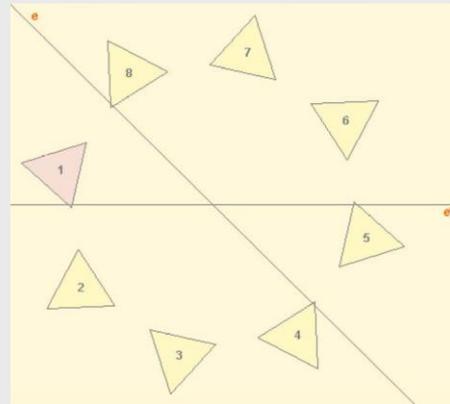
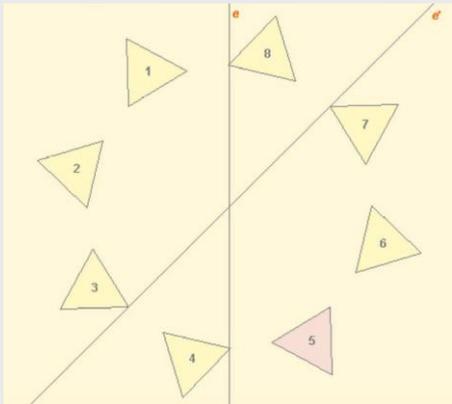
a) P (-2,3)



b) P (2,3)



16. ¿Cuál es el transformado del triángulo de color morado respecto a la composición de simetrías de ejes e y e'?



Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.



## Recuerda lo más importante – RESUMEN

Un vector tiene **MÓDULO** que es \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_, **DIRECCIÓN** que es \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ y **SENTIDO** que es \_\_\_\_\_.

Una traslación de vector  $\vec{u}$  es un \_\_\_\_\_ que transforma cada punto **A** del plano, en otro punto **B** de manera que el vector  $\vec{AB}$  es igual al vector \_\_\_\_\_.

Un **giro**, de centro un punto **O** y amplitud un ángulo  $\alpha$ , transforma cada punto **P** del plano en otro punto **P'** de modo que el ángulo \_\_\_\_\_ es igual a  $\alpha$  y las distancias **OP** y **OP'** son \_\_\_\_\_.

Si al girar una figura con centro en un punto **O** y según un ángulo menor que  $360^\circ$ , coincide con si misma, el punto **O** se dice que es \_\_\_\_\_ de la figura.

Una **simetría central**, o simetría respecto a un punto **O**, es un \_\_\_\_\_ de centro **O** y amplitud \_\_\_\_\_. Transforma pues, cada punto **P** en otro punto \_\_\_\_\_ de modo que el ángulo \_\_\_\_\_ es igual a  $180^\circ$  y las distancias **OP** y **OP'** son \_\_\_\_\_.

Una **simetría axial** respecto a un \_\_\_\_\_ **e** es un \_\_\_\_\_ que transforma cada punto **P** del plano en otro **P'** de modo que la recta **e** es \_\_\_\_\_ del segmento de extremos **P** y **P'**

Pulsa  para ir a la página siguiente

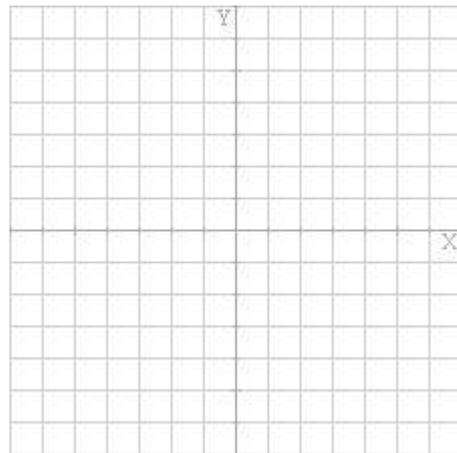


## Para practicar

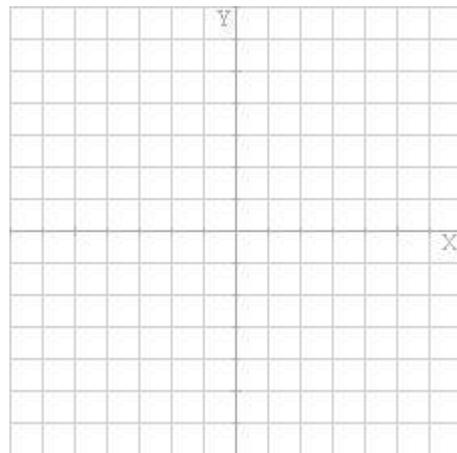
En esta unidad encontrarás ejercicios de Traslaciones, Giros y Simetrías. Haz al menos uno de cada clase y una vez resuelto comprueba la solución.

### Traslaciones

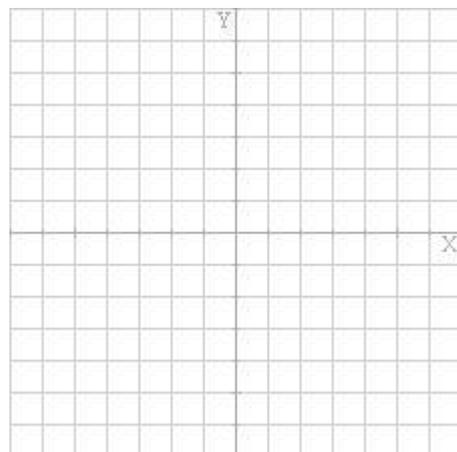
1. Determina las coordenadas y el módulo del vector de la traslación que transforma el punto A \_\_\_\_\_ en el punto B \_\_\_\_\_.



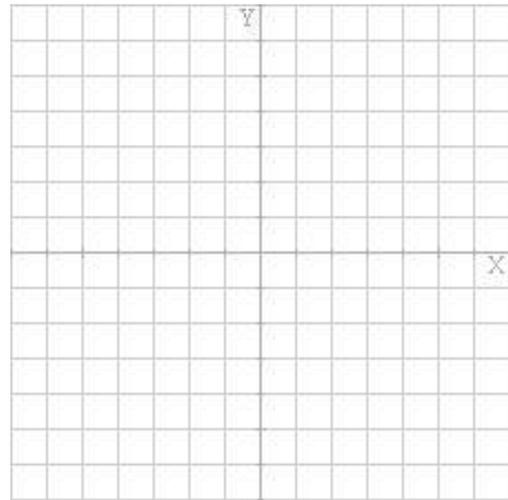
2. Halla el triángulo que ha dado lugar al de la figura, al aplicarle una traslación de vector \_\_\_\_\_.



3. El triángulo de la figura se ha trasladado primero de la posición 1 a la 2, mediante una traslación de vector \_\_\_\_\_, y luego a la 3 por una traslación de vector \_\_\_\_\_. ¿Cuál es el vector de la traslación que pasa directamente de 1 a 3?

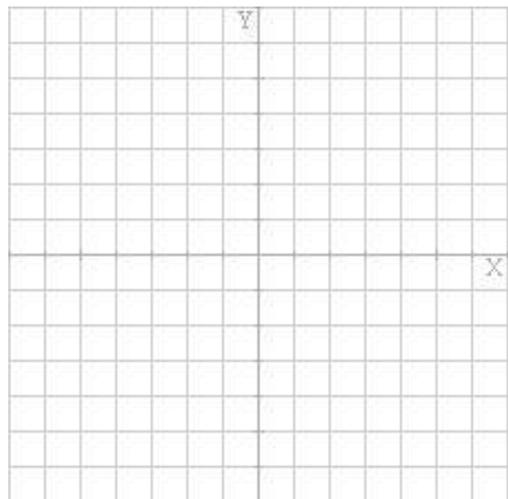


4. Calcula los vértices del triángulo que resulta al aplicar al de la figura una traslación de vector  $\vec{v} = \underline{\hspace{2cm}}$ .



**Giros**

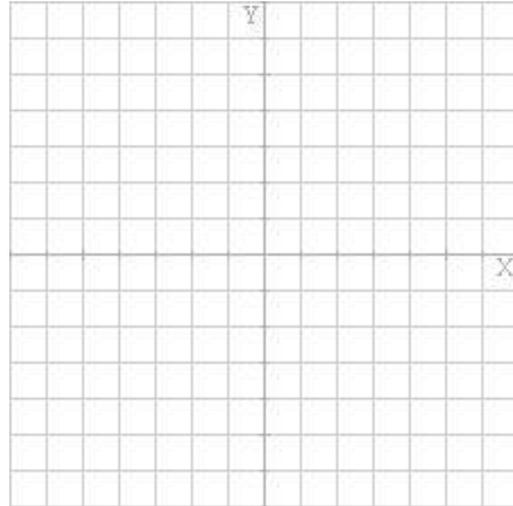
5. El triángulo ABC gira  $90^\circ$  en torno al origen de coordenadas en \_\_\_\_\_ las agujas del reloj, ¿en qué triángulo se transforma?



6. El triángulo morado resulta al girar el azul, siendo los puntos de color naranja homólogos en el giro y los de color verde también. Determina el centro de giro y el ángulo. El giro se realiza en sentido positivo.

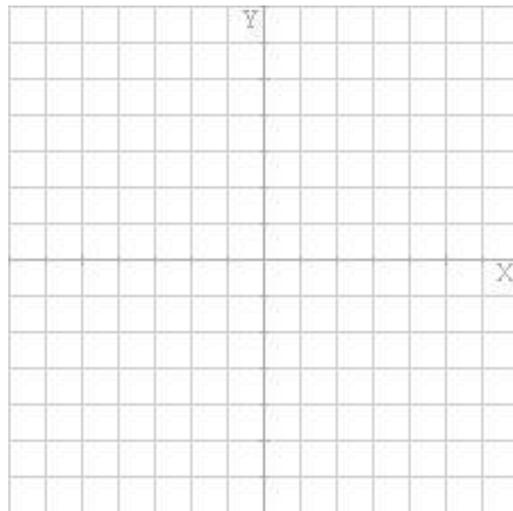


7. El cuadrado de la figura gira  $45^\circ$  en \_\_\_\_\_ las agujas del reloj, en torno al vértice \_\_\_\_\_, ¿cuáles son los vértices del cuadrado transformado?

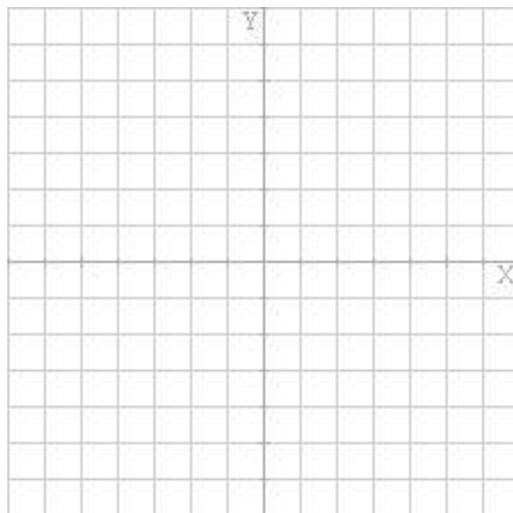


**Simetrías**

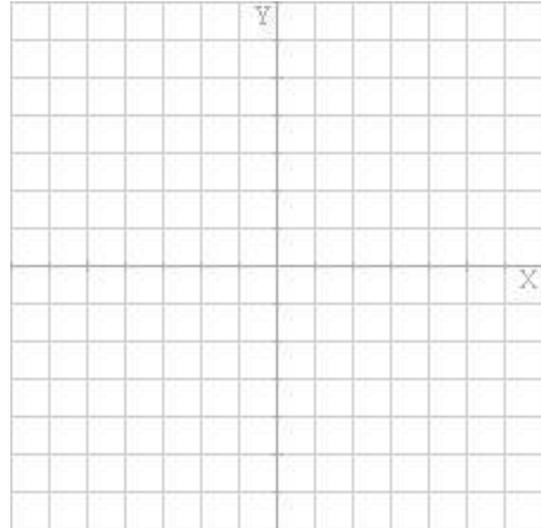
8. Halla la figura transformada del cuadrilátero ABCD por una simetría de eje el de la figura.



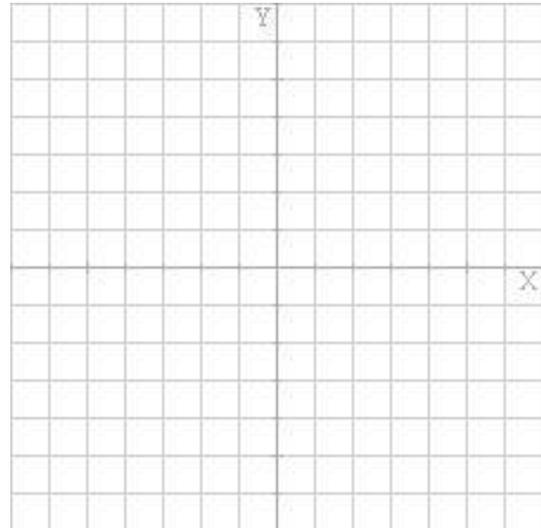
9. Halla la figura transformada del triángulo ABC por una composición de simetrías, primero la de eje azul y luego la de eje rojo.



**10.** Halla la figura transformada del cuadrilátero ABCD por una simetría central, de centro el origen de coordenadas.



**11.** Halla la figura transformada del cuadrilátero ABCD por una simetría de eje el de \_\_\_\_\_.



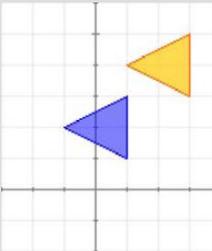
## Autoevaluación



Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.

1 Dados los puntos  $A(-2,2)$  y  $B(3,-4)$ , escribe las coordenadas del vector  $\overrightarrow{AB}$ .

2 ¿Qué punto se obtiene al trasladar el punto  $P(-1,4)$  mediante el vector  $\vec{v}=(4,-1)$ ?

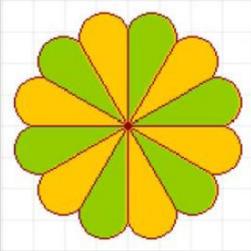
3  Halla las coordenadas del vector de la traslación que transforma el triángulo azul en el naranja.

4 El punto  $B(4,2)$  es el resultado de trasladar el punto  $A(-4,6)$  mediante una traslación de vector  $\vec{v}$ . ¿Qué distancia hay entre A y B?

5 ¿Qué punto resulta al girar  $P(4,1)$  alrededor del origen de coordenadas, un ángulo de  $90^\circ$  en sentido contrario a las agujas del reloj?

6 ¿Cuál es el centro de la simetría que transforma el punto  $P(4,-2)$  en el  $P'(-2,0)$ ?

7



La figura de la izquierda tiene centro de simetría, ¿Cuál es el menor ángulo que ha de girar para quedar invariante?

8

¿Cuáles son las coordenadas del punto simétrico del  $P(4,-2)$  en la simetría de eje la bisectriz del primer cuadrante?

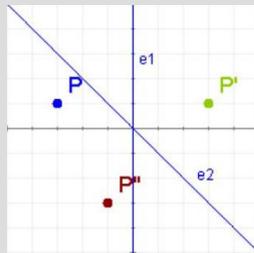
9

¿Cuántos ejes de simetría tiene la figura de la derecha?



10

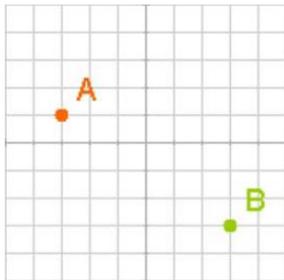
Al aplicar al punto  $P$  primero una simetría de eje  $e_1$  y luego una simetría de eje  $e_2$ , resulta el punto  $P''$ . ¿Cuál es el ángulo del giro que transforma directamente  $P$  en  $P''$ .



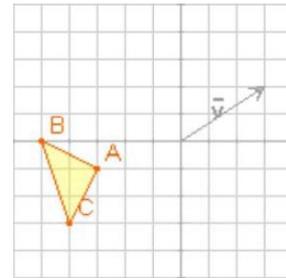


## Para practicar más

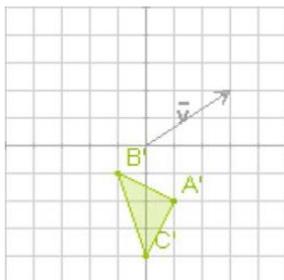
1. Determina las coordenadas y el módulo del vector de la traslación que transforma el punto A en el punto B



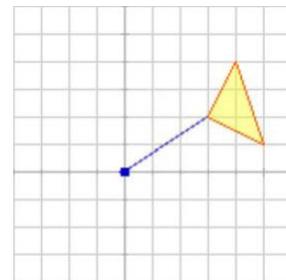
4. Calcula los vértices del triángulo que resulta al aplicar al de la figura una traslación de vector  $\vec{v} = (3, 2)$ .



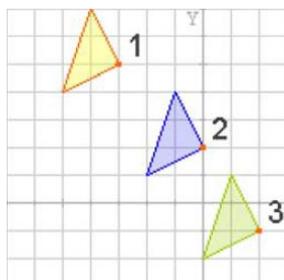
2. Halla el triángulo que ha dado lugar al de la figura, al aplicarle una traslación de vector  $(3, 2)$ .



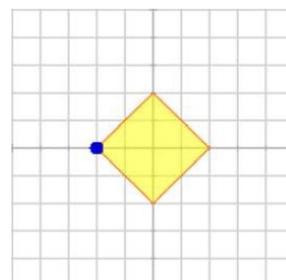
5. El triángulo ABC de la figura gira 90° en torno al origen de coordenadas, en qué triángulo se transforma?



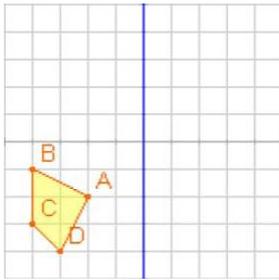
3. El triángulo de la figura se ha trasladado primero de la posición 1 a la 2, mediante una traslación de vector  $(3, -3)$ , y luego a la 3 por una traslación de vector  $(2, -3)$ . ¿Cuál es el vector de la traslación que pasa directamente de 1 a 3?



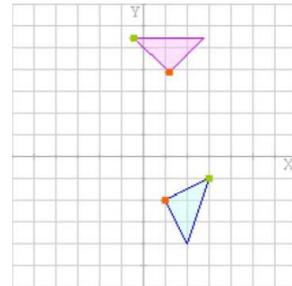
6. El cuadrado de la figura gira 45° en sentido contrario a las agujas del reloj, en torno al vértice señalado, ¿cuáles son los vértices del cuadrado transformado?



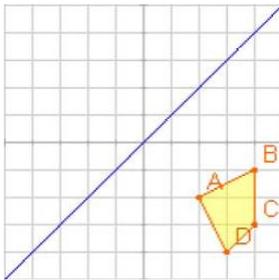
7. Halla la figura transformada del cuadrilátero ABCD por una simetría:
- de eje el de ordenadas
  - el de abscisas.



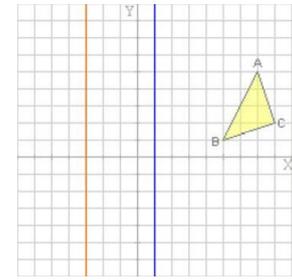
10. El triángulo azul se transforma en el morado tras un giro de centro O, dibújalo y calcula el centro de giro.



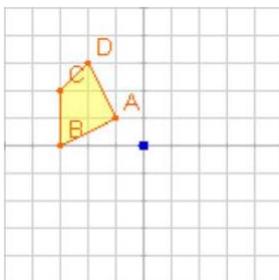
8. Halla la figura transformada del cuadrilátero ABCD por una simetría de eje el de la figura.



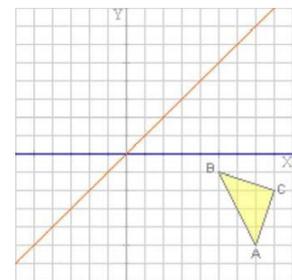
11. Halla la figura transformada del triángulo ABC por una composición de simetrías, primero la de eje azul y luego la de eje rojo.



9. Halla la figura transformada del cuadrilátero ABCD por una simetría central, de centro el origen de coordenadas.



12. Halla la figura transformada del triángulo ABC por una composición de simetrías, primero la de eje azul y luego la de eje rojo.





## Cuerpos geométricos

### Contenidos

1. Poliedros regulares  
Definiciones  
Desarrollos  
Poliedros duales
2. Otros poliedros  
Prismas  
Pirámides  
Poliedros semirregulares
3. Cuerpos de revolución  
Cilindros  
Conos  
Esferas
4. La esfera terrestre  
Coordenadas geográficas  
Husos horarios
5. Mapas  
Proyecciones

### Objetivos

- Distinguir las clases de cuerpos geométricos.
- Construirlos a partir de su desarrollo plano.
- Calcular sus áreas y volúmenes.
- Localizar un punto sobre la Tierra.
- Calcular la hora en cada país.
- Cómo se hacen los distintos tipos de mapas y las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos.



**Antes de empezar**

Pulsa... Recuerda  para repasar algunos conceptos.

Se abre una ventana con una explicación teórica y dos escenas.

Lee el texto y utiliza las escenas para realizar los siguientes ejercicios.

**EJERCICIO 1:** Completa las frases siguientes.

**Poliedros**

Un **poliedro** es un cuerpo cerrado \_\_\_\_\_.

Cada uno de ellos recibe el nombre de \_\_\_\_\_.

Los lados de las caras son las \_\_\_\_\_ del poliedro.

Los extremos de las aristas son los \_\_\_\_\_ del poliedro.

**EJERCICIO 2:** En la primera escena elige uno a uno los poliedros, observa y cuenta cuántas caras, aristas y vértices tiene cada uno y completa con esos datos esta tabla.

	Caras C	Aristas A	Vértices V	$A - V + 2$
Cubo				
Prisma recto				
Pirámide				
Dodecaedro				

**EJERCICIO 3:** Completa la frase siguiente y la fórmula:

En todo poliedro simple (sin huecos) se cumple **la relación de Euler:**  
*El número de caras de un poliedro (C) es igual* \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_.

**EJERCICIO 4:** Completa las frases siguientes.

**Cuerpos de revolución**

Un **cuerpo de revolución** es cualquier figura geométrica construida \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_.

**EJERCICIO 5:** En la segunda escena elige uno a uno los cuerpos de revolución y observa cuál es en cada caso la figura que al girar alrededor del eje da lugar a cada uno de ellos. Completa:

Cuerpo de revolución	Figura que gira

Quando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

## 1. Poliedros regulares

### 1.a. Definiciones

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado y elige en la escena uno a uno los poliedros para ver sus características.

**EJERCICIO 1:** Completa las frases siguientes.

Diremos que un **poliedro** es **regular** cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- Sus caras son \_\_\_\_\_.
- En cada vértice \_\_\_\_\_.

**EJERCICIO 2:** Completa esta tabla con los nombres y características de los poliedros regulares (Nº de caras, tipo de polígono de las caras). Escribe también un ejemplo de una figura o compuesto químico cuya forma sea similar a cada uno de estos poliedros.

Nombre	Nº de caras	Polígono de las caras	Ejemplo

Los cinco poliedros regulares también se llaman \_\_\_\_\_.  
(Si haces clic en ese otro nombre aparece un artículo de la wikipedia)

Quando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

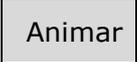
### 1.b. Desarrollos

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado y la escena para comprender mejor las explicaciones.

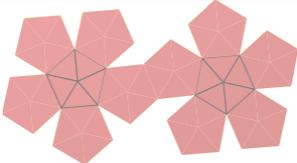
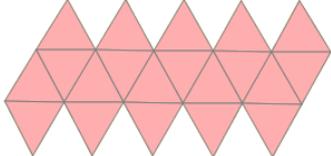
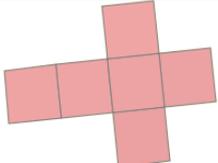
**EJERCICIO 1:** Completa las frases siguientes.

Se dice que un cuerpo geométrico es **desarrollable** cuando \_\_\_\_\_.

En la escena, selecciona el poliedro, coloca la plantilla con el ratón en la posición que quieras...

... y pulsa el botón 

**EJERCICIO 2:** Escribe debajo de cada desarrollo el nombre del poliedro correspondiente.

Quando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.c. Poliedros duales

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado y utiliza la escena para comprender mejor lo que se explica.

**EJERCICIO 1:** Completa las frases siguientes.

<b>Poliedros duales</b>
Se dice que dos poliedros son <b>duales</b> si el _____.
Además ambos deben tener _____.

**EJERCICIO 2:** Contesta las siguientes preguntas.

	RESPUESTAS
¿Qué puntos hay que unir para obtener el poliedro dual?	
¿Cuál es el poliedro dual de un octaedro?	
¿Cuál es el poliedro dual de un icosaedro?	
¿Cuál es el poliedro dual de un dodecaedro?	
¿Cuál es el poliedro dual de un tetraedro?	
¿Cuál es el poliedro dual de un hexaedro?	

Quando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2. Otro poliedros

### 2.a. Prismas

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado. Utiliza la escena para ver las características de estos cuerpos geométricos.

Si aparece el botón Desarrollo animado (En los prismas regulares de 5 lados) Haciendo clic en el puedes acceder a otra página en la que verás con mayor detalle el desarrollo de los prismas

**EJERCICIO 1:** Completa las frases siguientes.

Un <b>prisma</b> es un _____ de _____ formadas por _____ cuyos lados se unen mediante _____.
--

**EJERCICIO 2:** Contesta las siguientes preguntas.

	RESPUESTAS
¿Cuáles son las bases de un prisma?	
¿Cuáles son los lados de un prisma?	
¿Cómo son los lados de un prisma recto?	
¿Cómo son los lados de un prisma oblicuo?	
¿Cómo son las bases de un paralelepípedo?	
¿Cómo son las bases y los lados de un ortoedro?	
¿Cuándo se dice que un prisma es regular?	

Pulsa...  → Desarrollos, áreas y volúmenes de los prismas regulares

Se abre una escena en la que puedes elegir:

- Desarrollos de prismas regulares
- Área de un prisma
- Volumen de un prisma

Elige:   E indica nº de lados = 5

Aparece un prisma regular pentagonal, su desarrollo y las fórmulas para calcular su área.

**EJERCICIO:** Completa.

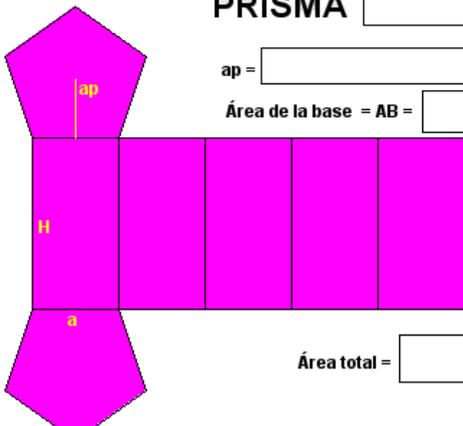
### Desarrollos, áreas y volúmenes de prismas regulares

Los prismas son cuerpos desarrollables. En particular, los prismas regulares tienen un desarrollo muy sencillo, formado por tantos rectángulos iguales como lados tenga y dos polígonos regulares que forman las bases. Esto facilita el cálculo de sus áreas y volúmenes.

1. Desarrollo y área de un \_\_\_\_\_:

**PRISMA**

$ap =$         $p =$    
 Área de la base =  $AB =$



Área de un lado =

Área lateral =  $AL =$

Área total =

Elige:   E indica nº de lados = 5

6. Volumen de un prisma pentagonal regular:



Podemos considerar que está formado por una serie apilada de prismas del mismo tipo cuya altura es la unidad. El volumen de cada uno de estos pequeños prismas es igual al área de la base,  $A$ , luego el volumen del prisma grande será:

$$\boxed{\phantom{V = A \cdot H}}$$

Siendo  $H$  la altura del prisma

$$V = \boxed{\phantom{A \cdot H}}$$

Cuando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2.b. Pirámides

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

Utiliza la escena para ver las características de estos cuerpos geométricos.

Si aparece el botón **Desarrollo animado** (En las pirámides regulares de 5 lados)

Te permite ver con mayor detalle el desarrollo de los prismas.

**EJERCICIO 1:** Completa las frases siguientes.

Una <b>pirámide</b> es un _____ con _____ formada por _____ sobre cuyos lados _____ que _____.
---

**EJERCICIO 2:** Contesta las siguientes preguntas.

PREGUNTAS	RESPUESTAS
¿Cuál es la base de una pirámide?	
¿Cuáles son los lados de una pirámide?	
¿Cuál es el vértice de una pirámide?	
¿Cuál es la altura de una pirámide?	
¿Cuándo se dice que la pirámide es recta?	
¿Cuándo se dice que la pirámide es oblicua?	
¿Cómo son los lados de un prisma oblicuo?	
¿Cuándo se dice que la pirámide es regular?	
¿Qué poliedro ya estudiado es un caso particular de pirámide? ¿Cómo son sus lados?	

Pulsa...  → Desarrollos, áreas y volúmenes de las pirámides regulares

Se abre una escena en la que puedes elegir:

Desarrollos de pirámides regulares
Área de las pirámides regulares
Volumen de las pirámides

Elige: Desarrollos de pirámides regulares ▼ E indica nº de lados = 5

**EJERCICIO:** Completa el texto y dibuja el desarrollo en el siguiente recuadro.

### Desarrollos, áreas y volúmenes de pirámides regulares

Las pirámides son \_\_\_\_\_. En particular, las pirámides regulares tienen un desarrollo muy sencillo, formado por tantos \_\_\_\_\_ iguales como lados tenga y \_\_\_\_\_ que forma la base.

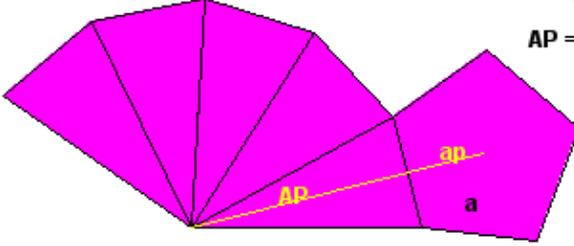
3. Desarrollo de una pirámide regular pentagonal:

Elige:  E indica nº de lados = 5

**EJERCICIO:** Completa las fórmulas para las áreas de un prisma pentagonal.

4. Área de una pirámide regular pentagonal:

**PIRÁMIDE**



$a =$    
 $AP =$

Área de la base =  $AB =$

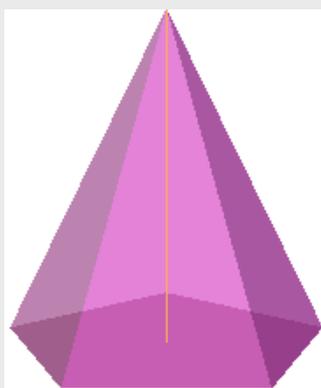
Área de un lado =       **ÁREA TOTAL =**

Área lateral =  $AL =$

Elige:  E indica nº de lados = 5

**EJERCICIO:** Completa el texto y las fórmulas para obtener el volumen de una pirámide pentagonal.

5. Volumen de una pirámide pentagonal regular:



El volumen de cualquier pirámide es siempre igual a \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_.

$V =$

Siendo \_\_\_\_\_

PIRÁMIDE PENTAGONAL

Área de la base:  $AB =$

Volumen:  $V =$

Cuando acabes pulsa para ir a la página siguiente.

## 2.c. Poliedros semirregulares

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO 1:** Completa las frases siguientes.

<u>Poliedros semirregulares</u>
Un <b>poliedro semirregular</b> es un poliedro cuyas caras son _____ de _____, de forma que en cada vértice _____.

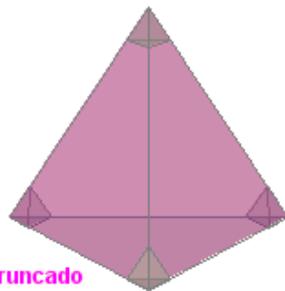
Se pueden obtener, con cierta facilidad, poliedros semirregulares a partir de los poliedros regulares mediante la técnica del truncamiento.

**Truncar** un poliedro consiste en suprimir uno de sus vértices mediante la aplicación de un corte plano.

En la escena elige en el menú: **Tetraedro**

En la parte inferior de la escena puedes variar la longitud del corte:

**Long. corte**



Tetraedro truncado

Indica **Longitud de corte = 1,3**

Completa los datos del poliedro semirregular que aparece:

Caras: 4 \_\_\_\_\_ y 4 \_\_\_\_\_

En cada vértice confluyen: \_\_\_\_\_

Indica **Longitud de corte = 2**

En este caso el poliedro semirregular que se obtiene es un \_\_\_\_\_.

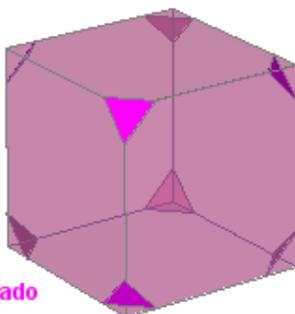
En la escena elige en el menú: **Cubo**

Indica **Longitud de corte = 1,2**

Completa los datos del poliedro semirregular que aparece:

Caras: \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

En cada vértice confluyen: \_\_\_\_\_



Cubo truncado

Indica **Longitud de corte = 2**

Completa los datos del poliedro semirregular que aparece:

Recibe el nombre de: \_\_\_\_\_

Caras: \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

En cada vértice confluyen: \_\_\_\_\_

En la escena elige en el menú:

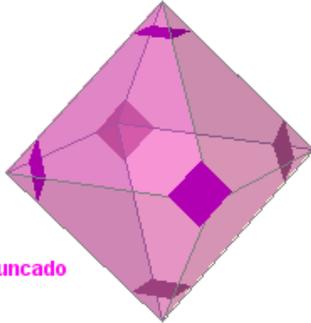
**Octaedro**

Indica **Longitud de corte = 1,4**

Completa los datos del poliedro semirregular que aparece:

Caras: \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

En cada vértice confluyen: \_\_\_\_\_



Octaedro truncado

Indica **Longitud de corte = 2**

Completa los datos del poliedro semirregular que aparece:

Recibe el nombre de: \_\_\_\_\_

Caras: \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

En cada vértice confluyen: \_\_\_\_\_

En la escena elige en el menú:

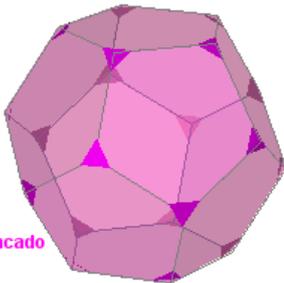
**Dodecaedro**

Indica **Longitud de corte = 1,2**

Completa los datos del poliedro semirregular que aparece:

Caras: \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

En cada vértice confluyen: \_\_\_\_\_



Dodecaedro truncado

Indica **Longitud de corte = 2**

Completa los datos del poliedro semirregular que aparece:

Caras: \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

En cada vértice confluyen: \_\_\_\_\_

En la escena elige en el menú:

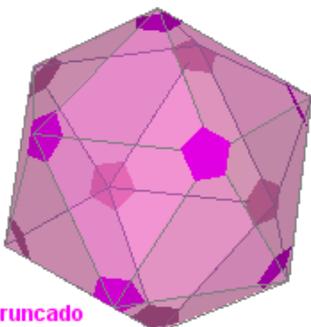
**Icosaedro**

Indica **Longitud de corte = 1,4**

Completa los datos del poliedro semirregular que aparece:

Caras: \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

En cada vértice confluyen: \_\_\_\_\_



Icosaedro truncado

Indica **Longitud de corte = 2**

Completa los datos del poliedro semirregular que aparece:

Caras: \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

En cada vértice confluyen: \_\_\_\_\_

Pulsa...

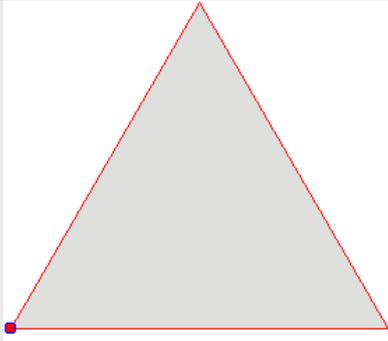


Para ver algunas cuestiones relativas a estos temas

## EJERCICIOS

6. Determinar la longitud de la arista de un tetraedro, de un octaedro o de un icosaedro que hay que truncar a partir de un vértice para obtener un poliedro semirregular.

En la escena de ejercicios pulsa

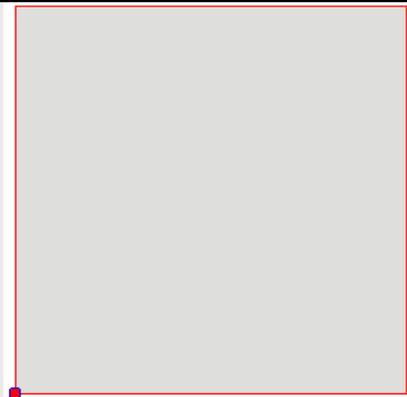


El triángulo representa la cara de un tetraedro. Moviendo el vértice se simula el truncamiento de los vértices.

Utiliza la escena para deducir por dónde debe producirse el corte para obtener un poliedro semirregular (de modo que aparezca un hexágono)

7. Determinar la longitud de la arista de un cubo que hay que truncar a partir de un vértice para obtener un poliedro semirregular.

En la escena de ejercicios pulsa

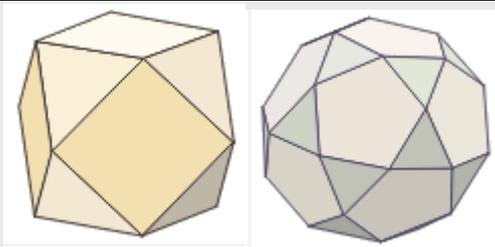


El cuadrado representa una cara de un cubo. Moviendo el vértice se simula el truncamiento de los vértices.

Utiliza la escena para deducir por dónde debe producirse el corte para obtener un poliedro semirregular (ha de obtenerse un octógono)

8. Analiza la dualidad de poliedros regulares cuando se truncan por la mitad de la arista.

En la escena de ejercicios pulsa



El cubo y el octaedro son duales. En ambos casos se obtiene un \_\_\_\_\_

El dodecaedro y el icosaedro son duales.

En ambos casos se obtiene un \_\_\_\_\_

Cuando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3. Cuerpos de revolución

#### 3.a. Cilindros

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

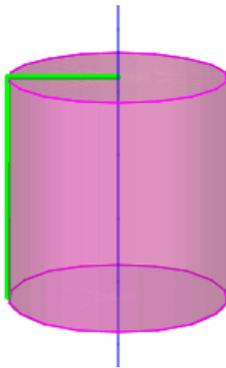
**EJERCICIO 1:** Completa las frases siguientes.

Un **cilindro** es un cuerpo generado por \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_) al girar alrededor de \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_). El cilindro es un cuerpo \_\_\_\_\_.

En la escena elige en el menú:

**Elementos del cilindro** ▼

**EJERCICIO 2:** Escribe en el dibujo los nombres de los elementos y contesta las preguntas.



	RESPUESTAS
¿Cuántas caras tiene un cilindro?	
¿Cómo son las dos caras que son iguales?	
¿Cómo se llaman esas dos caras?	
¿Qué figura geométrica es la otra cara?	
¿Cuál es el radio de un cilindro?	
¿Cuál es la altura de un cilindro?	
¿Cuál es la base de la cara lateral?	
¿Cuál es la altura de la cara lateral?	

En la escena elige en el menú:

**Desarrollo del cilindro** ▼

Puedes pulsar el botón **Desarrollo animado** para acceder a otra página en la que puedes ver con mayor detalle el desarrollo de los cilindros.

En la escena elige en el menú:

**Área del cilindro** ▼

**EJERCICIO 3:** Dibuja el desarrollo y escribe las fórmulas siguientes.

Área de la base:

**A<sub>B</sub>** =

Área lateral:

**A<sub>L</sub>** =

Área total:

**A<sub>T</sub>** =

En la escena elige en el menú:

**Volumen del cilindro** ▼

<b>V</b> =	<b>V</b> =
------------	------------

Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.b. Conos

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

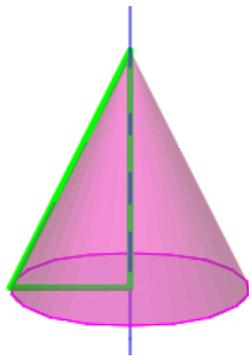
**EJERCICIO 1:** Completa las frases siguientes.

Un **cono** es un cuerpo generado por \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_) al girar alrededor de \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_). El cono es un cuerpo \_\_\_\_\_.

En la escena elige en el menú:

**Elementos del cono** ▼

**EJERCICIO 2:** Escribe en el dibujo los nombres de los elementos y contesta las preguntas.



	RESPUESTAS
¿Cuántas caras tiene un cono?	
¿Cómo es la cara de la base?	
¿Qué figura geométrica es la cara lateral?	
El punto de apoyo de la generatriz sobre el eje es el ...	
¿Cuál es el radio de un cono?	
¿Cuál es la altura de un cono?	
¿Cuál es el radio del desarrollo de la cara?	
¿Cuál es la amplitud del desarrollo de la cara lateral?	

En la escena elige en el menú:

**Desarrollo del cono** ▼

**EJERCICIO 3:** Fíjate en el desarrollo del cono y escribe las fórmulas siguientes.

Relación entre "r", "g" y "h": **h =**  Base del desarrollo lateral **B =**

En la escena elige en el menú:

**Área del cono** ▼

**EJERCICIO 4:** Dibuja el desarrollo y escribe las fórmulas siguientes.

Área lateral:

**A<sub>L</sub> =**

Área de la base:

**A<sub>B</sub> =**

Área total:

**A<sub>T</sub> =**

En la escena elige en el menú:

**Volumen del cono** ▼

**V =**  **V =**

Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.c. Esferas

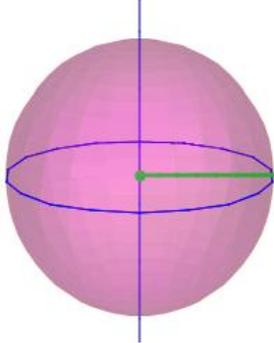
**EJERCICIO 1:** Lee la explicación teórica de este apartado y completa la frase siguiente.

Un **cono** es un cuerpo generado por \_\_\_\_\_ al girar alrededor de \_\_\_\_\_.

En la escena aparece el apartado

**Construcción de la esfera**

**EJERCICIO 2:** Escribe en el dibujo los nombres de los elementos y completa las frases:



El **radio** de una esfera es el mismo que \_\_\_\_\_  
 y coincide con la distancia \_\_\_\_\_.

Esta propiedad caracteriza a la esfera:

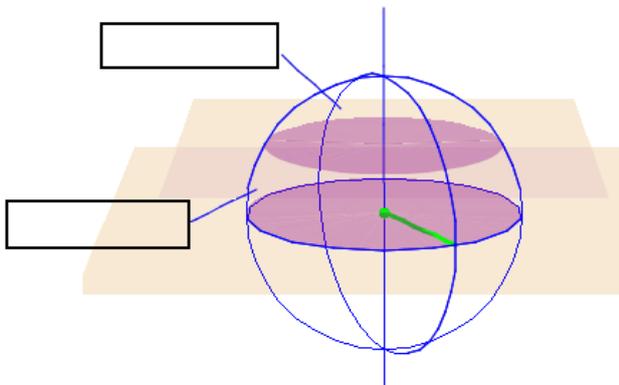
\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_.

**Las esferas no son desarrollables.** Por ese motivo la elaboración de mapas es un problema importante. Analizaremos este problema con más detalle en el último capítulo.

En la escena elige el apartado

**Partes de una esfera**

**EJERCICIO 3:** Escribe en el dibujo los nombres de los elementos y escribe las definiciones:



**Casquete esférico:**

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_.

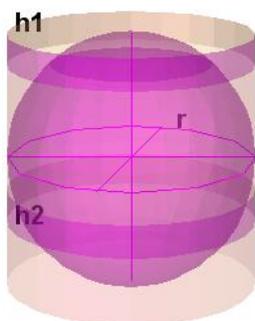
**Zona esférica:**

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_.

En la escena elige el apartado

**Área de una esfera**

**EJERCICIO 4:** Escribe en el dibujo los nombres de los elementos y escribe las definiciones:



El área de una esfera de radio  $r$  es igual \_\_\_\_\_.

Área de la esfera:  $A =$

Área del casquete:  $A_c =$

Área de la zona:  $A_z =$

En la escena elige el apartado **Volumen de una esfera**

**EJERCICIO 5:** Escribe en el dibujo los nombres de los elementos y escribe las definiciones:

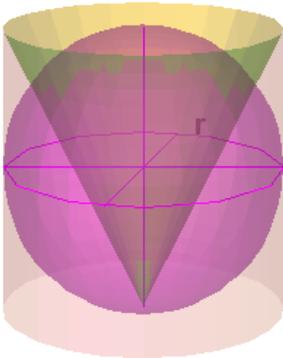
Volumen de la esfera:  $V_e =$

El volumen del cilindro circunscrito es:  $V_{ci} =$

El volumen de la esfera equivale a \_\_\_\_\_.

Como el volumen de un cono del mismo radio y altura es \_\_\_\_\_:

El volumen de una zona esférica es igual \_\_\_\_\_:



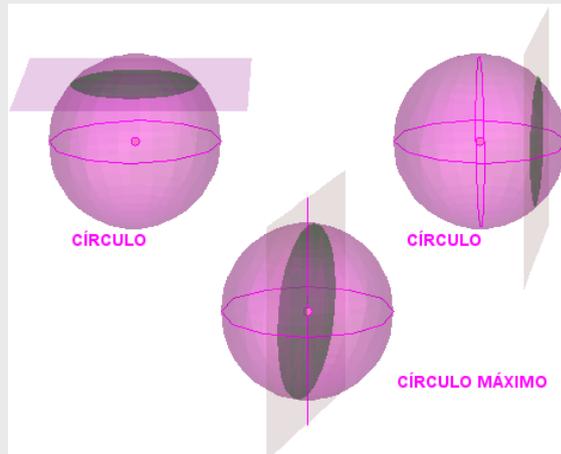
Pulsa...



→ Círculos sobre una esfera

### Círculos en la esfera

Cuando un plano corta a una esfera la intersección de ambas figuras produce siempre un círculo. Si ese círculo contiene al centro de la esfera se dice que es un CÍRCULO MÁXIMO.



Puedes mover la imagen para verla desde otra perspectiva.

También puedes modificar el control Pos para variar la posición del plano que corta a las dos primeras esferas.

**Completa:**

Las circunferencias que limitan a los círculos máximos tienen la propiedad de que:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_.

Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 4. La esfera terrestre

### 4.a. Coordenadas geográficas

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO 1:** Completa las frases siguientes.

La **Tierra** tiene una forma \_\_\_\_\_. Gira sobre una línea llamada \_\_\_\_\_.  
Los puntos en los que el eje corta a la superficie de la Tierra son los \_\_\_\_\_.  
Los planos que contienen al eje cortan a la Tierra en \_\_\_\_\_ cuyos bordes son \_\_\_\_\_ llamadas \_\_\_\_\_.  
El plano perpendicular al eje que pasa por el centro de la Tierra la corta en un \_\_\_\_\_ cuyo borde es \_\_\_\_\_. Los planos paralelos al plano del Ecuador cortan a la Tierra en círculos que ya \_\_\_\_\_. Sus bordes son los \_\_\_\_\_.

**EJERCICIO 2:** Sitúa el puntero del ratón en la palabra meridiano y después en la palabra Ecuador y contesta a las siguientes preguntas.  
¿Por qué se denominan **meridianos**?

¿Por qué se denomina **Ecuador**?

En la escena elige en el menú:  ▼

**EJERCICIO 3:** Lee el texto de la escena y contesta:

¿Qué es la **latitud**?

- ¿Cuántos paralelos pasan por cada punto de la Tierra?
- ¿En qué se mide la latitud?
- ¿Qué hay que indicar al dar la medida de la latitud?
- ¿Cuál es la latitud mínima y en dónde se alcanza?
- ¿Cuál es la latitud máxima y en dónde se alcanza?
- ¿Cuál es la latitud de Valladolid?

RESPUESTAS

En la escena elige en el menú:  ▼

**EJERCICIO 4:** Lee el texto de la escena y contesta:

¿Qué es la **longitud**?

- ¿Cuántos meridianos pasan por cada punto de la Tierra?
- ¿En qué se mide la longitud?
- ¿Qué hay que indicar al dar la medida de la longitud?
- ¿Cuál es la latitud mínima y en dónde se alcanza?
- ¿Entre qué valores varía la longitud?
- ¿Cuál es la longitud de Valladolid?

RESPUESTAS

En la escena elige en el menú:

**Coordenadas geográficas** ▼

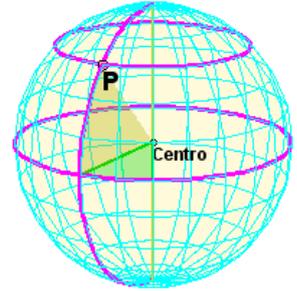
**EJERCICIO 4:**

Puedes variar la latitud y la longitud del punto y observar como varía su posición. Contesta:

¿Cómo se llama el punto del planeta situado más al Norte?

¿Y el situado más al Sur?

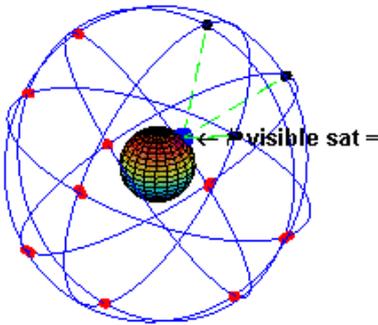
¿Cuáles son las coordenadas geográficas del punto P de la figura?



En la escena elige en el menú:

**GPS** ▼

**EJERCICIO 5:** Lee el texto de la escena y contesta:



¿Cuáles son las coordenadas geográficas de un punto?

¿Para que se utilizan las coordenadas geográficas?

¿Cómo se llama el sistema que sirve para localizar con precisión a una persona, objeto, etc.?

Si haces clic sobre la imagen, en la que puedes ver la cantidad de satélites artificiales visibles desde un punto concreto del planeta a medida que va girando, accederás a un artículo de la **wikipedia** en la que se explica detalladamente el funcionamiento y características del **GPS**.

Pulsa...



→ Vamos a practicar un poco

**EJERCICIOS**

- 1 9. Aunque ahora se usa una definición más precisa, el metro es, aproximadamente, la *diezmillonésima parte del cuadrante de un meridiano cualquiera*. Esto significa que todos los círculos máximos sobre la Tierra miden, aproximadamente, 40.000.000 de metros (en particular, todos los meridianos y el Ecuador). A partir de este dato calcula la longitud del radio de la Tierra, su superficie y su volumen.
- 2 10. Salvo el Ecuador, los paralelos no son círculos máximos y calcular su longitud requiere el uso de unas herramientas que no verás hasta el curso que viene. Sin embargo, en algunos casos concretos y con ayuda de nuestro viejo amigo, el Teorema de Pitágoras, podemos hacerlo. Calcula la longitud en km de los paralelos de latitud 30°N, 45°N y 60°N.
- 3 ¿Cuál es la ruta más corta?  
Queremos calcular la distancia entre un punto situado a 10° longitud O y 30° latitud N y otro situado a 80° longitud O y a 30° de latitud N moviéndonos solamente por el paralelo común. ¿Y si nos movemos de un punto al otro a lo largo de un círculo máximo?

Pulsa



para ir a la página siguiente.

### 4.b. Husos horarios

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado y lee el texto que aparece en la escena de la derecha.

**EJERCICIO 1:** Contesta.

¿Qué es un día?

¿Cuál es la amplitud de un huso esférico?

¿Cuántos husos esféricos hay en total?

¿Cuánto tarda el Sol en cruzar cada huso?

¿Qué es un huso horario?

Pulsa...  → Vamos a practicar un poco y a analizar los husos horarios en la realidad

### EJERCICIOS

11. Tenemos una esfera de 9 cm de radio. Calcula la superficie de un huso esférico sobre esa esfera de 59° de amplitud
12. La ciudad A tiene una longitud de 123°O y la ciudad B de 23°E. Calcula la hora que es en la ciudad B cuando en la ciudad A son las 10 horas.
- 3 Lee la explicación en el recuadro sobre: LOS HUSOS HORARIOS EN LA REALIDAD Si quieres ampliar la información al respecto de estos temas puedes pulsar en los enlaces siguientes:

Mapa de husos horarios en el mundo
Calcular la hora en cualquier parte del mundo
Reloj mundial

Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 5. Mapas

### 5.a. Proyecciones de la esfera sobre un plano

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO 1:** Completa.

Un mapa es \_\_\_\_\_.

Elige una a una en la escena de la derecha los distintos tipos de proyecciones y completa las frases en los siguientes recuadros:

En la escena elige el tipo de proyección:  ▼

Proyección \_\_\_\_\_.

**Características:**  
 Los meridianos se representan mediante \_\_\_\_\_.  
 Los paralelos se representan mediante \_\_\_\_\_.

**Ventajas:**  
 Mantiene \_\_\_\_\_.

**Inconvenientes:**  
 Disminuye \_\_\_\_\_ a medida que \_\_\_\_\_, lo que hace que la superficie de los países de \_\_\_\_\_ parezca mucho mayor de lo que es en realidad.

En la escena elige el tipo de proyección:  ▼

Proyección \_\_\_\_\_.

**Características:**  
 Los meridianos se representan mediante \_\_\_\_\_.  
 Los paralelos se representan mediante \_\_\_\_\_.

**Ventajas:**  
 Conserva \_\_\_\_\_.

**Inconvenientes:**  
 No se mantiene \_\_\_\_\_.  
 Las zonas cercanas al Ecuador se ven \_\_\_\_\_ y las cercanas a los polos se ven \_\_\_\_\_.

En la escena elige el tipo de proyección:  ▼

Proyección \_\_\_\_\_.

**Características:**  
 Los meridianos se representan mediante \_\_\_\_\_.  
 Los paralelos se representan mediante \_\_\_\_\_.

**Ventajas:**  
 Es muy adecuado para representar \_\_\_\_\_.  
 Es muy preciso cerca del \_\_\_\_\_.

**Inconvenientes:**  
 Las distorsiones aumentan al \_\_\_\_\_.

En la escena elige el tipo de proyección:  ▼

Proyección \_\_\_\_\_.

**Características:**  
 El mapa es \_\_\_\_\_  
 Los meridianos se representan mediante \_\_\_\_\_.  
 Los paralelos se representan mediante \_\_\_\_\_.

**Ventajas:**  
 Es muy adecuado para representar \_\_\_\_\_.  
 Es muy preciso cerca del \_\_\_\_\_.

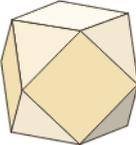
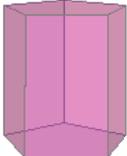
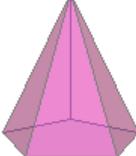
**Inconvenientes:**  
 Las distorsiones aumentan al \_\_\_\_\_.

Pulsa  para ir a la página siguiente.

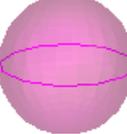


## Recuerda lo más importante – RESUMEN

### POLIEDROS

<p><b>Regulares:</b> Sus caras son _____ y en cada vértice concurre _____.</p> 	<p><b>Semirregulares:</b> Las caras son _____ y con _____.</p> 
<p><b>Prismas:</b> Las bases son _____ y los lados son _____.</p> 	<p><b>Pirámides:</b> La base es _____ y los lados son _____.</p> 
<p>Todos los poliedros son _____.</p>	

### CUERPOS DE REVOLUCIÓN

<p><b>Cilindro:</b> Generado por un _____ al girar sobre _____.</p> 	<p><b>Cono:</b> Generado por un _____ al girar sobre _____.</p> 
<p><b>Esfera:</b> Generada por _____ al girar sobre _____.</p> 	<p>El cilindro y el cono _____ desarrollables. La esfera _____ desarrollable.</p>

### ÁREAS Y VOLÚMENES

	A. lat.	A. total	Volumen
Prismas			
Pirámides			
Cilindros			
Conos			
Esferas			

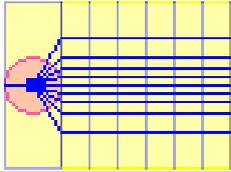
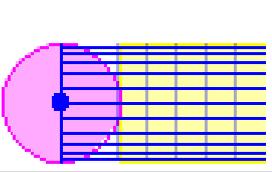
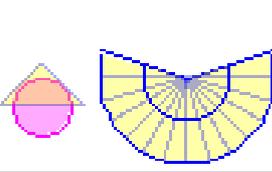
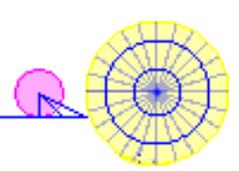
$p = \text{_____}$ ,  
 $B = \text{_____}$ ,  
 $h = \text{_____}$ ,  $a = \text{_____}$  (pirámide),  
 $r = \text{_____}$  (conos y cilindros),  
 $R = \text{_____}$  (esfera),  $g = \text{_____}$  (cono).

**Poliedros:**  
 El área de un poliedro es siempre igual a \_\_\_\_\_.  
 El volumen se calcula \_\_\_\_\_.

### LA ESFERA TERRESTRE

<p><b>Meridianos:</b> _____ Se numeran de _____ a partir del _____. El meridiano de un lugar es su _____.</p>
<p><b>Paralelos:</b> _____ Se numeran de _____ a partir del _____. El paralelo de un lugar es su _____.</p>
<p><b>Husos horarios:</b> La Tierra se divide en ___ husos geográficos de ___ de amplitud con _____ de diferencia entre ellos.</p>

### MAPAS

			
Proy. _____	Proy. _____	Proy. _____	Proy. _____

Pulsa  para ir a la página siguiente



## Para practicar

En esta unidad encontrarás ejercicios de:

- **Áreas**
- **Volúmenes.**
- **Coordenadas geográficas**

Completa los enunciados y resuélvelos. Después comprueba si lo has hecho bien.

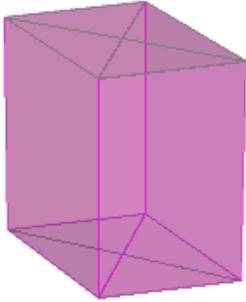
### Ejercicios de áreas

**Poliedros semirregulares** (Haz un mínimo de **cuatro** ejercicios con figuras diferentes)

<p>1. Calcular el área total de un _____ sabiendo que su arista mide _____.</p>	
<p>2. Calcular el área total de un _____ sabiendo que su arista mide _____.</p>	
<p>3. Calcular el área total de un _____ sabiendo que su arista mide _____.</p>	
<p>4. Calcular el área total de un _____ sabiendo que su arista mide _____.</p>	

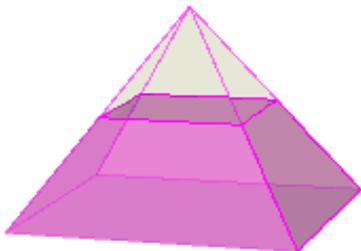
**Prismas**

5. Calcula el área total de un prisma recto sabiendo que sus bases son rombos de diagonales  $D=$ \_\_\_\_\_ y  $d=$ \_\_\_\_\_ y su altura  $h=$ \_\_\_\_\_.



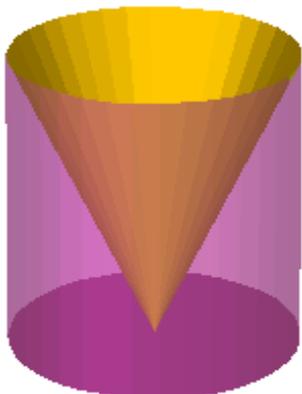
**Pirámides**

6. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide cuadrangular regular sabiendo que el lado de la base mayor es  $B=$ \_\_\_\_\_. El lado de la base menor es  $b=$ \_\_\_\_\_ y la arista lateral es  $a=$ \_\_\_\_\_.



**Cilindros y conos**

7. Calcula el área total del recipiente de la figura izquierda sabiendo que el radio de la base es  $r=$ \_\_\_\_\_ y la altura es  $h=$ \_\_\_\_\_.



**El observatorio astronómico**

8. ¿Cuántos litros de pintura se necesitan para pintar la pared exterior de un observatorio astronómico sabiendo que tiene un radio de \_\_\_\_\_, que la altura del cilindro es de \_\_\_\_\_ y que con cada litro se pueden pintar \_\_\_\_\_?



**La bola de navidad**

9. Una bola de navidad de 3cm de radio se quiere cubrir parcialmente con pan de oro de forma que la franja cubierta tenga una amplitud de 60° desde el centro de la bola. Calcula la superficie de la bola que se pintará.

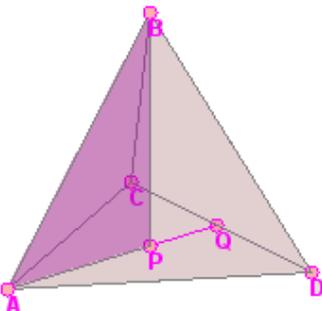


**Ejercicios de volúmenes**

**Tetraedro regular**

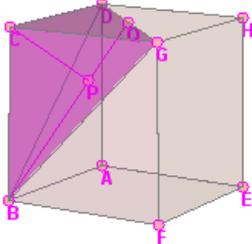
10. Calcula el volumen del tetraedro regular de la figura sabiendo que su arista  $AB=10\text{cm}$ .

(El triángulo APB te ayudará)



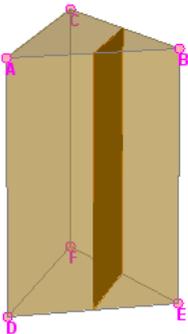
**Cubo y tetraedro**

11. El cubo de la figura tiene 10 cm de arista. Calcula el volumen del tetraedro de vértices BCDG y comprueba que es la sexta parte del volumen del cubo.



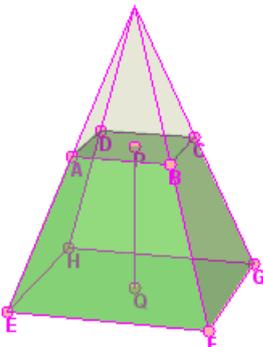
**Prisma truncado**

12. Calcula el volumen de los dos prismas en que queda dividido el prisma regular triangular de la figura al ser cortado por un plano perpendicular a las bases que pasa por los puntos medios de las aristas.  $AD=20m$  y  $AC=15m$ .



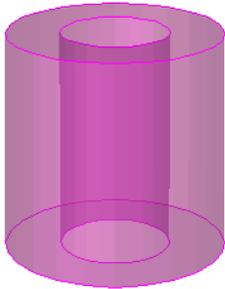
**Pirámide truncada**

13. Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular sabiendo que la arista de la base mayor es  $EF=20cm$ , la arista de la base menor es  $AB=8cm$  y la altura del tronco es  $PQ=15cm$ .



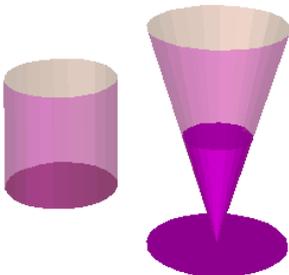
**Cilindros**

14. Calcula el volumen de la pieza de arriba sabiendo que el diámetro de la circunferencia exterior es de 10cm, el diámetro de la circunferencia interior es de 5 cm y la altura es de 10 cm.



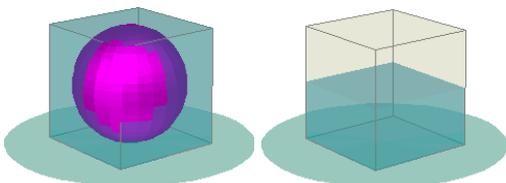
**Cilindro y como truncado**

15. Las figuras representan un vaso cilíndrico de 6cm de diámetro y 8 cm de altura y una copa con forma de tronco de cono con 7cm de diámetro mayor, 5 cm de diámetro menor y 8 cm de generatriz. ¿Cuál tiene más capacidad?



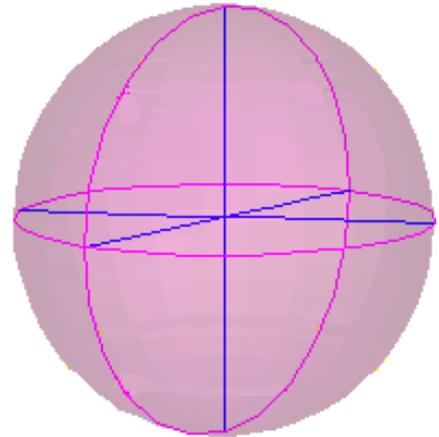
**Cubo y esfera**

16. Un recipiente cúbico de 10 cm de arista está lleno de agua. Se introduce en él con cuidado una bola de cristal de 5 cm de radio y luego se saca con cuidado. Calcula el volumen del agua que se ha derramado y la altura a la que queda el agua cuando se saca la bola.



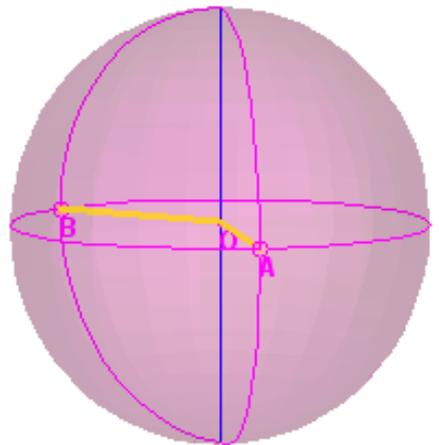
**Ejercicios de coordenadas geográficas**  
**Distancias sobre meridianos**

17. Calcula la distancia entre dos puntos de la Tierra, A y B, situados en el mismo meridiano, si la latitud de A es de \_\_\_\_\_ y la de B es de \_\_\_\_\_.



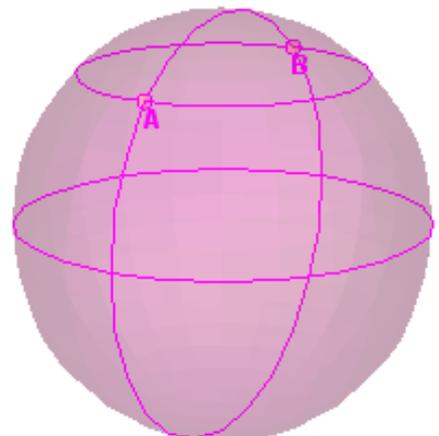
**Husos horarios**

18. El punto A se encuentra en el meridiano \_\_\_\_ y el punto B en el meridiano \_\_\_\_\_. Si en A son las \_\_\_\_ horas, ¿qué hora es en B?



**El camino más corto**

19. Los puntos A y B se encuentran sobre el paralelo 45°N y sus longitudes se diferencian en 180°. Un avión tiene que ir desde A hasta B ¿qué ruta es más corta: siguiendo el paralelo o siguiendo el meridiano por el Polo Norte?.



Pulsa  para ir a la página siguiente.

## Autoevaluación



**Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.**

1 Indica qué poliedro se obtiene al truncar las aristas de un \_\_\_\_\_ por la mitad e indica el número de caras aristas y vértices que tiene.

Se obtiene un: \_\_\_\_\_  
Caras= \_\_\_\_ Aristas= \_\_\_\_ Vértices = \_\_\_\_

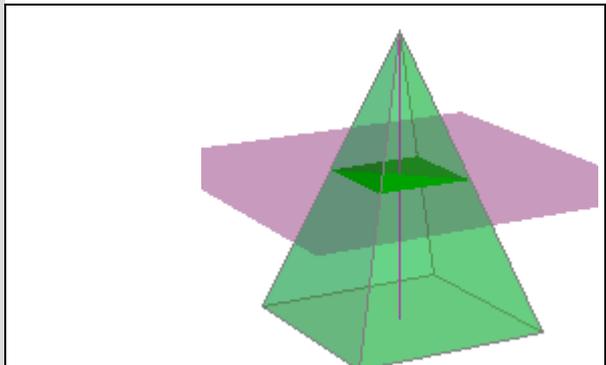
2 Los catetos de un triángulo rectángulo miden \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_. Averigua qué cono tiene mayor área total: el que se obtiene haciendo girar el triángulo alrededor del primer cateto o el que se obtiene al girar sobre el segundo.

3 Calcula el área total del poliedro semirregular de la imagen sabiendo que su arista es a. (Expresa el resultado en función de a)

4 Calcula el área del triángulo de la figura sabiendo que la arista del cubo es a. (Expresa el resultado en función de a)

5 La "zona tropical" de la Tierra está situada, aproximadamente, entre los paralelos 30° N y 30° S. ¿Qué porcentaje de la superficie de la Tierra está situada en la zona tropical?

6 Una pirámide de base cuadrada se corta con un plano paralelo a la base por la mitad de la altura de la pirámide, obteniendo una pirámide más pequeña y un tronco de pirámide. ¿Cuántas veces es más grande el volumen del tronco con respecto al volumen de la pirámide pequeña?



7) Se corta una semiesfera de radio  $R$  con un plano paralelo a la base de la semiesfera, a una altura de  $\frac{2}{3}$  del radio. Halla el volumen de la mayor de las dos zonas en que queda dividida. (Expresa el resultado en función de  $R$ )

8) Una milla náutica es la distancia entre dos puntos situados sobre el Ecuador con una diferencia de longitudes de  $1'$  ¿A cuántos km equivale una milla náutica si el radio de la Tierra es de 6366 km?

9) Boston está en el meridiano  $71^\circ$  O y Frankfurt en el meridiano  $9^\circ$  E. Un avión sale de Frankfurt a las 23 horas y tarda 8 horas en llegar a Boston. ¿Qué hora es en Boston cuando llega?

10) Asocia los distintos tipos de mapa con sus características.

a)	Mapa de Mercator	1)	Los paralelos son círculos y los meridianos radios
b)	Mapa de Gail Peters	2)	Los paralelos y los meridianos son rectas perpendiculares y los paralelos están más separados cuanto más lejos del Ecuador
c)	Mapa Azimutal	3)	Los paralelos son arcos de circunferencia y los meridianos son rectas convergentes
d)	Mapa cónico	4)	Los paralelos y los meridianos son rectas perpendiculares y los paralelos están más juntos cuanto más lejos del Ecuador

Solución: a)  b)  c)  d)



## Funciones y gráficas

### Contenidos

1. Relaciones funcionales
  - Concepto y tabla de valores
  - Gráfica de una función
  - Imagen y antiimagen
  - Expresión algebraica
  - Relaciones no funcionales
2. Características de una función
  - Dominio y recorrido
  - Continuidad
  - Puntos de corte con los ejes
  - Crecimiento y decrecimiento
  - Máximos y mínimos
  - Periodicidad

### Objetivos

- Reconocer si una relación entre dos variables es una función o no.
- Distinguir la variable independiente y la dependiente.
- Expresar una función utilizando una tabla de valores, una gráfica o una fórmula.
- Determinar el dominio y el recorrido de una función.
- Interpretar algunas características de la gráfica de una función: el crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, la periodicidad...
- Representar y analizar gráficas de funciones extraídas de distintas situaciones cotidianas.

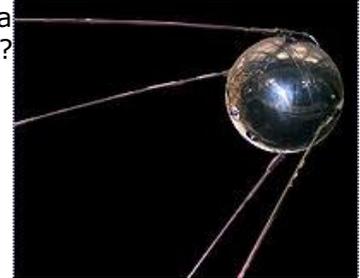


**Antes de empezar**

Para empezar se propone un reto, ORBITANDO LA TIERRA, y una investigación sobre una de las leyes de Kepler.

¿Cómo varía la distancia en línea recta entre estos dos satélites a medida que pasa el tiempo?

Pulsa  para ir viendo cómo se resuelve la pregunta.



Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

**1. Relaciones funcionales**

**1.a. Concepto y tabla de valores**

Lee el texto de la pantalla.

**Contesta:**

¿Qué es una función? \_\_\_\_\_

¿Cómo se denomina también a la *causa*? \_\_\_\_\_

¿Qué variable depende de cuál? \_\_\_\_\_

**En la escena** tienes una tabla que relaciona longitud de lado y área del polígono. Mueve el vértice indicado del polígono para que mida cada uno de los valores que se indican en la tabla y anota en el lugar correspondiente el valor de ésta. Complétala también aquí:

Longitud del lado							
Área del polígono							

Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena

**EJERCICIOS de Refuerzo**

**1 LAS REBAJAS**

Si en un producto nos ofrecen un descuento del 10 %, pagaremos 90% del precio original.

El precio rebajado (PR) es función del precio inicial (PI).  $PR = f(PI)$

Completa esta tabla cambiando el control PI.  $PR = 0,90 \cdot PI$

PI	26	28	36	46
PR				

Realiza la misma actividad cambiando el precio inicial y el porcentaje de descuento.

**2 DENSIDAD DE LOS MATERIALES**

A una presión y temperatura dada el cociente entre el peso (P) de un material y el volumen (V) que ocupa es constante. Diremos, entonces, que el peso es función del volumen y lo representaremos así:  $P = f(V)$

(La constante que relaciona esas dos magnitudes es la densidad, d)     $P = d \cdot V$

Calcula el valor de P siendo  $d=0,8$

V	2,8	3,9	5	8,3
P				

Realiza la misma actividad cambiando el valor del volumen y la densidad.

**3 INTERESES BANCARIOS**

Un banco ofrece un depósito al 5%. En la letra pequeña se dice que hay una comisión fija de apertura de 20€.

Si llamamos C la cantidad invertida e I a los intereses producidos, decimos que I es función de C y lo escribimos así:  $I = f(C)$      $I = 0,05 \cdot C - 20$

Calcula el valor de I con el valor del depósito dado.

C	533	626	709	804
I				

Realiza la misma actividad cambiando el tipo de interés y el capital.

**4 ÁREA DE UN CUADRADO**

El área, A, de un cuadrado es función de la longitud de su lado, l. Lo escribiremos así:

$A = f(l)$      $A = l \cdot l = l^2$

Calcula el valor de A con los distintos valores para l.

l	0,1	0,4	1	1,5
A				

**5 ALTURA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO**

La altura de un triángulo rectángulo es función del ángulo opuesto:  $h = f(a)$

Modifica el valor del ángulo y completa la tabla:

a	5	13	15	16
h				

Pulsa para ir a la página siguiente.

### 1.b. Gráfica de una función

Lee el texto de la pantalla y explica paso a paso qué hacer para obtener la gráfica de una función:

1)

2)

3)

Piensa sobre la situación planteada, CAPTACIÓN DE AGUAS.

Cómo construir la gráfica de la longitud total de las tuberías en función de la distancia de la estación captadora a un punto fijo del río.



Pulsa  para ir viendo cómo se resuelve la cuestión.

**En la escena** tienes una tabla que relaciona la distancia al puente de la estación captadora (C) y la longitud total de las tuberías. Mueve el punto C para que mida cada uno de los valores que se indican en la tabla y anota en el lugar correspondiente el valor de la longitud total. Complétala también aquí:

Distancia al puente (km.)							
Longitud de las tuberías (km.)							

Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena

### EJERCICIOS de Refuerzo

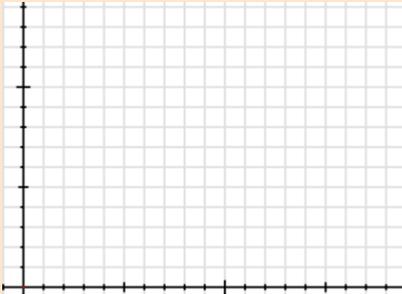
Dibuja los puntos de las tablas de los *Ejercicios de Refuerzo* del apartado anterior y representa las gráficas de las funciones correspondientes.

**1** LAS REBAJAS



PI	PR

**2 DENSIDAD DE LOS MATERIALES**



V	P

**3 INTERESES BANCARIOS**



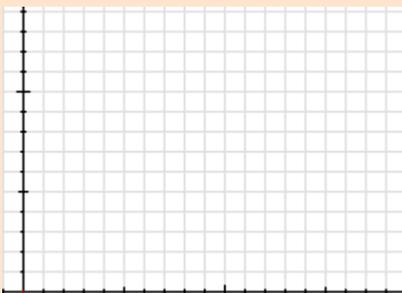
C	I

**4 ÁREA DE UN CUADRADO**



L	A

**5 ALTURA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO**



a	h

Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.c. Imagen y antiimagen

Lee el texto de la pantalla.

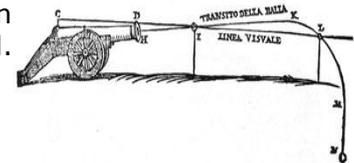
**Contesta:**

¿Qué es la antiimagen? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la imagen? \_\_\_\_\_

Piensa sobre la situación planteada, BALA DE CAÑÓN.

Cómo construir la gráfica del alcance de la bala y ángulo del cañón con la horizontal.



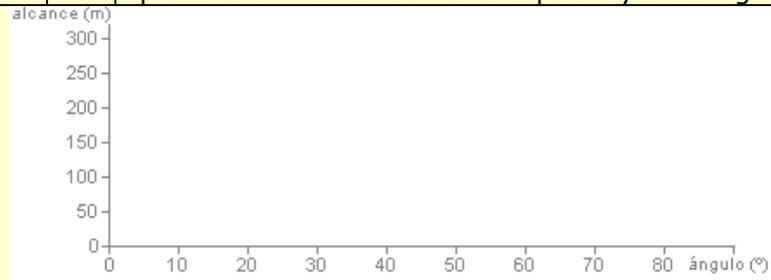
Pulsa para ir viendo cómo se resuelve la cuestión.

**En la escena** tienes una gráfica que relaciona el ángulo del cañón con la distancia a la que llega la bala. Aparece un cañón que debes disparar y observar el alcance en función del ángulo. Completa los datos del primer disparo:

$f( ) =$   es decir:  
 es la imagen  o bien,  
 es una antiimagen de

Pulsa Para hacer el segundo disparo  
 Tienes que hacer un mínimo de 6 disparos para poder ver la gráfica.  
 Anota en la tabla siguiente los ángulos y las distancias que vas alcanzando en tus disparos y haz la gráfica:

Ángulo	Distancia

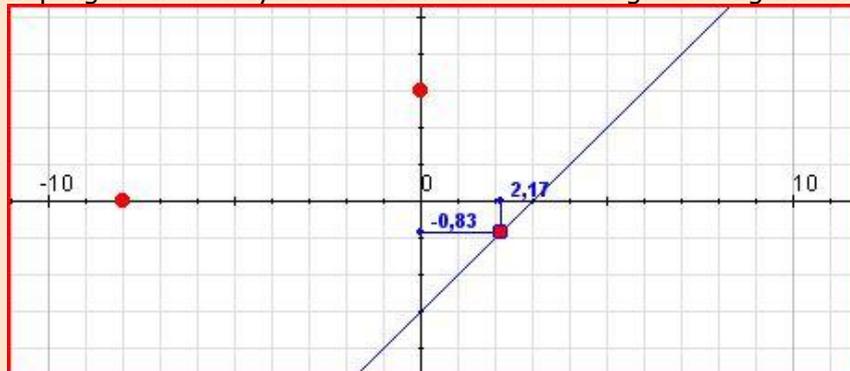


Después... Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena

### EJERCICIOS de Refuerzo

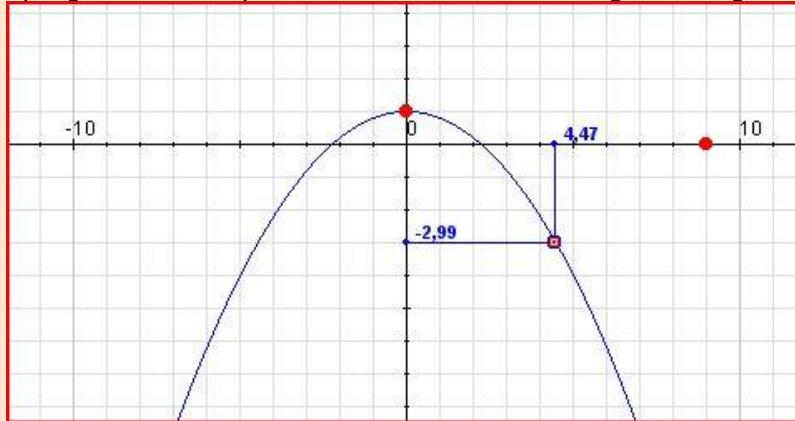
1) Contesta a las preguntas con ayuda de la escena sobre la gráfica siguiente:



- a) Calcula la imagen de -8, es decir,  $f(-8)$ .
- b) Calcula la antiimagen de 3, es decir,  $f(x)=3$ .

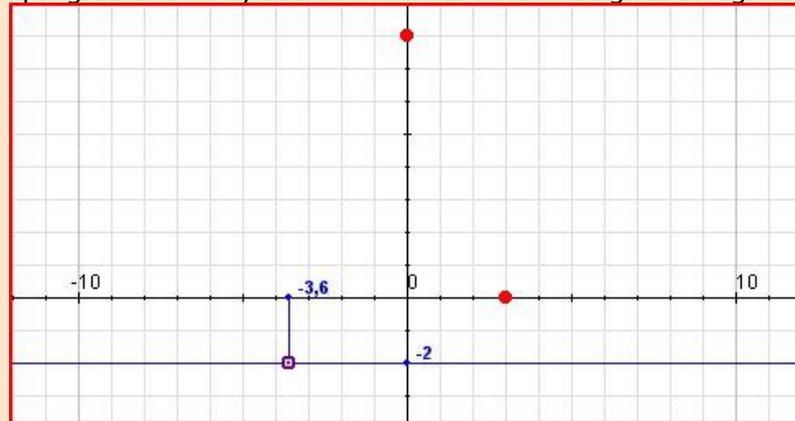
### EJERCICIOS de Refuerzo

2) Contesta a las preguntas con ayuda de la escena sobre la gráfica siguiente:



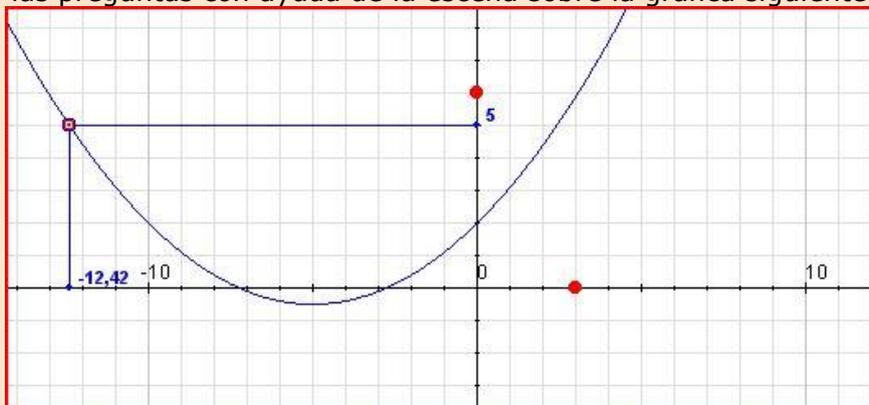
- a) Calcula la imagen de 9, es decir,  $f(9)$ .
- b) Calcula la antiimagen de 1, es decir,  $f(x)=1$ .

3) Contesta a las preguntas con ayuda de la escena sobre la gráfica siguiente:



- a) Calcula la imagen de 3, es decir,  $f(3)$ .
- b) Calcula la antiimagen de 8, es decir,  $f(x)=8$ .

4) Contesta a las preguntas con ayuda de la escena sobre la gráfica siguiente:



- a) Calcula la imagen de 3, es decir,  $f(3)$ .
- b) Calcula la antiimagen de 6, es decir,  $f(x)=6$ .

Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.d. Expresión algebraica

Lee el texto de la pantalla.

**Contesta:**

¿Qué es una expresión algebraica? \_\_\_\_\_

¿Cómo construyes una tabla a partir de una expresión algebraica? \_\_\_\_\_

Lee la situación planteada en: **COLONIZACIÓN DEL OESTE.**



Pulsa  para ir viendo cómo se resuelve la cuestión.

Empezamos eligiendo la variable independiente, la longitud **a** y la variable dependiente: **Área**.

Calculamos el resultado (Área) que se obtiene para **a=5 hm**:  $f(5) = \underline{\hspace{2cm}}$  hm<sup>2</sup>



En la siguiente escena puedes arrastrar la esquina del rectángulo y ver como se obtienen diferentes áreas dependiendo de la longitud del lado a.



En la escena siguiente vas a obtener la expresión algebraica para calcular el área.

Llamamos "x" al lado a y obtenemos la expresión:  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



Una vez que tenemos la expresión de f(x) es más fácil calcular imágenes y antiimágenes.



Ejemplo: Para x=9, ¿cuánto vale f(x)? \_\_\_\_\_

Para f(x) = 88, ¿cuánto vale x? \_\_\_\_\_

¿De cuántas formas se puede obtener el área de 88 hm<sup>2</sup>? \_\_\_\_\_



Completa la tabla y haz la gráfica.

x	f(x)

¿De qué tipo es esta función?

\_\_\_\_\_

¿Cómo se llama la curva obtenida como gráfica?

\_\_\_\_\_

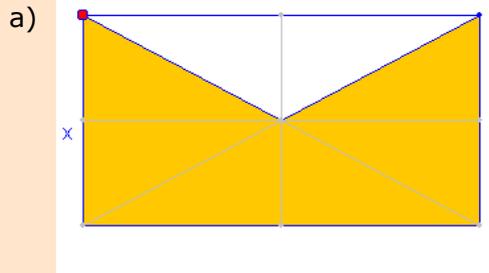


Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

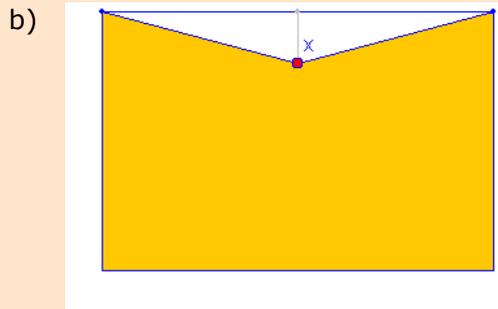
Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena

### EJERCICIOS de Refuerzo

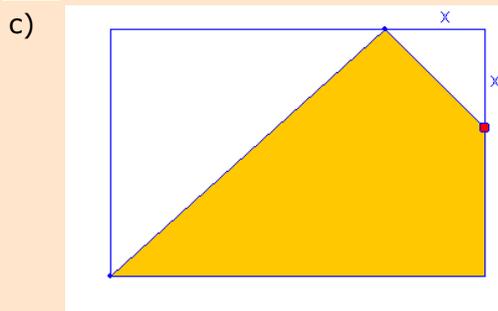
1) Completa los datos que faltan y escribe el área de la parte coloreada en función de  $x$ :



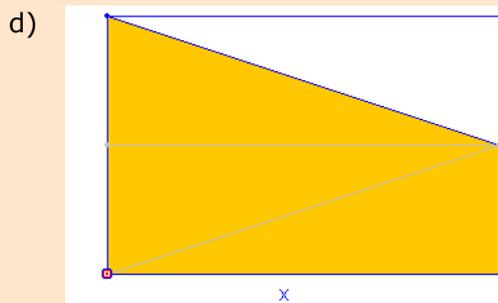
$A(x) =$



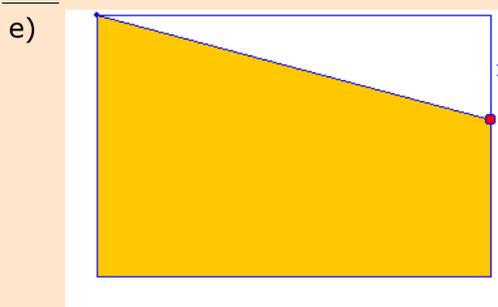
$A(x) =$



$A(x) =$



$A(x) =$



$A(x) =$

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.e. Relaciones que no son funcionales

Lee el texto de la pantalla.

**Contesta:**

¿Qué diferencia hay entre una relación funcional y una no funcional? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Por qué las relaciones estadísticas no son relaciones funcionales? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Piensa sobre la situación planteada, PESO Y ALTURA.

El peso de una persona, ¿es función de su altura?

Pulsa  para ir viendo cómo se resuelve la cuestión.



**En la escena** se muestra una gráfica con puntos y aclaraciones sobre los mismos.

**Contesta:**

¿Qué representa cada punto de esa gráfica? \_\_\_\_\_

Busca una altura "x" para la que no haya ningún peso correspondiente.

Busca una altura "x" para la que haya más de un peso correspondiente.

Esa gráfica, ¿corresponde a una relación funcional? \_\_\_\_ ¿Por qué?

¿Qué tipo de relación es? \_\_\_\_\_

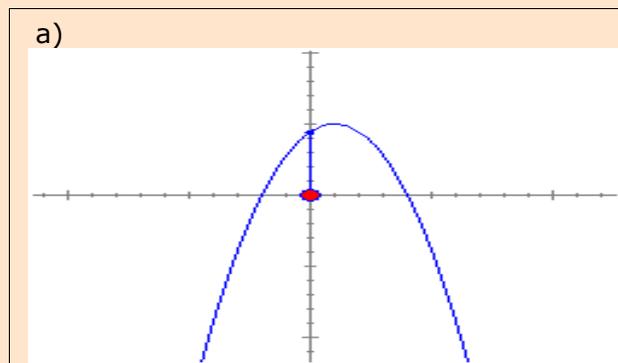
Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de esa escena

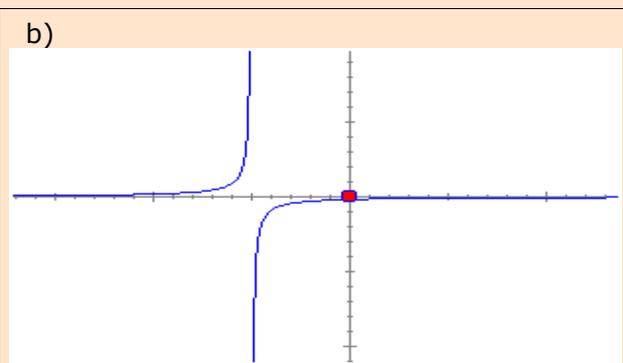
### EJERCICIOS de Refuerzo

- 1) Razona si la relación entre las magnitudes de las siguientes situaciones es funcional o no:
  - a) ¿La altura de una persona es función de su edad?
  - b) ¿El tiempo empleado en realizar un trayecto es función de la velocidad a la que se ha realizado?
  - c) ¿El coste de la factura del agua es función del volumen consumido?
  - d) ¿El coste de la factura del agua es función del número de grifos que se tengan en casa?
  - e) A presión constante, ¿el volumen de un gas es función de su temperatura?
  - f) ¿El número de accidentes de tráfico es función del número de vehículos que circulan?
  - g) ¿Los intereses bancarios son función del número de días que dure una inversión a plazo fijo?

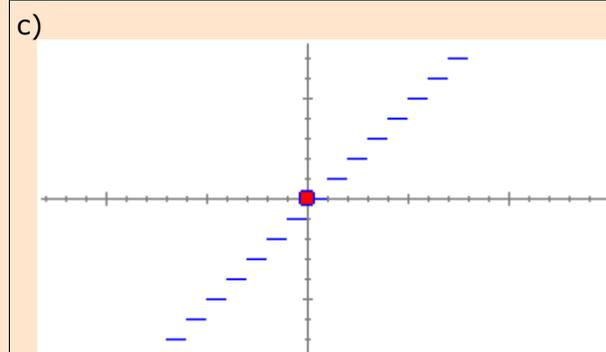
2) Razona si la relación entre las magnitudes de las siguientes gráficas es funcional o no:



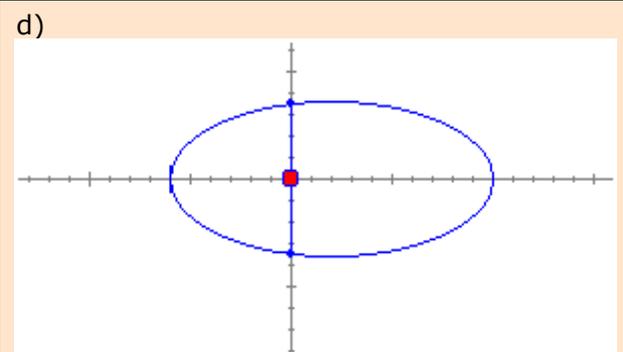
Respuesta:



Respuesta:



Respuesta:

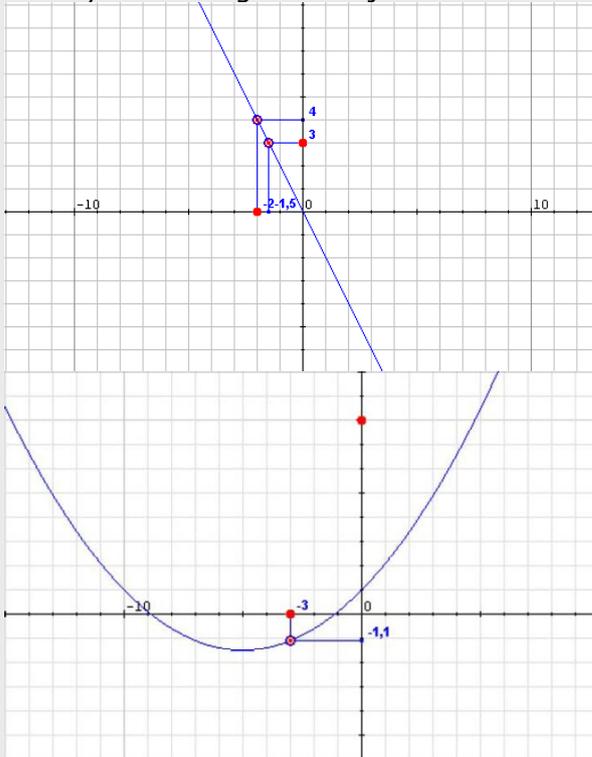


Respuesta:

### EJERCICIOS

- Las rebajas: si en un producto nos ofrecen un descuento del 10% pagaremos el 90% del precio original. Entonces, el precio rebajado (PR) es función del precio inicial (PI) a través de la expresión  $PR = f(PI) = 0,9 \cdot PI$ . Construye una tabla de valores para esta función (por ejemplo con cuatro valores) y dibuja la gráfica correspondiente

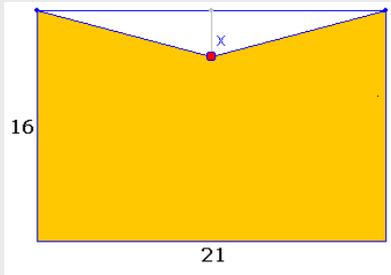
2. Con ayuda de la gráfica adjunta calcula las imágenes y antiimágenes pedidas.



a) La imagen de -3, la antiimagen de 3.

b) La imagen de -3, la antiimagen de 8 y de -4

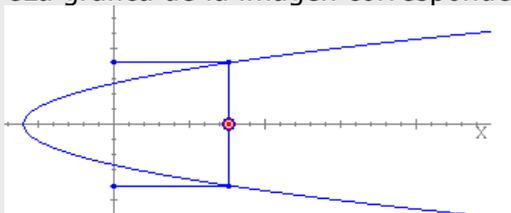
3. Escribe en función de x el área de la parte coloreada de la figura



4. Indica de forma razonada si las respuestas a las siguientes preguntas es afirmativa o negativa.

- a) ¿El coste de la factura del agua es función del volumen consumido?
- b) ¿El número de accidentes de tráfico es función del número de vehículos que circulan?
- c) A presión constante, ¿el volumen de un gas es función de su temperatura?.

5. ¿La gráfica de la imagen corresponde a una función?



Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2. Características de una función

### 2.a. Dominio y recorrido

Lee el texto de la pantalla.

**Contesta:**

¿Qué es el dominio de una función? \_\_\_\_\_

¿Qué es el recorrido o imagen de una función? \_\_\_\_\_

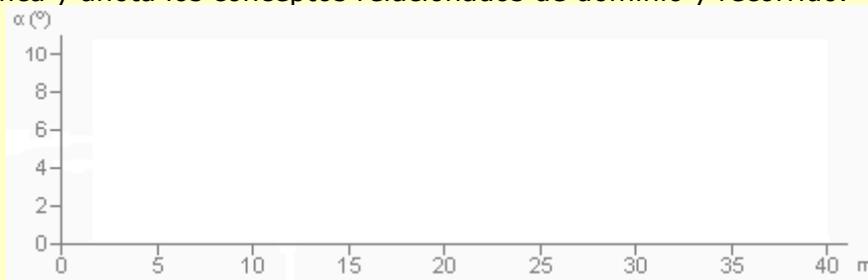
Piensa sobre la situación planteada, JUGADOR DE FÚTBOL SALA.

Cómo es la gráfica que da el ángulo bajo el que ve la portería contraria en función de la distancia que hay desde la línea de fondo de su campo.



Pulsa  para ir viendo cómo se resuelve la cuestión.

**En la escena** se muestran un dibujo y una gráfica con los valores que se pueden dar. Haz el dibujo de la gráfica y anota los conceptos relacionados de dominio y recorrido.



Mueve el jugador en la escena hacia delante y hacia atrás y observa como varía el ángulo.

**Contesta:**

¿Cuál es la variable independiente  $x$ ? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la variable dependiente  $y$ ? \_\_\_\_\_

¿Entre qué valores varía la variable independiente? \_\_\_\_\_

¿Entre qué valores varía la variable dependiente? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el **DOMINIO** de la función? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el **RECORRIDO** o **IMAGEN** de la función? \_\_\_\_\_

Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

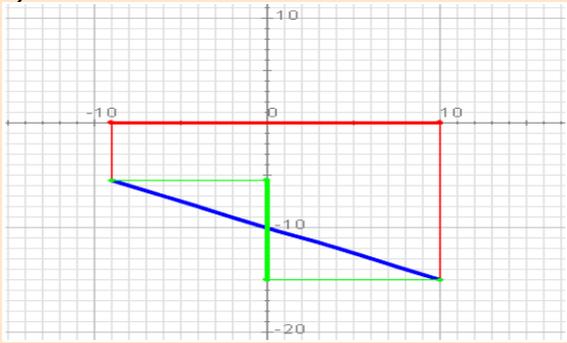
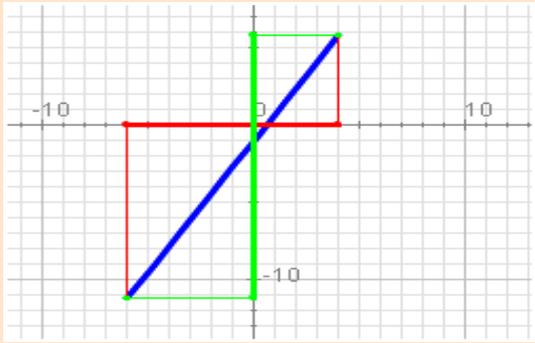
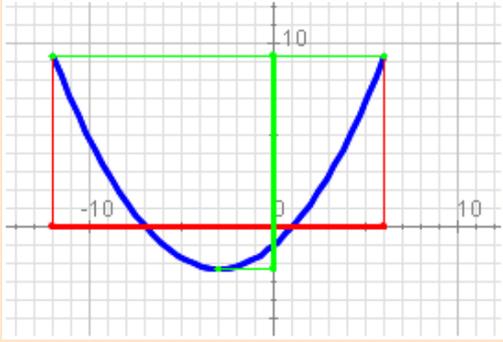
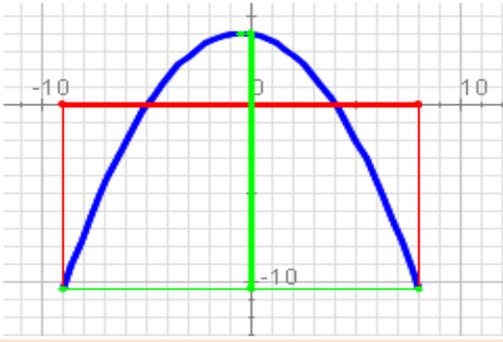
Los siguientes ejercicios son similares a los de la escena

### EJERCICIOS de Refuerzo

1) Determina de forma razonada el dominio de las funciones de expresión las siguientes

- a)  $f(x) = 0,8x + 3$
- b)  $f(x) = \sqrt{x + 8}$
- c)  $f(x) = 2,1x^2 - 8,4x - 126$
- d)  $f(x) = \frac{1,7x + 3}{(x - 6)(x - 8)}$

2) Determina el dominio y el recorrido de las funciones cuya gráfica (azul) ves abajo:

<p>a)</p>  <p>Dominio:</p> <p>Recorrido:</p>	<p>b)</p>  <p>Dominio:</p> <p>Recorrido:</p>
<p>c)</p>  <p>Dominio:</p> <p>Recorrido:</p>	<p>d)</p>  <p>Dominio:</p> <p>Recorrido:</p>

Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2.b. Continuidad

Lee el texto de la pantalla y contesta:

¿Cómo puedes saber cuando una función es continua? \_\_\_\_\_

¿Cómo se llaman los puntos donde la gráfica tiene saltos? \_\_\_\_\_

Piensa sobre la situación planteada, TAXÍMETRO.

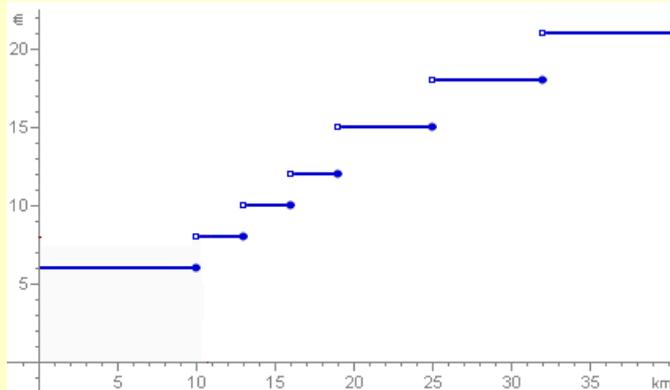
Estudiamos el precio de un trayecto en taxi realizado en una cierta zona rural en función de la distancia recorrida.



Pulsa  para ir viendo cómo se resuelve la cuestión.

**En la escena** se muestra una gráfica con los valores que se pueden dar, y una serie de preguntas que debes contestar.

Observa la gráfica y responde las preguntas para que te sirvan como ejemplo.



¿Cuántos euros supone la bajada de bandera? \_\_\_\_\_

¿Cuántos kilómetros se pueden recorrer por ese importe? \_\_\_\_\_

Si el recorrido es de "un poco más" de \_\_\_\_ km el coste del trayecto es de \_\_\_\_\_

Si el recorrido es exactamente de \_\_\_\_ el precio es de \_\_\_\_\_

La imagen de  $x = \underline{\hspace{1cm}}$  es  $y = \underline{\hspace{1cm}}$

Completa la tabla:

x (km. Recorridos)							
y (precio en €)							

Quando  $x$  tiende a \_\_\_\_ por la izquierda, las imágenes tienden a \_\_\_\_

Quando  $x$  tiende a \_\_\_\_ por la derecha, las imágenes tienden a \_\_\_\_

Por lo tanto:

El límite cuando  $x$  tiende a \_\_\_\_ por la izquierda es \_\_\_\_

El límite cuando  $x$  tiende a \_\_\_\_ por la derecha es \_\_\_\_

La imagen de  $x = \underline{\hspace{1cm}}$  es \_\_\_\_

Si la función fuese continua en \_\_\_\_ esas tres cantidades sería \_\_\_\_\_

La función tiene una \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_) en  $x = \underline{\hspace{1cm}}$  :

Su gráfica no se puede dibujar sin \_\_\_\_\_ en \_\_\_\_\_.

Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de la escena

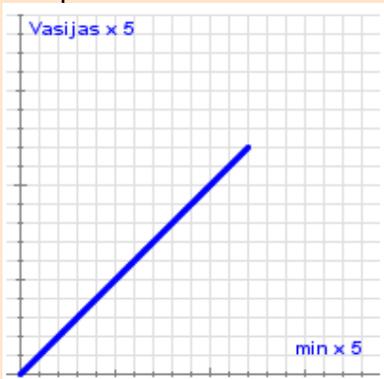
### EJERCICIOS de Refuerzo

1) Un reloj de agua tiene el funcionamiento como sigue:

A la derecha hay 60 vasijas que se van llenando de agua poco a poco. Cuando se llena la que hace el piso 60 se vacía de golpe toda la columna y se llena una de las bolas en una columna izquierda (que tiene un total de 12 bolas). La columna izquierda representa las horas y la columna derecha los minutos.

Indica si la función que relaciona la altura de la columna derecha con el tiempo es continua. Analiza la situación sólo en el intervalo de tiempo que transcurre desde que está vacía hasta que se llena.

a) X= tiempo en minutos.



b) X= tiempo en horas.

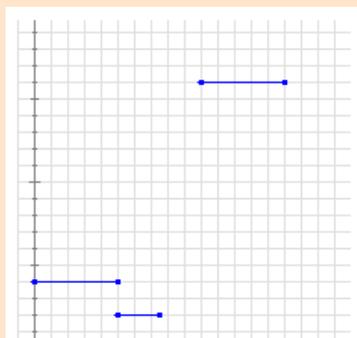


2) Juan tiene hoy una excursión en el colegio. Como vive lejos suele ir en bicicleta. Nada más llegar al colegio, salen todos los alumnos andando hasta la estación de trenes y allí esperan un rato a que llegue el tren. Suben al tren y por fin llegan al destino.

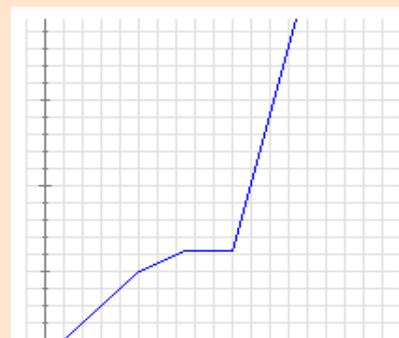
Abajo puedes ver dos gráficas: una representa la distancia que va recorriendo Juan desde su casa con respecto al tiempo transcurrido y otra representa la velocidad a la que se desplaza en cada instante, también en función del tiempo transcurrido.

Indica de forma razonada qué gráfica corresponde a cada una de las dos situaciones e indica en cada caso si la función representada es o no continua.

a)



b)



Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2.c. Puntos de cortes con los ejes

Lee el texto de la pantalla.

**Contesta:**

¿Qué coordenadas tiene un punto sobre el eje de ordenadas? \_\_\_\_\_

¿Qué coordenadas tiene un punto sobre el eje de abscisas? \_\_\_\_\_

Completa:



- Para encontrar  $y_0$  se hace \_\_\_\_\_ en la expresión de la función y se calcula \_\_\_\_\_.
- Para hallar  $x_0$  se sustituye \_\_\_\_\_ por \_\_\_\_\_ en la expresión de la función y se aisla \_\_\_\_\_.

Piensa sobre la situación planteada, TEMPERATURA.

Estudiamos la gráfica de la temperatura en función de la hora del día.



Pulsa para ir viendo cómo se resuelve la cuestión.

**En la escena** se muestra una gráfica de la temperatura y la hora del día.

Observa la gráfica.

Arrastra el punto que se indica sobre ella para observar las distintas temperaturas en función de las horas. Hazlo hasta que aparezca la flecha para avanzar.

**Contesta:**

¿Cuántos puntos de corte puede haber con el eje de ordenadas? \_\_\_\_\_

¿Y con el de abscisas? \_\_\_\_\_

Después... Pulsa el botón para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de la escena

### EJERCICIOS de Refuerzo

- 1)** Determina las coordenadas de los puntos de corte con los ejes de la funciones siguientes:
- a)  $f(x) = 2 - x$
  - b)  $f(x) = -3$
  - c)  $f(x) = -2x - 1$
  - d)  $f(x) = -2x$

Quando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

## 2.d. Crecimiento y decrecimiento

Lee el texto de la pantalla.

**Contesta:**

¿Qué ocurre alrededor de una función creciente en un punto? \_\_\_\_\_

¿Qué ocurre alrededor de una función decreciente en un punto? \_\_\_\_\_

¿Cuándo se dice que una función es monótona? \_\_\_\_\_

¿Cuándo una función es constante? \_\_\_\_\_

Piensa sobre la situación planteada, TEMPERATURA DE UN HORNO.

Estudiamos la gráfica de la temperatura del horno en función del tiempo.



Pulsa  para ir viendo cómo se resuelve la cuestión.

**En la escena** se muestra una gráfica de la temperatura y el tiempo.

Observa la gráfica.

Arrastra el punto que se indica sobre ella para observar las distintas temperaturas en función de los minutos.

**Contesta:**

¿Cómo es la función hasta el minuto 10? \_\_\_\_\_

¿Cómo es la función entre el minuto 10 y el 20? \_\_\_\_\_

¿Cómo es la función entre el minuto 20 y el 36? \_\_\_\_\_

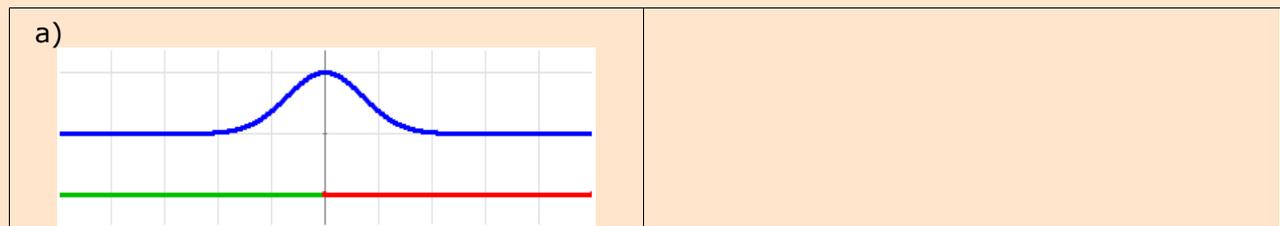
¿Cómo es la función a partir del minuto 36? \_\_\_\_\_

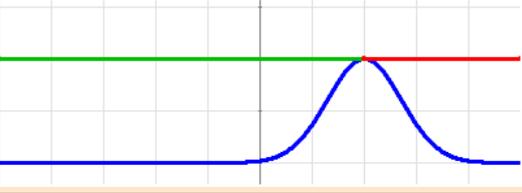
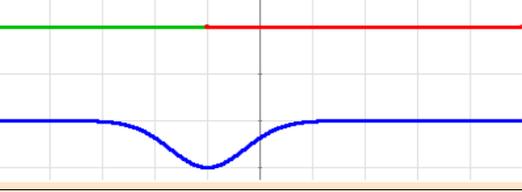
Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de la escena

**EJERCICIOS de Refuerzo**

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones definidas en el intervalo  $(-5,5)$  cuya gráfica es cada una de las siguientes dibujadas en color azul:



<p>b)</p> 	
<p>c)</p> 	
<p>d)</p> 	

Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 2.e. Máximos y mínimos

Lee el texto de la pantalla.

**Contesta:**

¿Qué es un máximo absoluto? \_\_\_\_\_

¿Qué es un mínimo absoluto? \_\_\_\_\_

¿Qué es un mínimo relativo? \_\_\_\_\_

¿Qué es un máximo relativo? \_\_\_\_\_

¿Cuántos máximos o mínimos puede haber? \_\_\_\_\_

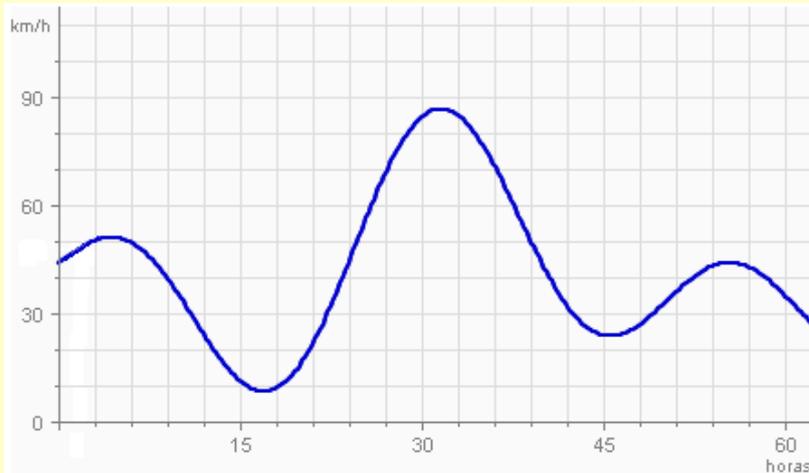
Piensa sobre la situación planteada, VELOCIDAD DEL VIENTO.

Estudiamos la gráfica de la velocidad del tiempo en función del tiempo.

Pulsa  para ir viendo cómo se resuelve la cuestión.



**En la escena** se muestra una gráfica de la velocidad y el tiempo. Completa la gráfica indicando donde es creciente donde decreciente y señalando los máximos y mínimos locales y cuáles de ellos son los absolutos.



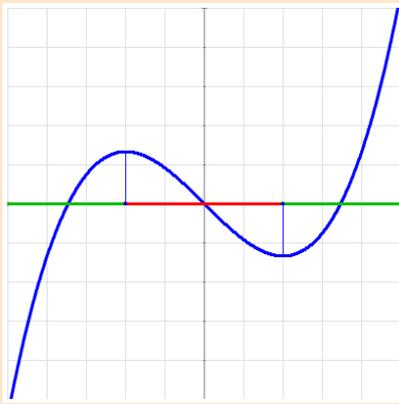
Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de la escena

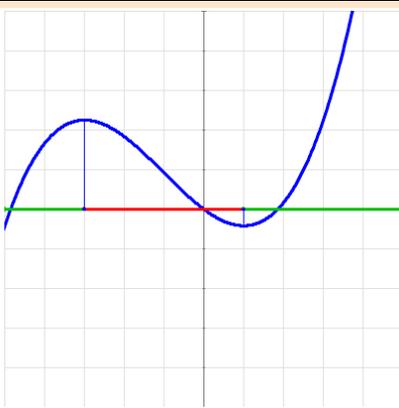
### EJERCICIOS de Refuerzo

Determina los extremos relativos de las funciones definidas en el intervalo  $(-5,5)$  cuya gráfica es cada una de las siguientes dibujadas en color azul:

a)



b)



Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2.f. Periodicidad

Lee el texto de la pantalla.

**Contesta:**

¿Cuándo una función es periódica? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿A qué se llama periodo? \_\_\_\_\_

Piensa sobre la situación planteada, FASES DE LA LUNA.

Estudiamos la gráfica del porcentaje visible de la luna en función del día.



Pulsa  para ir viendo cómo se resuelve la cuestión.

**En la escena** se muestra una gráfica del porcentaje visible en función del día. Observa cómo se va construyendo la gráfica.

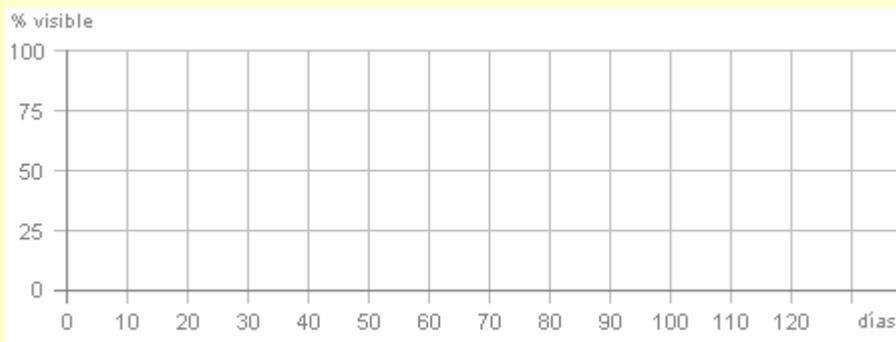
**Contesta:**

¿Cada cuánto tiempo se repiten los mismos valores de la imagen? \_\_\_\_\_

¿Cómo se llaman estas funciones? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el período en esta función? \_\_\_\_\_

Haz la gráfica a continuación



Arrastra el rectángulo sobre cada uno de los períodos para ver la gráfica completa 

Modifica el día en el control:   **Visible:** \_\_\_\_\_

Observa cuáles son los valores de x que tiene la misma imagen:

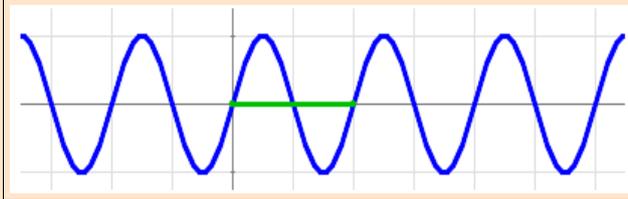
x ; x+\_\_ ; x+ \_\_     **f(x) = f(     ) = f(     )**

Después... Pulsa el botón  para hacer unos ejercicios.

Los siguientes ejercicios son similares a los de la escena

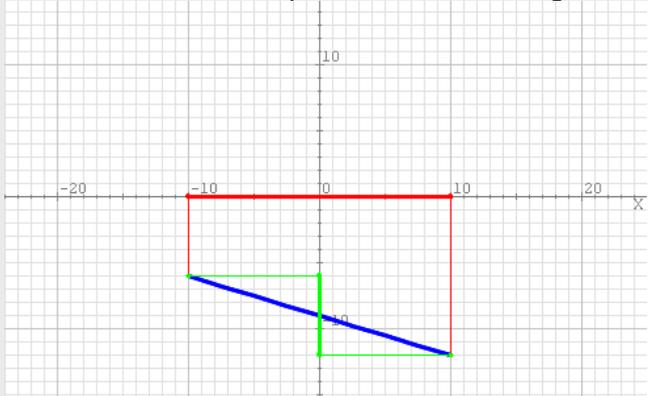
### EJERCICIO de Refuerzo

Calcula el periodo y el valor aproximado de la función para  $x=860$ :

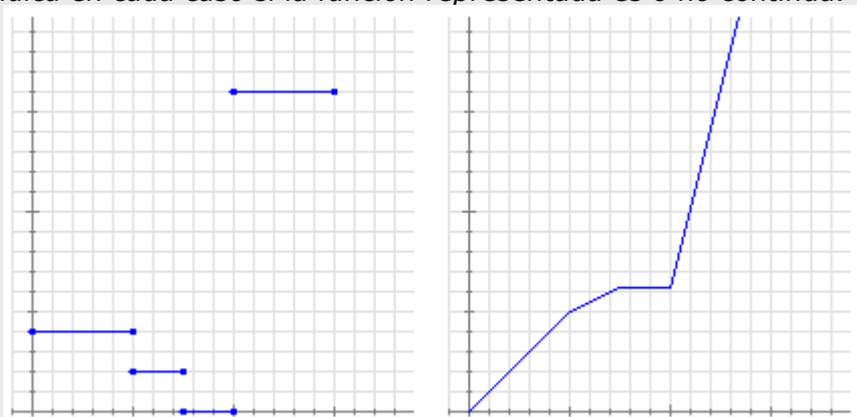


### EJERCICIOS

6. Determina de forma razonada el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{x + 8}$
7. Determina el dominio y el recorrido de la gráfica azul de la imagen.

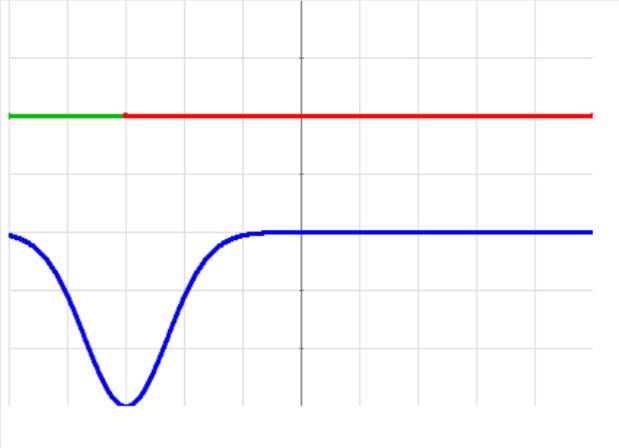


8. Indica si son continuas o discontinuas:  
*Juan tiene hoy una excursión en el colegio. Como vive lejos suele ir en bicicleta. Nada más llegar al colegio, salen todos los alumnos andando hasta la estación de trenes y allí esperan un rato a que llegue el tren. Suben al tren y por fin llegan al destino.*  
*Abajo puedes ver dos gráficas: una representa la distancia que va recorriendo Juan desde su casa con respecto al tiempo transcurrido y otra representa la velocidad a la que se desplaza en cada instante, también en función del tiempo transcurrido.*  
*Indica de forma razonada qué gráfica corresponde a cada una de las dos situaciones e indica en cada caso si la función representada es o no continua.*



### EJERCICIOS

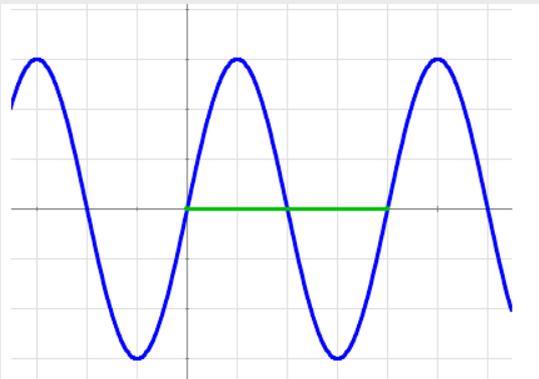
9. Calcula los puntos de corte con los ejes de la función  $f(x)=2-x$
10. La función azul de la imagen está definida en el intervalo  $(-5,5)$ . Determina sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.



11. La función azul de la imagen está definida en el intervalo  $(-5,5)$ . Determina sus máximos y mínimos relativos.



12. La función adjunta es periódica. Calcula su periodo y el valor de la función cuando  $x$  sea igual a 265.



Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.



## Recuerda lo más importante – RESUMEN

Completa para recordar lo aprendido:

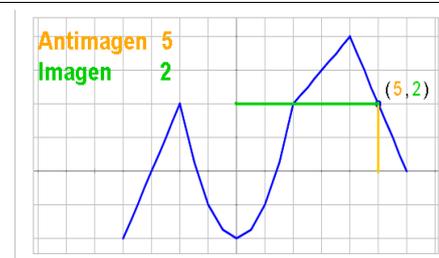
### Tabla y gráfica

Señala en la gráfica los puntos de la tabla.



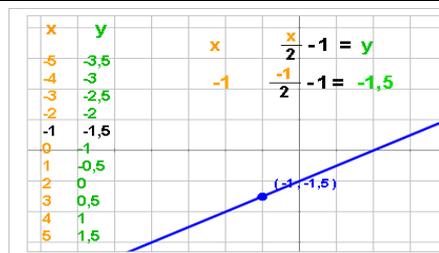
### Imagen y antiimagen

Señala en la gráfica y escribe al menos 4 ejemplos de imágenes y su correspondientes antiimágenes.



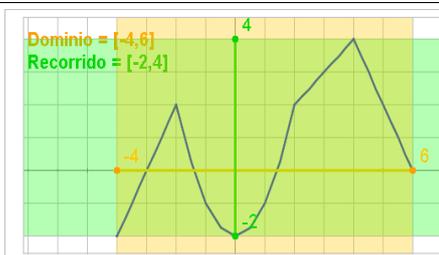
### Expresión algebraica

Explica cómo construir la expresión algebraica de la función de la gráfica.



### Dominio y recorrido

Explica cómo se observa el dominio y recorrido de la función de la gráfica.



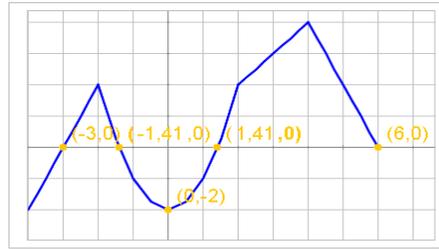
### Continuidad

Explica ayudándote de las gráficas de la derecha los conceptos relacionados con continuidad.



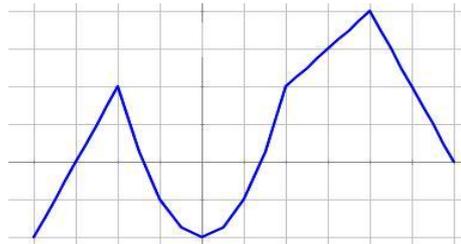
**Cortes con los ejes**

Señala en la gráfica los puntos de corte con los ejes, y caracteriza a dichos puntos.



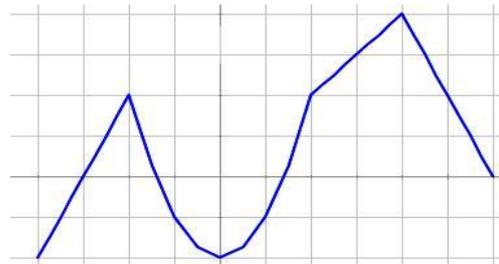
**Crecimiento y decrecimiento**

Describe en qué debes fijarte y cómo escribir los intervalos de monotonía.



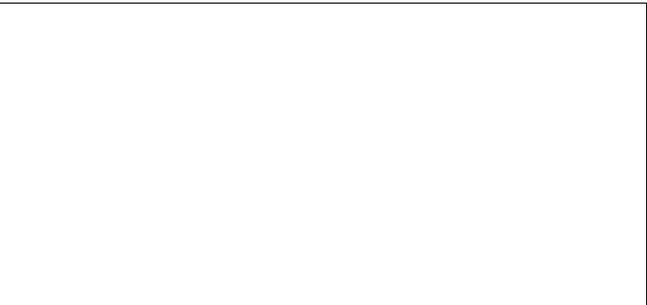
**Máximos y mínimos**

Señala en la gráfica los extremos de la función, y haz una clasificación de los mismos.



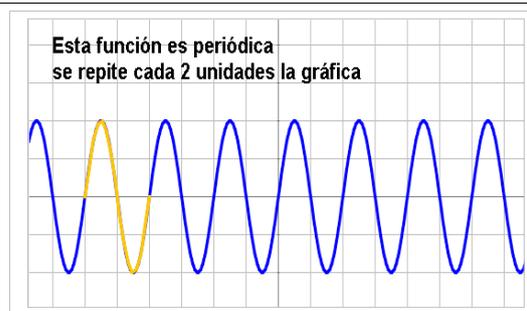
**Relación no funcional**

Explica cómo diferenciar una gráfica de una relación funcional de una no funcional, y dibuja dos gráficas que sean ejemplos de las mismas.



**Periodicidad**

Señala en la gráfica el periodo y define qué es una función periódica.



Pulsa  para ir a la página siguiente



## Para practicar

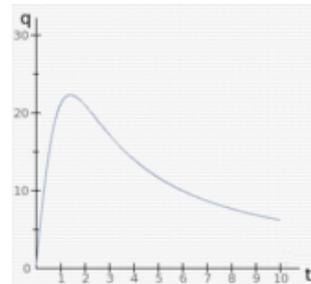
En esta unidad encontrarás ejercicios relacionados con relaciones funcionales y características de una función.

Las actividades que a continuación siguen son tomadas de las que aparecen en las escenas. Observa en cada apartado cómo se resuelven.

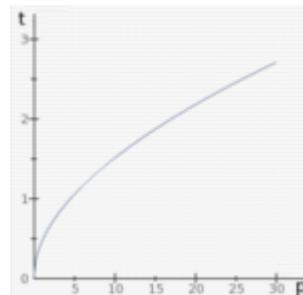
### RELACIONES FUNCIONALES

**Concepto** (Haz un mínimo de **cuatro** ejercicios de los tipos que se indican)

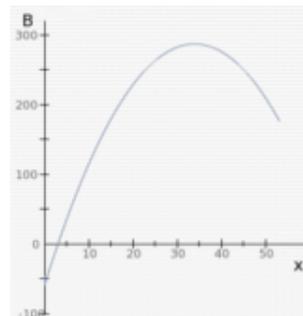
1. Se está probando un medicamento inyectando una dosis del mismo a un paciente. Llamamos  $q$  a la cantidad de medicamento por litro de sangre (medida en ml) y  $t$  al tiempo transcurrido desde la inoculación del mismo (medido en horas). ¿Qué representa la gráfica adjunta:  $q$  en función de  $t$  o  $t$  en función de  $q$ ?



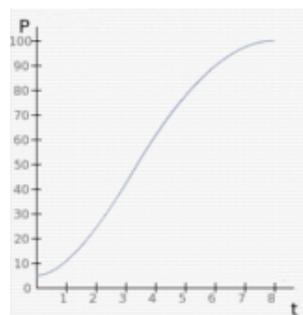
2. Lanzamos una piedra a un pozo y llamamos  $p$  a la profundidad del pozo medida en metros y  $t$  al tiempo transcurrido entre el lanzamiento y el momento en que oímos el impacto (medido en segundos). ¿Qué representa la gráfica adjunta:  $p$  en función de  $t$  o  $t$  en función de  $p$ ?



3. Una empresa fabrica cada día  $x$  piezas. Si llamamos  $B$  al beneficio que produce su venta (medido en miles de euros), ¿qué representa la gráfica adjunta:  $B$  en función de  $x$  o  $x$  en función de  $B$ ?



4. Observando la evolución de un cultivo de bacterias llamamos  $P$  al número de millones de bacterias y  $T$  al tiempo transcurrido en horas. ¿Qué representa la gráfica adjunta:  $P$  en función de  $T$  o  $T$  en función de  $P$ ?



**Notación** (Haz un mínimo de tres ejercicios como los que se indican)

5. Asocia correctamente las expresiones que se muestran al lado.

(Tienes que indicar a qué expresión de la segunda columna corresponde cada expresión de la primera)

- a)  $y=f(x)$
  - b)  $f(x)=y$
  - c)  $x=f(y)$
  - d)  $f(y)=x$
- 1)  $f: y \rightarrow x$
  - 2)  $f: x \rightarrow y$

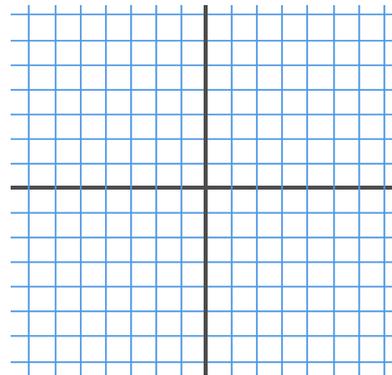
6. Expresa simbólicamente de dos maneras diferentes la función **f** que asocia a cada instante **t** la altura **h** del mar en un puerto.

7. Expresa simbólicamente de dos maneras diferentes la función **g** que representa la evolución de la potencia **P** suministrada por una central hidroeléctrica en función del tiempo **T**.

**Tablas de valores y gráficas**

8. Dada la función  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$  completa la tabla de valores adjunta y represéntala en una cuadrícula:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



**Imagen y antiimagen en forma gráfica**

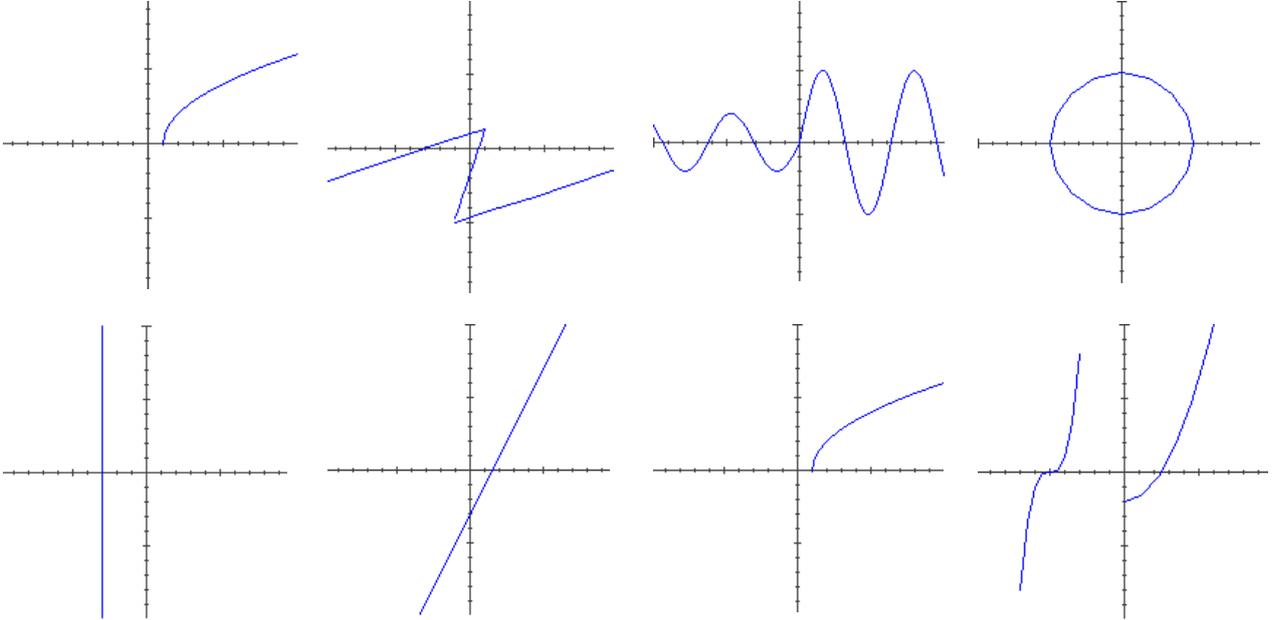
9. Calcula la imagen \_\_\_\_\_ y las posibles anti-imágenes de \_\_\_\_\_ a través de la gráfica de la imagen:

**Imagen y antiimagen en forma analítica**

10. Dada la función  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$  calcula la imagen de \_\_\_\_\_ y la anti-imagen de \_\_\_\_\_.

**Gráficas que no son funciones**

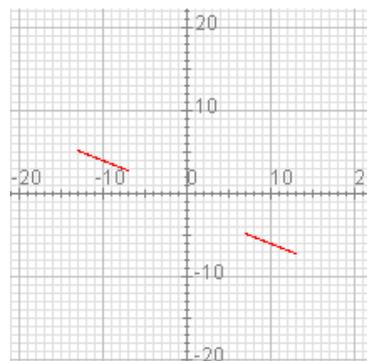
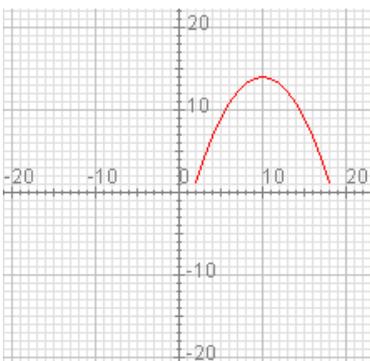
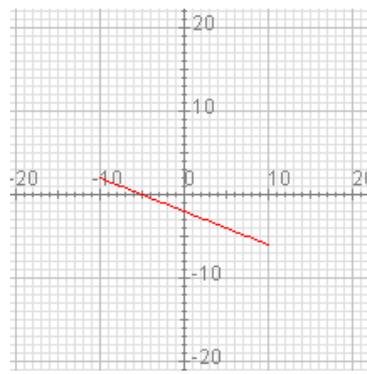
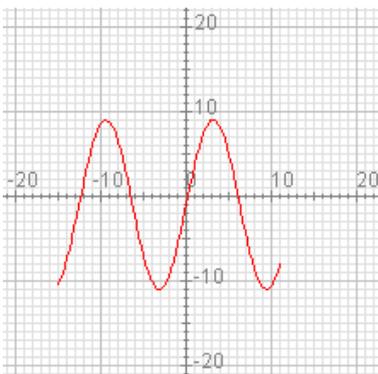
11. Determina de forma razonada si las gráficas adjuntas corresponden o no a gráficas de funciones:



**CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN**

**Dominio y recorrido**

12. Determina el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:



**Continuidad** (Haz un mínimo de tres ejercicios como los que se indican)

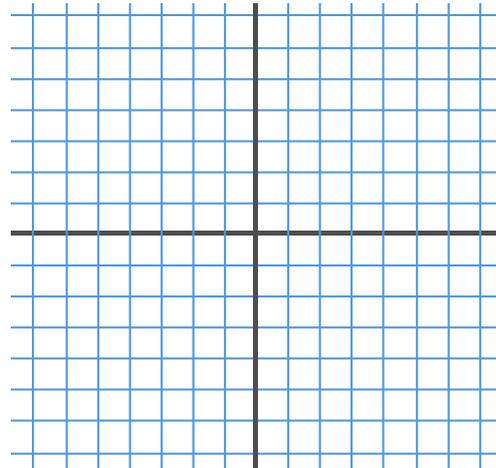
13. Se llama **valor absoluto** de un número al mismo número si es positivo y a su opuesto si es negativo.

El valor absoluto de  $x$  se representa  $|x|$ .

Por ejemplo:

$$|5| = 5, |0| = 0, |-3| = 3.$$

Dibuja la gráfica de la función  $y = |x|$  e indica si es continua o no.

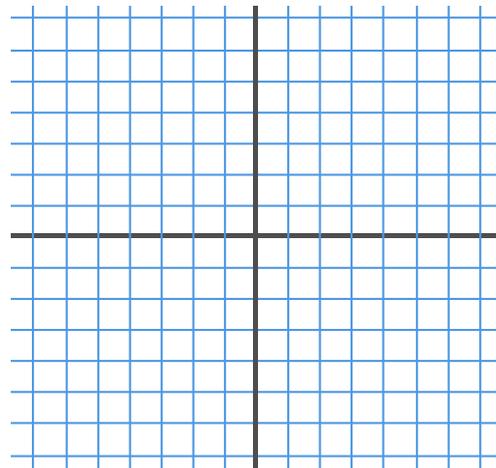


14. Se llama parte entera de un número al mayor número entero que es menor o igual que el número dado.

Por ejemplo:

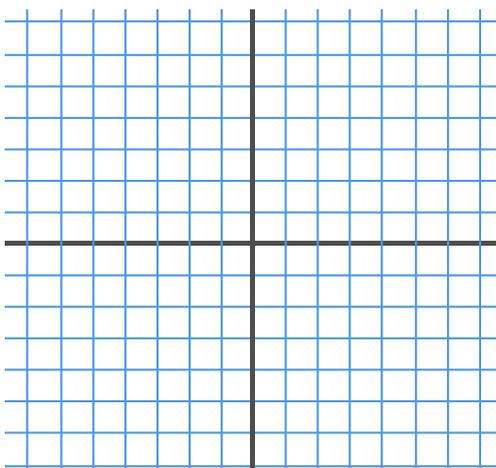
$$\text{Ent}(5,72) = 5, \text{Ent}(3) = 3, \text{Ent}(-2,54) = -3.$$

Dibuja la gráfica de la función  $y = \text{Ent}(x)$  e indica si es continua o no.



15. Con los datos del precio del agua por metro cúbico adjuntos se considera la función que relaciona el coste total que debe pagar un consumidor en relación con el volumen de agua gastado, sabiendo que hay un coste mínimo de 5€ incluso si el consumo es menor de 15 metros cúbicos. Indica de forma razonada si es una función continua y dibújala.

Consumo de agua (m³)	Precio unitario (€)
De 0 a 15 m³	0
De 15 a 30 m³	0,45
De 30 a 45 m³	0,50
De 45 a 60 m³	0,55
Más de 60 m³	0,60



**Corte con los ejes** (Haz un mínimo de tres ejercicios como los que se indican)

16. Determina los puntos de corte de las siguientes funciones con los ejes de coordenadas.  
(Haz una de cada tipo)

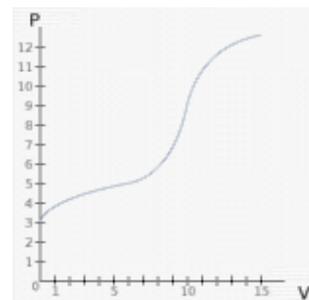
<p>a. <math>y = x^2 - x</math> (f. cuadrática : de grado 2)</p> <p>b. <math>y = x</math> (f. afín : de grado 1)</p> <p>c. <math>y =</math> (f. constante : de grado 0)</p>	<p>a. Eje X: Eje Y:</p> <p>b. Eje X: Eje Y:</p> <p>c. Eje X: Eje Y:</p>
--	---

17. La ecuación  $h = 4t - t^2$  indica la altura a la que se encuentra un proyectil lanzado hacia arriba desde el suelo en función del tiempo (medido en minutos). Averigua cuánto tardará en volver a caer.

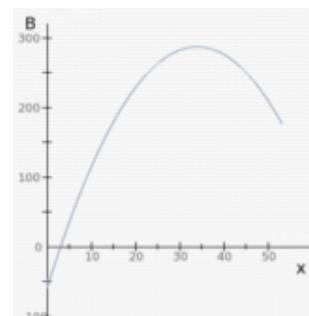
18. La función  $F = 1,8 \cdot C + 32$  establece la relación entre la temperatura en grados Fahrenheit (F) y la temperatura en grados Celsius (C).  
Calcula la temperatura a la que se congela el agua en °F.  
Luego averigua el valor en grados Celsius de una temperatura de 0°F.

**Crecimiento y decrecimiento** (Haz un mínimo de tres ejercicios de los tipos que se indican)

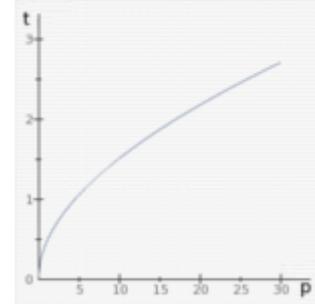
19. La gráfica adjunta representa la variación del PH de una disolución de ácido acético al ser neutralizado con una disolución de sosa. Indica, razonadamente si se trata de una función creciente, decreciente o ninguna de ambas cosas.



20. La gráfica adjunta representa el beneficio (B) de una empresa (en miles de €) en función del número de piezas que produce. Haz un informe de la situación en términos de crecimiento y decrecimiento.

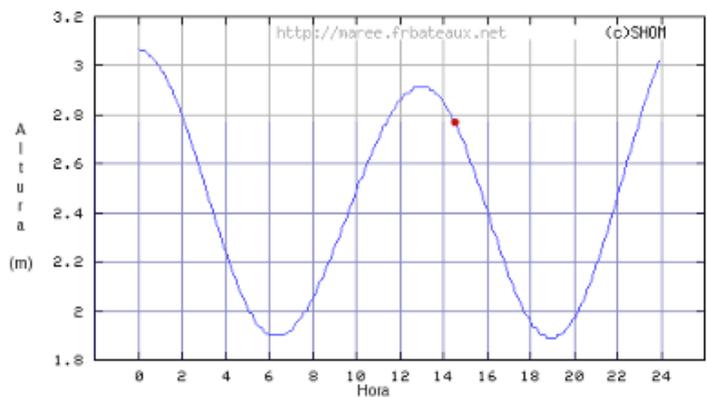


21. La gráfica adjunta representa el tiempo que tarda en caer una piedra al fondo de un pozo en función de su profundidad. Indica razonadamente si se trata de una función creciente, decreciente o ninguna de ambas cosas.

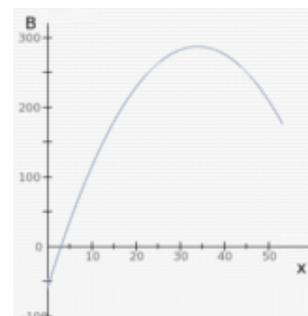


**Máximos y mínimos** (Haz un mínimo de dos ejercicios de los tipos que se indican)

22. La gráfica adjunta representa la altura de las mareas a lo largo de un día en Gijón. Indica a qué hora tuvo lugar la mayor y la menor altura de la marea. Averigua también en qué otros momentos se produjeron máximos y mínimos relativos.

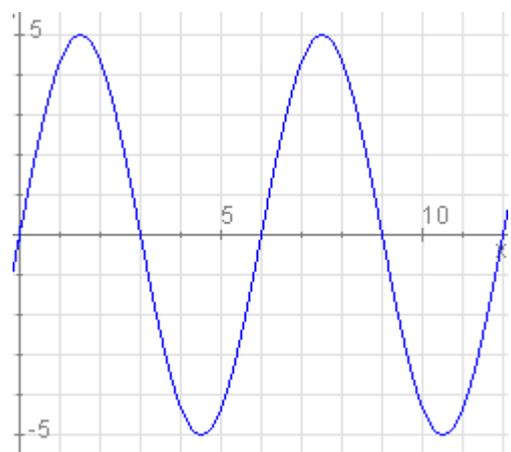


23. La gráfica adjunta representa el beneficio (B) de una empresa (en miles de €) en función del número de piezas que produce. Indica cuántas piezas hay que fabricar para obtener un beneficio máximo. Indica también cuál es ese beneficio.



**Periodicidad** (Haz un mínimo de tres ejercicios de los tipos que se indican)

24. Determina el periodo de la función de la imagen y calcula el valor aproximado de dicha función cuando  $x = \underline{\hspace{2cm}}$



Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

## Autoevaluación



Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.

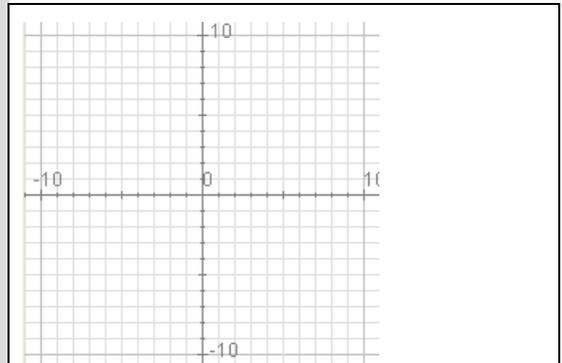
1 Indica cuál de las siguientes expresiones equivale a \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

2 Averigua si el punto de coordenadas ( \_\_ , \_\_ ) pertenece a la gráfica de la función \_\_\_\_\_

3 Calcula la imagen de \_\_\_\_\_ y la antiimagen de \_\_\_\_\_ por la función del dibujo.

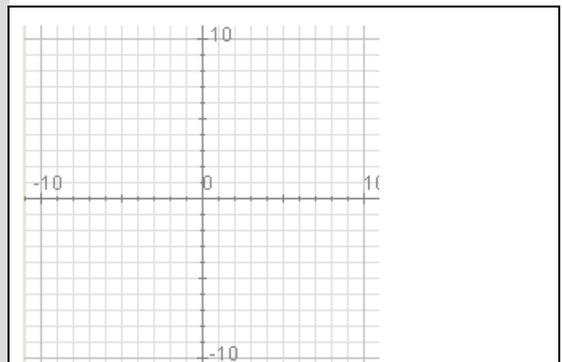
(Observa el dibujo y cópialo junto a la respuesta)



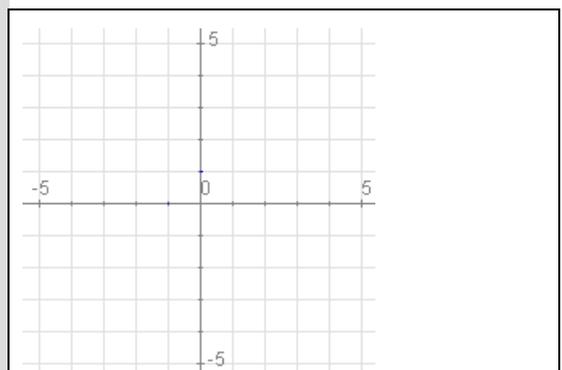
4 Calcula la imagen de \_\_\_\_\_ y la antiimagen de \_\_\_\_\_ por la función \_\_\_\_\_.

5 Determina el dominio y el recorrido de la función adjunta.

(Observa el dibujo y cópialo junto a la respuesta)

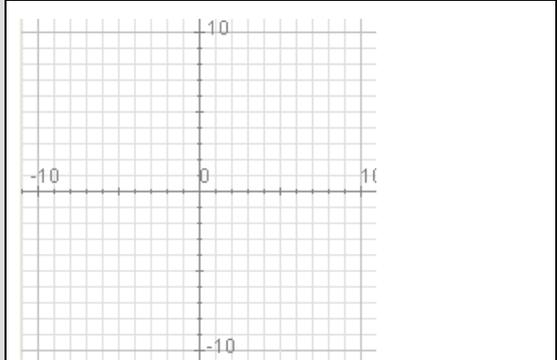


6 ¿Es continua la función de la imagen?  
(Observa el dibujo y cópialo junto a la respuesta)

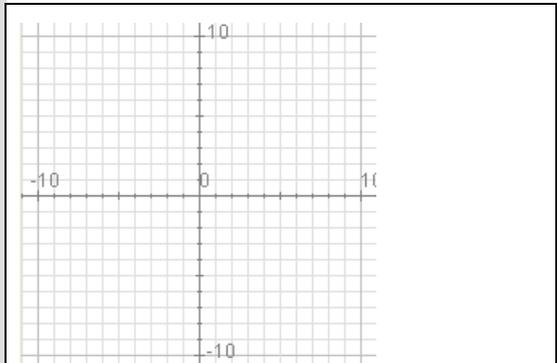


7 Calcula las coordenadas de los puntos de corte de la gráfica de la función \_\_\_\_\_ con los ejes.

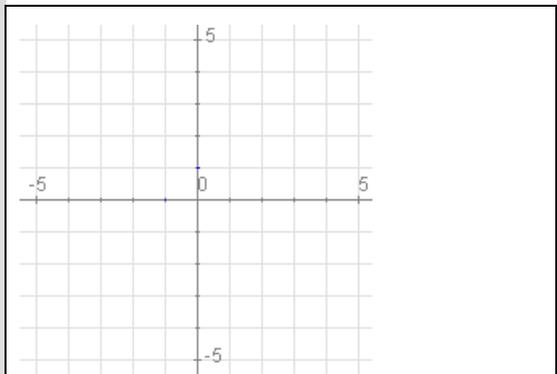
8 Halla el intervalo en el que la función adjunta no crece.  
(Observa el dibujo y cópialo junto a la respuesta)



9 Halla los valores en los que la función de la imagen alcanza un mínimo y un máximo relativo.  
(Observa el dibujo y cópialo junto a la respuesta)



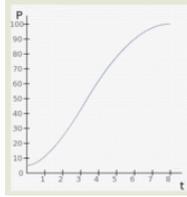
10 Determina el periodo de la función de la imagen.  
(Observa el dibujo y cópialo junto a la respuesta)





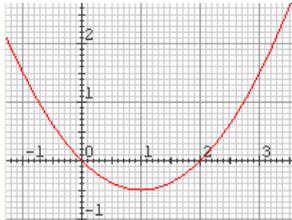
## Para practicar más

- Observando la evolución de un cultivo de bacterias llamamos P al número de millones de bacterias y T al tiempo transcurrido en horas. ¿Qué representa la gráfica adjunta: P en función de T o T en función de P?
- Una empresa fabrica y comercializa un producto. La cantidad producida se representa por x y el coste de producción con C. ¿Qué representa la función  $h(x)=C$ : el coste en función de la cantidad o viceversa?
- Dada la función  $y = f(x) = 2x - 1$  completa la tabla de valores adjunta y represéntala en una cuadrícula:

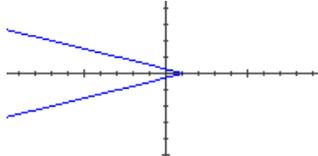


<b>X</b>	-3	-2	-1	0	1	2	3
<b>y</b>							

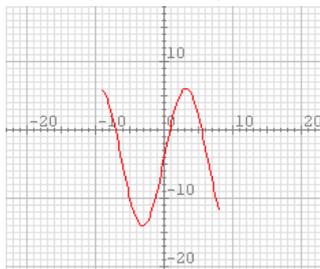
- Calcula la imagen -0,5 y las posibles anti-ímagenes de 1,5 por la función cuya gráfica puedes ver abajo.



- Dada la función  $f(x) = 3x + 2$  calcula la imagen de 0,2 y la anti-imagen de 2,2.
- Determina de forma razonada si la gráfica adjunta corresponde o no a la gráfica de una función.



- Determina el dominio y el recorrido de la función de la gráfica adjunta.

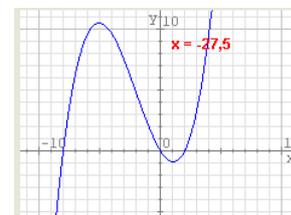
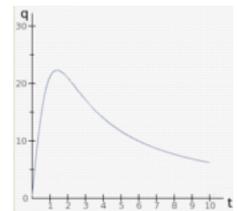


- La tabla adjunta muestra un extracto de recibo de agua en la que se muestra el precio unitario del metro cúbico de agua consumida en función del agua consumida. Indica de forma razonada si se trata de una función continua o discontinua y traza su gráfica.

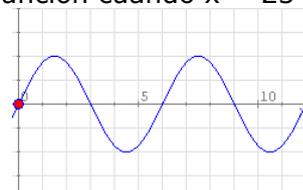
Consumo de agua (m <sup>3</sup> )	Precio unitario (€)
De 0 a 15 m <sup>3</sup>	0
De 15 a 30 m <sup>3</sup>	0,45
De 30 a 45 m <sup>3</sup>	0,50
De 45 a 60 m <sup>3</sup>	0,55
Más de 60 m <sup>3</sup>	0,60

- La función  $F = 1,8 \cdot C + 32$  establece la relación entre la temperatura en grados Fahrenheit (F) y la temperatura en grados Celsius (C). Calcula la temperatura en grados Fahrenheit a la que se congela el agua. Luego calcula a qué temperatura Celsius equivalen 0° F.
- Calcula las coordenadas de los puntos de corte con los ejes de la función  $y = x + 4$ .

- La gráfica representa la concentración (q en ml) en sangre de un medicamento inyectado a un paciente en función del tiempo (t en horas). Haz un informe que describa la situación en términos de crecimiento de la función.
- Determina los máximos y mínimos relativos de la función cuya gráfica se muestra abajo.



- Determina el periodo de la función de la imagen y calcula el valor aproximado de dicha función cuando  $x = 23$





## Funciones lineales

### Contenidos

1. Función de proporcionalidad directa  
Definición  
Representación gráfica
2. Función afín  
Definición  
Representación gráfica
3. Ecuación de la recta  
Forma punto-pendiente  
Recta que pasa por dos puntos  
Forma general
4. Posición relativa de dos rectas  
Análisis en forma explícita  
Análisis en forma general
5. Aplicaciones  
Problemas simples  
Problemas combinados

### Objetivos

- Identificar problemas en los que intervienen magnitudes directamente proporcionales.
- Calcular la función que relaciona a esas magnitudes a partir de diferentes datos y representarla gráficamente.
- Representar estas funciones de diferentes maneras.
- Comparar funciones de este tipo.
- Resolver problemas reales en los que intervienen estas funciones.



**Antes de empezar**

Observa la escena de la derecha. En la escena se muestra la relación entre el tiempo transcurrido y el tamaño del trozo de vela consumida.

**EJERCICIO:**

Completa la siguiente tabla:

Tiempo transcurrido (en horas)	1	2	4	6	8
Tamaño del trozo consumido (en mm)					

**Investiga**

Si una sandía pesa 3Kg y otra pesa 6Kg nos cobrarán el doble por la segunda. Pero, si la primera tiene un diámetro de 15 cm y la otra lo tiene de 30 cm, ¿el precio de la segunda será el doble que el de la primera? Intenta encontrar la respuesta y dar una explicación razonada.

Pulsa en el botón



para hacer unos ejercicios.

Cuando hayas hecho varios ejercicios pulsa



para ir a la página siguiente.

**1. Función de proporcionalidad directa**

**1.a. Definición**

Lee en la pantalla la explicación teórica de este.

**EJERCICIO:**

La ecuación de una función de proporcionalidad directa o lineal es: **f(x)=mx**. Define:

FUNCIÓN LINEAL:	
PENDIENTE:	

Observa la gráfica de la derecha en la que se muestra la relación entre el tiempo transcurrido desde el lanzamiento de la lanzadera espacial y su velocidad.

**EJERCICIO:**

¿Qué función relaciona ambas magnitudes (tiempo y velocidad)? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la pendiente? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la velocidad a los 225 segundos? \_\_\_\_\_

Cuando hayas comprendido bien los conceptos ... Pulsa en



para ver unos ejemplos.

### EJERCICIO

1. Determina si las relaciones entre las parejas de magnitudes siguientes son lineales o no, escribiendo para ello la ecuación que las relaciona.
  - a. Relación entre el precio inicial y el precio rebajado con un 10%.
  - b. Relación entre el peso y el volumen de un material en condiciones constantes de presión y temperatura.
  - c. Un banco ofrece un depósito anual al 5% con una comisión fija de 20€. Relación entre la cantidad invertida y los intereses recibidos.
  - d. Relación entre el área de un cuadrado y la longitud de su lado.

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 1.b. Representación gráfica

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:**

Completa:

Las funciones lineales se representan gráficamente como _____.
La gráfica de todas las funciones lineales pasa por el punto _____.
Para dibujar la gráfica basta con obtener otro punto y unirlo con _____.
Si m es positiva, representa _____.

Observa en la escena cómo se construye la gráfica de una función lineal.

### EJERCICIOS de Refuerzo

a) Representa gráficamente las siguientes funciones lineales:

$y = -2x$	$y = -0.5x$	$y = 0.2x$	$y = 2x$

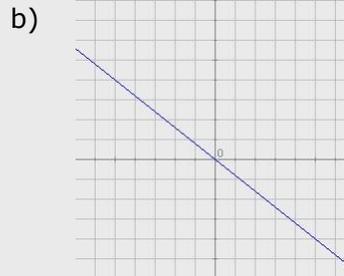
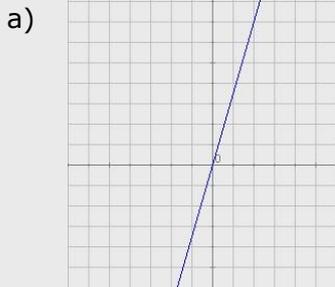
b) Averigua la pendiente de cada una de las funciones anteriores.

	$y = -2x$	$y = -0.5x$	$y = 0.2x$	$y = 2x$
Pendiente				

Pulsa en para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIO

2. Determina las ecuaciones de las funciones lineales cuyas gráficas son:



Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

## 2. Función afín

### 2.a. Definición

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:**

¿Cuál es la ecuación de una función afín? \_\_\_\_\_

¿Qué es la ordenada en el origen? \_\_\_\_\_

Practica con la escena para ver distintas funciones afines.

**EJERCICIO:**

¿Es constante el cociente entre  $f(x)$  y  $x$ ? \_\_\_\_\_

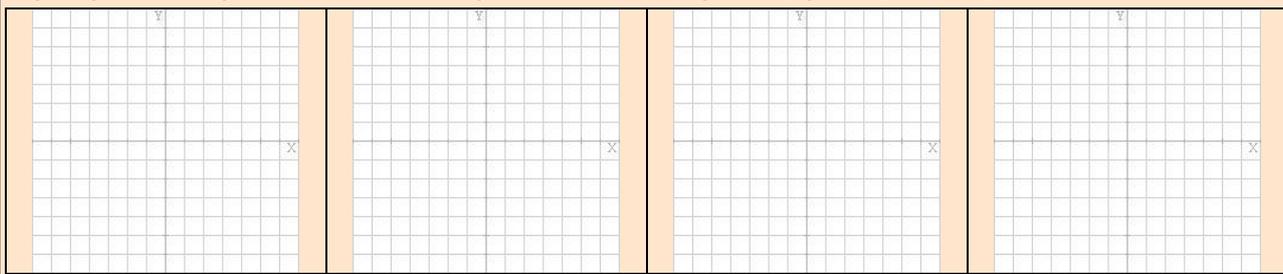
¿Pasan por el punto  $(0,0)$  las funciones afines? \_\_\_\_\_

Pulsa en para ver un caso particular.

El caso particular que has visto es aquel en el que la pendiente es nula y la recta es por tanto horizontal. El caso contrario es cuando la recta es vertical y se dice que la pendiente es infinito. En este caso la ecuación es  $x=n$  y no es una función.

### EJERCICIO de Refuerzo

c) Representa gráficamente las siguientes rectas:  $y = -2$ ,  $y = 2$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ .



Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

## 2.b. Representación gráfica

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado y observa en la escena como se construye la gráfica de una función afín.

### EJERCICIOS de Refuerzo

d) Representa gráficamente las siguientes funciones afines:

$y = -2x + 2$	$y = 2x - 2$	$y = 0.5x - 1$	$y = -0.5x + 3$

e) Averigua la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de las funciones anteriores.

	$y = -2x + 2$	$y = 2x - 2$	$y = 0.5x - 1$	$y = -0.5x + 3$
m				
n				

Pulsa en para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS

3. Determina las ecuaciones de las funciones afines cuyas gráficas son:

a)

b)

4. Determina las ecuaciones de las rectas:

a)

b)

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3. Ecuación de la recta

#### 3.a. Forma punto-pendiente

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:**

Completa:

La ecuación _____ que has visto en el apartado anterior se denomina _____ de la ecuación de la recta, y nos permite hallar dicha ecuación cuando conocemos la _____ y _____.
Cuando sólo conocemos _____, $m$ , y las coordenadas de otro de los puntos de la recta, _____, su ecuación es _____. Esta ecuación recibe el nombre de _____ de la ecuación de la recta.

Observa en la escena cómo se obtiene la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta y cómo se pasa a la forma explícita.

Pulsa en para practicar estos conceptos con unos ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por  $P (-8,-5)$  y tiene pendiente  $m = 2/7$ .
6. Determina la ecuación de esta recta:

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

#### 3.b. Recta que pasa por dos puntos

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

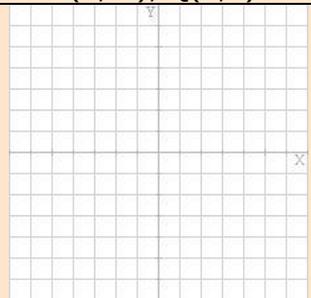
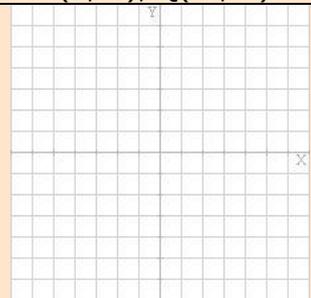
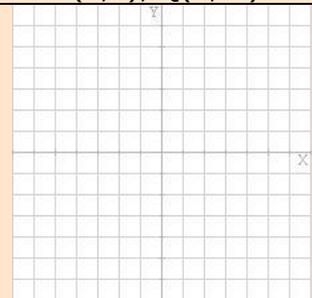
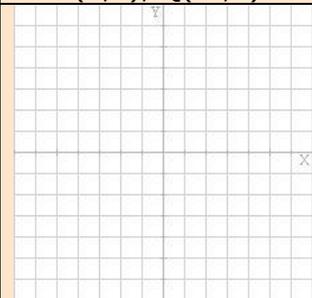
**EJERCICIO:**

La ecuación de la recta que pasa por los puntos  $P(x_0,y_0)$  y  $Q(x_1,y_1)$  es: \_\_\_\_\_ .  
 Esta ecuación recibe el nombre de \_\_\_\_\_ .

Observa en la escena cómo se obtiene la forma continua de la ecuación de la recta y los casos especiales.

### EJERCICIOS de Refuerzo

f) Representa gráficamente las rectas que pasan por los puntos que se indican y halla las ecuaciones de dichas rectas:

P(2,-3), Q(2,1)	P(2,-3), Q(-1,-3)	P(0,2), Q(0,-2)	P(2,0), Q(-2,0)
			

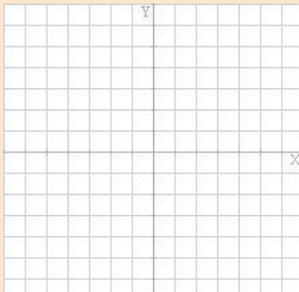
Después... Pulsa en  para ver unos ejemplos.

### EJERCICIOS

7. Halla la ecuación de la recta que pasa por P (5,-9) y Q(6,8). Pasa a forma explícita y determina la pendiente y la ordenada en el origen.
8. Halla la ecuación de la recta que pasa por P (7,4) y Q(-3,-1). Pasa a forma explícita y determina la pendiente y la ordenada en el origen.

### EJERCICIO de Refuerzo

g) Representa gráficamente las rectas del ejercicio anterior:

<p>7. </p>	<p>8. </p>
---	--

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3.c. Forma general

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:**

La forma más habitual de representar rectas es \_\_\_\_\_  
 cuya ecuación es: \_\_\_\_\_ .

Si B = 0 se trata de una recta \_\_\_\_\_ .

Si A = 0 se trata de una recta \_\_\_\_\_ .

Si B no es cero la pendiente de la recta es \_\_\_\_\_ .

Observa en la escena la representación de una recta en forma general y cómo se pasa de cualquier forma de la ecuación de la recta a la forma general.

Después... Pulsa en  para practicar un poco.

### EJERCICIOS

9. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,-7) y cuya pendiente es  $-2/3$ . Después pasa a forma general.
10. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (-4,-2) y de pendiente 0. Después pasa a forma general.
11. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(2,-2) y Q(-8,3). Luego pasa a forma general.
12. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(5,-2) y Q(3,-2). Luego pasa a forma general.
13. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(6,5) y Q(6,-2). Luego pasa a forma general.
14. Representa gráficamente las rectas cuya ecuaciones generales son  $x + y - 5 = 0$  y  $x - y + 5 = 0$ .

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 4. Posición relativa de dos rectas

### 4.a. Análisis en forma explícita

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:**

Dadas dos rectas  $y = m_1x + n_1$  e  $y = m_2x + n_2$ .

¿Cuándo son secantes? \_\_\_\_\_ :

¿Cuándo son paralelas? \_\_\_\_\_ :

Observa en la escena diferentes ejemplos de rectas secantes y rectas paralelas.

Después... Pulsa en  para ver unos ejemplos.

### EJERCICIOS

15. Determina la posición relativa de las rectas  $y = -4x + 1$ ,  $y = 4x$ . En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.
16. Determina la posición relativa de las rectas  $y = -2x + 3$ ,  $y = -2x - 2$ . En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 4.b. Análisis en forma general

Lee en la pantalla el texto.

### EJERCICIO:

Dadas dos rectas  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  y  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ .

¿Cuándo son secantes? \_\_\_\_\_ .

¿Cuándo son paralelas? \_\_\_\_\_ .

Cambia los valores de  $A_1$  y  $A_2$  en la escena para ver cuando son paralelas y cuando secantes las rectas roja y azul.

### EJERCICIOS de Refuerzo

h) Calcula el punto de corte en el caso  $A_1 = 3$ ,  $A_2 = 4$ .

i) Calcula el punto de corte en el caso  $A_1 = 2$ ,  $A_2 = 5$ .

Después... Pulsa en  para ver unos ejemplos.

### EJERCICIOS

17. Determina la posición relativa de las rectas  $x - 3y - 1 = 0$ ,  $4x + y + 1 = 0$ . En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

18. Determina la posición relativa de las rectas  $2x - 5y - 1 = 0$ ,  $-4x + 10y + 1 = 0$ . En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 5. Aplicaciones

### 5.a. Problemas simples

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

### EJERCICIO:

Completa:

Las funciones lineales describen \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_ . La representación gráfica será una recta cuya pendiente nos informa de  
 \_\_\_\_\_ de una magnitud con respecto a la otra y la ordenada  
 en el origen nos informa sobre las \_\_\_\_\_ .

En la descripción de fenómenos reales es frecuente que las magnitudes que se relacionan  
 vengan dadas por números de tamaños \_\_\_\_\_, por lo que al representarlas  
 gráficamente habrá que escoger unas \_\_\_\_\_ en los ejes correspondientes

En la escena se muestran algunos ejemplos de obtención de funciones a partir de la pendiente  
 y la ordenada en el origen o a partir de valores de la misma, tanto de funciones lineales como  
 afines. Estúdialos con atención antes de hacer los ejercicios siguientes.

## EJERCICIOS

19. En una ciudad tienen implantada la Ordenanza de Regulación del Aparcamiento (O.R.A.). La norma indica que se debe pagar cierta cantidad por cada minuto y que no hay un mínimo.

Juan pone 1,20€ y el parquímetro indica que dispone de 30 minutos. Sara con 1€ tiene 25 minutos.

Halla la ecuación que relaciona el precio con el tiempo y dibújala. ¿Cuánto hay que pagar por un aparcamiento de 50 minutos? Si pago 0,84€ ¿de cuánto tiempo dispongo?



20. En los países anglosajones suelen usar la escala Fahrenheit para medir temperaturas. En esta escala el punto de congelación del agua se alcanza a 32°F y el de ebullición a 212°F.

Nosotros usamos la escala Celsius en la que esos puntos se alcanzan a 0°C y 100°C respectivamente.

Halla la ecuación que relaciona °C con °F y dibújala. ¿A cuántos °C equivalen 80°F? ¿A cuántos °F equivalen 36°C?



21. En un comercio aplican el 15% de descuento a todos sus productos.

Halla la ecuación que relaciona el precio rebajado con el original y dibújala.

¿Cuánto cuesta una camisa que antes costaba 75€?

He pagado por unos pantalones 42,50€ ¿cuánto costaban antes?



22. En un banco nos ofrecen un plazo fijo al 4% anual con una comisión de mantenimiento de 15€ anuales, sea cual sea la inversión realizada.

Halla la ecuación que relaciona el interés producido con el capital invertido.

¿Cuánto producirán 3000€ en un año?

¿Cuánto se ha invertido si se han recibido 185€?



Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

## 5.b. Problemas combinados

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

### EJERCICIO:

Completa:

Donde realmente resulta interesante la aplicación de funciones lineales es en el estudio de \_\_\_\_\_ de forma que podamos \_\_\_\_\_ con facilidad.

Estudia con detenimiento los problemas combinados que se muestran como ejemplo en la escena.

### EJERCICIOS

23. Quiero comprarme un teléfono móvil y he visitado varias compañías.

La compañía A me ofrece una cuota fija de 9€ al mes más 6 céntimos por minuto.

La compañía B me ofrece pagar sólo por el consumo a 0,20€/min.

La compañía C me ofrece un coste de 0,10€/min con un consumo mínimo de 10€.

¿Qué compañía me interesa más?



24. Final de etapa. En una etapa con final en alto un escapado está a 6 Km de la meta y circula a 9 Km/h. El grupo perseguidor se encuentra a 10 Km del final corriendo a 12 Km/h. ¿Alcanzarán al escapado si mantienen las velocidades? En caso afirmativo ¿cuánto tardarán y a qué distancia de la meta?
25. Repite el problema anterior suponiendo que el grupo perseguidor se encuentra a 8 Km de la meta.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.



## Recuerda lo más importante – RESUMEN

### Funciones lineales

Son las funciones que relacionan magnitudes \_\_\_\_\_ y su ecuación es de la forma \_\_\_\_\_ .

Su representación gráfica es siempre una línea \_\_\_\_\_ que \_\_\_\_\_.  
La pendiente,  $m$ , es la \_\_\_\_\_.

### Funciones afines

Relacionan magnitudes directamente proporcionales sometidas a alguna \_\_\_\_\_.  
Tienen la forma \_\_\_\_\_.

Su gráfica es una recta de pendiente  $m$  que pasa por el punto \_\_\_\_\_ ( $n$  es la \_\_\_\_\_  
**en el origen**).

### Ecuación de la recta

Forma explícita: \_\_\_\_\_.

Forma punto-pendiente: \_\_\_\_\_.

Recta por dos puntos: \_\_\_\_\_.

Forma general: \_\_\_\_\_.

### Posición relativa de dos rectas

- $r_1: y=m_1+n_1$ ;     $r_2: y=m_2+n_2$   
Son paralelas si \_\_\_\_\_ .  
Son secantes si \_\_\_\_\_ .
- $r_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ ;     $r_2: A_2x+B_2y+C_2=0$   
Son paralelas si \_\_\_\_\_ .  
Son secantes si \_\_\_\_\_ .

### Casos particulares

La pendiente de una recta horizontal es \_\_\_\_\_ y su ecuación es \_\_\_\_\_ .  
Es una función \_\_\_\_\_ .

La pendiente de una recta vertical es \_\_\_\_\_ y su ecuación es \_\_\_\_\_. No  
es una \_\_\_\_\_.

Pulsa  para ir a la página siguiente



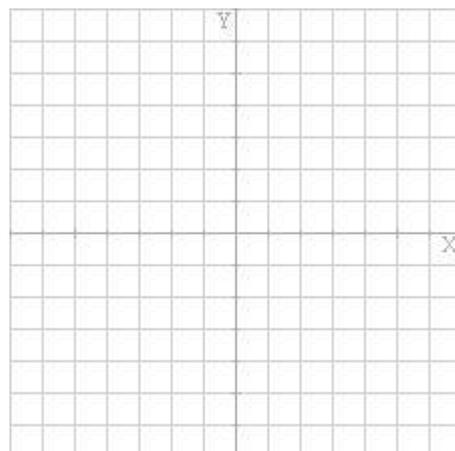
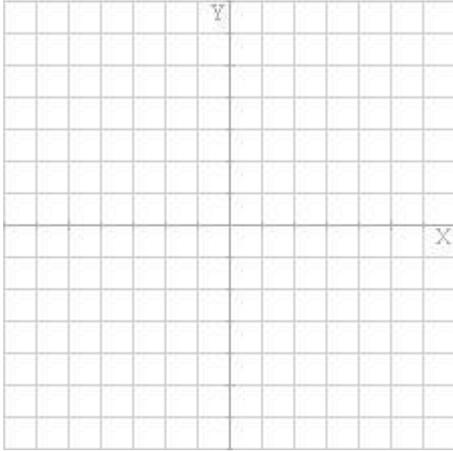
## Para practicar

En esta unidad encontrarás **Ejercicios con gráficas y ecuaciones** y **Problemas con funciones lineales y afines**. Haz al menos uno de cada clase y una vez resuelto comprueba la solución.

### Ejercicios con gráficas y ecuaciones

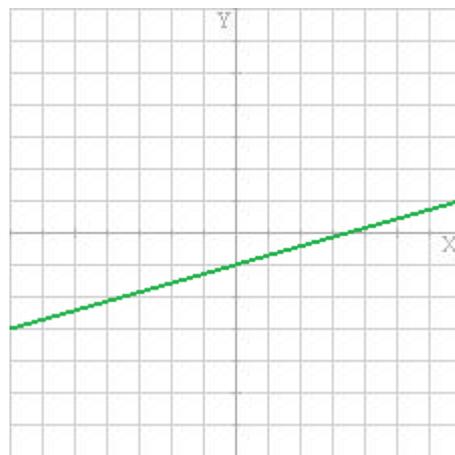
DIBUJA LA GRÁFICA

1. Representa gráficamente las rectas de ecuaciones \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_.



DETERMINA LA ECUACIÓN

2. Halla la ecuación de la recta de la imagen:

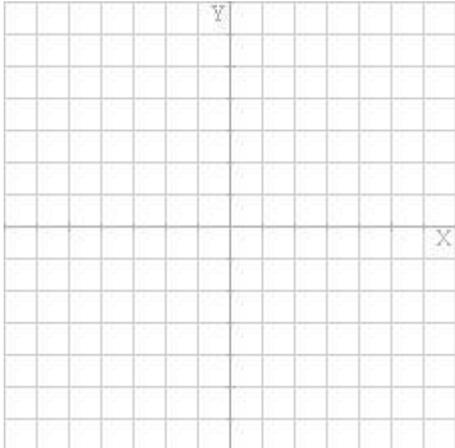
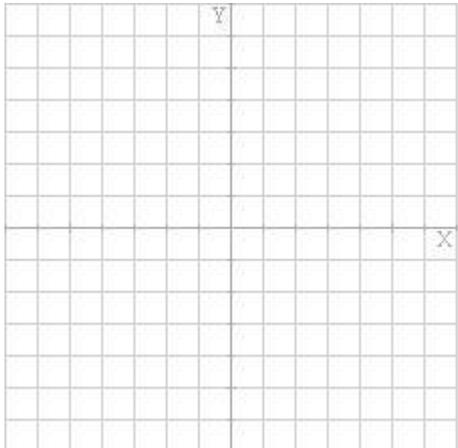
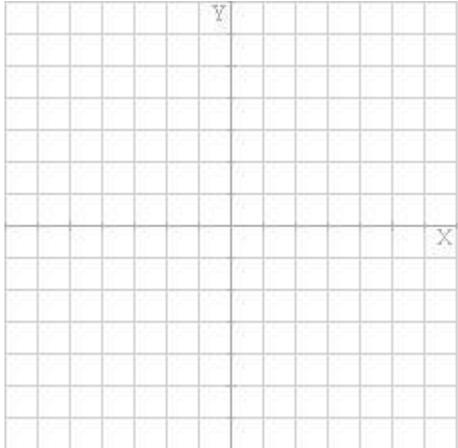


FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA I

3. Calcula la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto P \_\_\_\_\_ y cuya pendiente es  $m =$  \_\_\_\_\_.

FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA II

4. Calcula la forma general de la ecuación de la recta que pasa por los puntos P \_\_\_\_\_ y Q \_\_\_\_\_.

<p>FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA III</p> <p>5. Determina la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de ecuación _____ . Luego, halla dos puntos de la misma y dibújala.</p>	
<p>COMPARAR RECTAS</p> <p>6. Determina la posición relativa de las rectas _____ e _____ . Si se cortan halla también las coordenadas del punto de corte. Dibuja las rectas y, en su caso, el punto.</p>	
<p>PUNTOS ALINEADOS</p> <p>7. Averigua si los puntos A _____, B _____ y C _____ están alineados.</p>	
<p>PARALELA POR UN PUNTO EXTERIOR</p> <p>8. Halla la ecuación de la recta paralela a _____ que pasa por el punto _____. Dibuja ambas rectas.</p>	

**Ejercicios con gráficas y ecuaciones**
**CULTIVANDO MAÍZ**

9. Dos agricultores de zonas diferentes cultivan maíz con los rendimientos y costes que se indican debajo. Averigua cuántas hectáreas debe tener cada uno para obtener beneficios y quién tiene más beneficio en función del número de hectáreas cultivadas.

**Agricultor 1:**  
**Rendimiento:** \_\_\_\_\_  
**Costes por riego, abono, etc:** \_\_\_\_\_  
**Costes fijos (seguros, impuestos, etc):** \_\_\_\_\_

**Agricultor 2:**  
**Rendimiento:** \_\_\_\_\_  
**Costes por riego, abono, etc:** \_\_\_\_\_  
**Costes fijos (seguros, impuestos, etc):** \_\_\_\_\_  
**Precio del maíz:** \_\_\_\_\_

--	--

**EL RELOJ DE ARENA**

10. La arena contenida en un reloj de arena ocupa un volumen de \_\_\_\_\_  $\text{cm}^3$  y el fabricante indica que la velocidad de caída de la arena es de \_\_\_\_\_  $\text{cm}^3/\text{s}$ . Averigua cuánto tarda en haber la misma cantidad de arena en las dos partes del reloj.

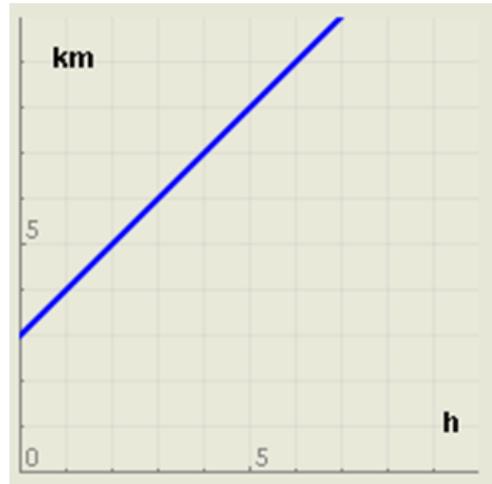
--	--

**INTERPRETANDO GRÁFICAS**

11. La gráfica de la derecha representa la distancia a la que se encuentra una persona con respecto a mi en relación con el tiempo transcurrido. Expresa con una frase su significado.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_


**REPRESENTANDO SITUACIONES**

12. Halla la ecuación de la función que describe la siguiente frase: "Un móvil está a \_\_\_\_\_ Km de mi y se acerca a \_\_\_\_\_  $\text{Km/h}$ ".
13. Halla la ecuación de la función que describe la siguiente frase: "Un móvil está a \_\_\_\_\_ Km de mi y se aleja a \_\_\_\_\_  $\text{Km/h}$ ".


Pulsa para ir a la página siguiente

## Autoevaluación



Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.

1		Escribe la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de la imagen.	
2	Calcula la ordenada en el origen de la recta que pasa por el punto _____ y cuya pendiente es ____.		
3	Calcula la ordenada en el origen de la recta cuya ecuación general es _____.		
4	Calcula la pendiente de la recta cuya ecuación general es _____.		
5	Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos P_____ y Q_____.		
6	Determina la posición relativa de las rectas: _____		
7	Determina la posición relativa de las rectas: _____		
8	Calcula las coordenadas del punto de corte de las rectas: _____		
9	Averigua si los puntos siguientes están alineados: _____		
10	Halla la ecuación de la recta paralela a r que pasa por P. P = _____ r : _____		

No olvides visitar el enlace **Para saber más** para ampliar tus conocimientos.



# Estadística

## Contenidos

1. Hacer estadística  
Necesidad  
Población y muestra  
Variables
2. Recuento y gráficos  
Recuento de datos  
Gráficos  
Agrupación de datos en intervalos
3. Medidas de centralización y posición  
Media  
Moda  
Cuartiles y mediana
4. Medidas de dispersión  
Rango y desviación media  
Desviación típica  
Coeficiente de variación

## Objetivos

- Distinguir los distintos tipos de variables estadísticas.
- Agrupar en intervalos los datos de un estudio.
- Hacer la tabla estadística asociada a un conjunto de datos.
- Representar e interpretar gráficos estadísticos, y saber cuando es conveniente utilizar cada tipo.
- Calcular la media, la moda, la mediana y los cuartiles de un conjunto de datos.
- Que son y cómo se calculan los parámetros de dispersión: el rango o recorrido, la varianza y la desviación típica, el coeficiente de variación.



**Antes de empezar**

Observa la escena de la derecha. En ella se muestra la ocupación de una plaza por un grupo de manifestantes. ¿Sabrías decir el número aproximado de personas que hay en la plaza? Esto se denomina estimar. Usa la ayuda para calcular dicho número.

Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

**1. Hacer estadística**

**1.a. Necesidad**

Lee en la pantalla el porqué de la necesidad de hacer estadística. Observa la escena con atención y realiza varias estimaciones del número de células de cada tipo que tienen los marcianos analizados.

**EJERCICIO.** Contesta:

¿Para qué sirve una encuesta? \_\_\_\_\_

Realiza el ejercicio que se propone en la escena para estimar la cantidad de glóbulos de cada color del marciano. Compara tu estimación con los valores reales.

**EJERCICIO:**

Completa la siguiente tabla:

	Estimación	Valores reales	Diferencias
			
			
			
			
			

Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.b. Población y muestra

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:**

Completa:

Cuando se hace un estudio \_\_\_\_\_ el investigador decide si analizará toda la población o una \_\_\_\_\_ elegida previamente.

\_\_\_\_\_ es el conjunto de individuos, con alguna característica común, sobre el que se hace un estudio estadístico

La \_\_\_\_\_ es un subconjunto de la población. Debe elegirse que sea representativa de toda la población en la característica estudiada.

Observa con atención la escena. Compara los resultados que se obtienen con diferentes tamaños de la muestra.

**EJERCICIO:**

Completa la siguiente tabla:

nº de hermanos	Tamaño muestra: _____		Tamaño muestra: _____		Total alumnos: _____	
	Cantidad	%	Cantidad	%	Cantidad	%
Sin hermanos						
1 hermano						
2 hermanos						
3 hermanos						
4 hermanos						

¿Cuál es más representativa? \_\_\_\_\_

### EJERCICIOS

1. ¿Cuántas personas suponen una muestra del 10% de una población de 10.000 habitantes? ¿Y de una de 6000 habitantes?
  
2. Una empresa de sondeos estadísticos tiene capacidad para entrevistar a 1000 personas por semana. Si dispone de 4 semanas a qué porcentaje de una población de 100.000 habitantes puede entrevistar para obtener una muestra.

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 1.c. Atributos y variables

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:**

Completa:

<p>Una _____ es cada una de las propiedades o características que podemos estudiar.</p>
<p><b>Variables cualitativas</b> o _____. Los valores de la variable no son números sino _____, se expresan con _____. El color, la forma, el sexo, ... son ejemplos de variables cualitativas.</p>
<p><b>Variables</b> _____. Los datos se expresan numéricamente y pueden ser:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• _____. Cada una de las variables solo puede tomar valores _____ (1, 2, 3...). El nº de hermanos, el nº ventanas de casa, el nº colegios de tu población,...</li> <li>• _____. Pueden tomar cualquier valor de un intervalo dado. Nuestro peso, altura, fuerza, no es posible medirlas con números enteros, la densidad del aire, la velocidad media de los fórmula 1 en una carrera,...</li> </ul>

Contesta a las preguntas de la escena para comprobar si has comprendido los conceptos de variable cualitativa, variable cuantitativa discreta y variable cuantitativa continua.

EJERCICIO

3. Con el fin de conocer mejor la forma de viajar de una población han preparado una encuesta. Algunas de las preguntas trataron sobre: Nº de días de viaje, dinero empleado, número de bultos, zonas geográficas, medio de transporte, naturaleza del viaje (negocios, turismo, familiar, salud...) y nº de personas. Clasifica estas variables estadísticas.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2. Recuento y gráficos

### 2.a. Recuento de datos

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado y practica con la escena.

**EJERCICIO:**

Completa:

Frecuencia _____, es el nº de veces que aparece un dato. A la de $x_i$ la llamaremos $f_i$ .
Frecuencia <b>relativa</b> , es el _____ entre la frecuencia _____ y el nº total de datos.
Frecuencia <b>acumulada</b> de un dato, es la _____ de las frecuencias absolutas de los valores que son menores o iguales que él, la indicaremos con $F_i$ . También se pueden calcular las frecuencias relativas acumuladas.

Pulsa en para hacer otros ejercicios.

### EJERCICIO

4. Haz un recuento de los siguientes datos:

4    4    2    1    2    2    4    4    2    3    4  
 3    2    2    2    4    4    3    4    4    2    1

En la tabla deben aparecer las frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas y las frecuencias relativas acumuladas.

Valores	Frecuencia absoluta	F. absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frec. relativa acumulada

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

## 2.b. Diagrama de barras y de sectores

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

### EJERCICIO:

¿Para qué sirven los gráficos estadísticos? \_\_\_\_\_

¿Qué es un diagrama de sectores? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿A qué tipo de variables es aplicable? \_\_\_\_\_

¿Cómo se construye un diagrama de barras? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Practica con la escena y, cuando hayas comprendido bien cómo se construyen los distintos tipos de gráficos, realiza el siguiente ejercicio.

### EJERCICIO

5. Haz un recuento de los siguientes datos, un gráfico de sectores y otro de barras. Indica el ángulo de cada sector.

*Pelota, máscara, pelota, máscara, máscara, bici, máscara, bici, bici, máscara, máscara, máscara, videojuego, máscara, pelota, videojuego, pelota, videojuego, pelota, pelota, videojuego, pelota, máscara.*

$X_i$	$f_i$	grados
Videojuego		
Máscara		
Bici		
Pelota		

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2.c. Agrupación de datos en intervalos

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

### EJERCICIO:

Completa:

¿Qué otro nombre reciben los intervalos en los que se agrupan los datos cuando el número de estos se hace tan grande como el tamaño de la muestra? _____
¿Con qué valor representamos a todos los datos de un mismo intervalo? _____ ¿Cómo se llama dicho valor? _____
Para representar gráficamente los datos cuando vienen agrupados en intervalos se usa el _____. Cada valor se representa por un _____ de anchura el intervalo correspondiente y con la altura proporcional a su _____.

Observa con atención la escena.

Pulsando en podrás comprobar cómo cambian las frecuencias de los intervalos cuando se generan nuevos datos.

Pulsando en podrás cambiar el número de intervalos. Presta especial atención a los intervalos, las marcas de clase, las frecuencias y al histograma en cada caso.

### EJERCICIOS

- 6.** Agrupa los siguientes datos en 10 grupos. Agrupa los mismos datos, ahora, en 5 grupos y haz un gráfico para cada agrupación.

2	9	9	8	2	9	5	4	1	7	7	1
2	8	4	1	6	1	9	1	4	7	4	9
4	1	3	2	3	4	3	1	1	1	4	5
10	6	6	2	1	4	3	7	6	6	10	2
9	8	9	7	7	4						

- 7.** Agrupa los datos siguientes en 5 intervalos de igual amplitud, haz un gráfico y un polígono de frecuencias.

7,2	6	6,3	9,8	9,1	9,3	5,7	6,7	8,4	5,7	3,1	1,4
5,4	1,1	4,8	2,5	0,1	4	5,3	1,3	3,6	1,9	5,2	1,7

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3. Medidas de centralización y posición

#### 3.a. La Media

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:**

Completa:

Para calcular la media si son pocos los datos, se \_\_\_\_\_ todos y se \_\_\_\_\_ entre el \_\_\_\_\_. Si son muchos, los tendremos agrupados, entonces se suman los productos de cada dato por su \_\_\_\_\_ y se divide esta suma por el número total de datos. Se indica con \_\_\_\_\_.

**EJERCICIO:**

Completa:

$\bar{x} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

Observa en la escena cómo se calcula la media dependiendo de si los datos están o no agrupados. Presta especial atención a la construcción de la tabla de datos. En , cambia el número de intervalos y verás que la media, aún con los mismos datos, varía.

Después... Pulsa en para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIOS

8. Calcula la media en cada caso:

- a) 4, 6, 8
- b) 4, 6, 8, 6
- c) 100, 120, 180, 200

9. Calcula la media de los siguientes datos

0	2	3	4	3	1	4	3	3	4	1	3
4	1	3	0	0	3	2	2	1	3	4	1

10. Calcula la media de los siguientes datos

2,4	3	1,1	4	3,5	0,7	0	2,8	3,8	0,2	2,8	1,9
0,6	3,8	3,1	4	2,8	0,2	0,4	3,1	1,5	1,9	1,8	3,1

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

### 3.b. La Moda

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:**

Completa:

La **moda**, **Mo**, de una distribución estadística es el valor de la variable que más se \_\_\_\_\_, el de mayor \_\_\_\_\_.

Observa la escena y realiza varios ejemplos hasta que comprendas bien el concepto de moda.

Después... Pulsa en  para hacer unos ejercicios.

**EJERCICIO**

11. Determina la moda para los datos

2	4	3	0	2	1	1	2	3	3	3	1
1	1	0	1	4	0	1	3	4	0	1	2

**EJERCICIO de Refuerzo**

a) Determina la moda en las siguientes secuencias de datos:

- A, A, B, C, B, C, B, C, B, C, B, A, A, A, A
- 4, 3, 2, 3, 1, 2, 0, 2, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 4, 0, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 0, 4, 2, 0, 4, 1
- 2, 4, 0, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 0, 4, 2, 0, 4, 4, 3, 2, 3, 1, 2, 0, 2, 0, 1, 2, 3, 1, 1
- 4, 1, 1, 4, 0, 4, 2, 0, 4, 1, 4, 3, 2, 3, 1, 2, 0, 2, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 4, 0, 1, 1

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3.c. La mediana y los cuartiles

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:**

Completa:

La mediana y los cuartiles, como la media _____, sólo se pueden calcular cuando la variable es _____.
La _____, <b>Me</b> , es el valor que ocupa la posición _____ una vez ordenados los datos en orden _____, es decir el valor que es mayor que el 50% y menor que el otro 50%.
La mediana divide la distribución en dos partes con igual nº de datos, si la dividimos en cuatro partes obtenemos los _____, 1º, 2º y 3º, que se indican respectivamente <b>Q<sub>1</sub></b> , <b>Q<sub>2</sub></b> y <b>Q<sub>3</sub></b> .
Ordenados los datos, <b>el primer cuartil</b> , es mayor que el ____% de estos; <b>el tercer cuartil</b> , mayor que el ____%, y el segundo coincide con la _____.

Practica con la escena y presta atención a cómo se calculan la mediana y los cuartiles en el caso de una variable estadística discreta.

Después... Pulsa en  para practicar un poco.

**EJERCICIO**

**12.** Calcula la mediana, el primer y tercer cuartil de los siguientes datos:

2	4	3	0	2	1	1	2	3	3	3	1
1	1	0	1	4	0	1	3	4	0	1	2

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 4. Medidas de dispersión

### 4.a. Rango y Desviación media

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:**

Completa:

Las medidas de _____ indican si los datos están más o menos _____ respecto de las medidas de _____.
_____ o recorrido, es la _____ entre el mayor y el menor valor de la variable, indica la longitud del intervalo en el que se hallan todos los datos.
_____, es la media de los valores absolutos de las diferencias entre la media y los diferentes datos.

Observa la escena y asegúrate de que comprendes bien el concepto

Después... Pulsa en  para ver unos ejemplos.

### EJERCICIO

13. Calcula el rango y la desviación media de los datos:

8    8    6    10    9    6    7    8    9    7  
7    6    6    7    9    5    5    7    10    7

14. Calcula la desviación media de los datos tabulados siguientes:

	$x_i$	$f_i$
[0,200)	100	7
[200,400)	300	8
[400,600)	500	13
[600,800)	700	9
[800,1000)	900	7

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

#### 4.b. Varianza y desviación típica

Lee en la pantalla el texto.

##### EJERCICIO:

Completa:

Es otra forma de medir si los datos están o no \_\_\_\_\_ a la media y es la más utilizada.

La \_\_\_\_\_ es la media de los cuadrados de las desviaciones.

La **desviación típica** es la raíz cuadrada positiva de la \_\_\_\_\_. Para designarla emplearemos la letra griega "sigma",  $\sigma$ .

$$\sigma = \sqrt{\quad}$$

Es importante que entiendas el significado de estas medidas, cuanto \_\_\_\_\_ sean más \_\_\_\_\_ estarán los datos.

Los intervalos alrededor de la media de amplitud 2 o 4 veces la desviación típica tienen importancia por \_\_\_\_\_ .

Observa la escena y fíjate como se tabulan los datos.

Después... Pulsa en  para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIO

15. Calcula la media y la desviación típica en

a) 200, 250

b) 175, 275

Cuando acabes ...

Pulsa  para ir a la página siguiente.

#### 4.c. Coeficiente de variación

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO:**

Completa:

Es el \_\_\_\_\_ entre la desviación típica y la media, se utiliza para comparar las dispersiones de datos de distinta media.

Observa la escena y después realiza el ejercicio de esta pantalla.

### EJERCICIOS

16. Calcula la media y la desviación típica en:

a) 7, 5, 3, 2, 4, 5

b) 20, 25, 20, 22, 21

17. ¿Cuál de las dos distribuciones anteriores presenta mayor dispersión?

18. Calcula la media y la desviación típica de los datos agrupados siguientes:

$X_i$	5	10	15	20	25	30
$f_i$	9	2	3	5	9	4

19. ¿Cuál es el coeficiente de variación de la distribución anterior?

Cuando acabes ...

Pulsa



para ir a la página siguiente.



## Recuerda lo más importante – RESUMEN

	<b>1. Población:</b>			<b>2. Muestra:</b>
<b>3. Variables estadísticas:</b>				Ejemplos
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cuantitativa:</li> </ul>				
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cualitativa Discreta:</li> </ul>				
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cualitativa Continua:</li> </ul>				

Completa la siguiente tabla a medida que avanzas por los siguientes conceptos escribiendo sus definiciones y haciendo los cálculos:

<b>4. Tabla de valores</b>								
X <sub>i</sub>	f <sub>i</sub>	F <sub>i</sub>	%	X <sub>i</sub> ·f <sub>i</sub>	$\bar{X} - x_i$	( $\bar{X} - x_i$ ) <sup>2</sup>	$\bar{X} - x_i$   · f <sub>i</sub>	( $\bar{X} - x_i$ ) <sup>2</sup> · f <sub>i</sub>
<b>TOTAL</b>								
<b>5. Gráficos. Tipos de gráficos:</b>								
<b>Definiciones:</b>							Resultados del ejemplo	
<b>6. Moda</b>								
<b>7. Rango</b>								
<b>8. Mediana</b>								
<b>9. Cuartil 1º</b>								
<b>10. Cuartil 3º</b>								
<b>11. Media</b>								
<b>12. Desviación media</b>								
<b>13. Desviación típica</b>								
<b>14. Coeficiente de variación</b>								

Pulsa para ir a la página siguiente



## Para practicar

En esta unidad encontrarás **Estadística. Recuento y cálculos** y **Estadística. Datos del INE**. Haz al menos uno de cada clase y una vez resuelto comprueba la solución.

### Estadística. Recuento y cálculos

#### DATOS

1. Haz un recuento de los siguientes datos \_\_\_\_\_

2. Cuando hay elecciones todos los ciudadanos mayores de 18 pueden votar. ¿Los datos obtenidos constituyen una muestra? ¿Qué opinas al respecto?

3. Clasifica las siguientes variables estadísticas:

Nº de hijos, Flor preferida, Peso, Temperatura media, Sabor, Altura, Velocidad, Aceleración, Nº de válvulas, Nº de plazas, Tipo de vehículo, Nº de ruedas, Carga neta y Tipo de tapicería.

4. Agrupa los datos en intervalos de amplitud 10 y haz el recuento  
5, 12, 4, 23, 34, 6, 14, 25, 11, 1, 37, 24, 31, 21, 4, 7

#### MODA Y MEDIANA

5. ¿Cuál es la moda en cada grupo?

A = { \_\_\_\_\_ }

B = { \_\_\_\_\_ }

C = { \_\_\_\_\_ }

6. ¿Cuál es la mediana en cada caso?

$$A = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$$

$$B = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$$

$$C = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$$

$$D = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$$

$$E = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$$

7. Agrupa los datos  $\{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}$  y determina la moda y la mediana.

8. Tenemos 20 datos ordenados de menor a mayor y el 10<sup>o</sup>, 11<sup>o</sup> y 12<sup>o</sup> son los datos 30, 40 y 40. ¿Cuál es la mediana?

### **MEDIA**

9. ¿Qué número hay que añadir a cada uno de los siguientes números para tener de media 7?

a) 3

b) 4

c) 13

10. Calcula la media de los siguientes datos:

$$x_1=10 \qquad f_1= \underline{\hspace{1cm}}$$

$$x_2=12 \qquad f_2= \underline{\hspace{1cm}}$$

$$x_3=14 \qquad f_3= \underline{\hspace{1cm}}$$

11. ¿Cuál es la media en cada caso?

$$A =$$

$$B =$$

$$C =$$

**12.** 4 datos tienen por media a 5. ¿Cuánto ha de valer un 5º dato para que la media pase a ser 6?

**13.** ¿Qué dato sobra para que la media de la serie 3, 4, 5, 6, 7, 8 sea 5?

### **CUARTILES Y DESVIACIÓN MEDIA**

**14.** Pon ejemplos de igual media y distinta desviación media.

**15.** Determina la desviación media en cada caso:

A =

B =

**16.** Determina los cuartiles de los datos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

**17.** En 100 datos ordenados de menor a mayor, los datos 74, 75 y 76 son 100, 120 y 130. Calcula Q3.

**18.** En 50 datos ordenados de menor a mayor, los datos 10º, 11º, 12º, 13º y 14º son 22, 24, 24, 26 y 28. Calcula Q1.

**DESVIACIÓN TÍPICA Y COEFICIENTE DE VARIACIÓN**

19. En tres casos con la misma media y distinta desviación, ¿qué grupo de datos está más disperso?

20. Determina el CV en cada caso.

a)  $\bar{X} = 10$ ,  $\sigma = 1$

b)  $\bar{X} = 10$ ,  $\sigma = 0.1$

c)  $\bar{X} = 10$ ,  $\sigma = 5$

Expresa el resultado en porcentajes.

21. Determina el CV sabiendo que  $\bar{X} = \underline{\hspace{1cm}}$  y  $\sigma = \underline{\hspace{1cm}}$ .

22. ¿Cuál es la desviación típica en cada caso?

A = (5, 5)

B = (4, 6)

C = (10, 0)

23. Calcula la desviación típica para los datos siguientes:

$x_1=10$                        $f_1=\underline{\hspace{1cm}}$

$x_2=12$                        $f_2=\underline{\hspace{1cm}}$

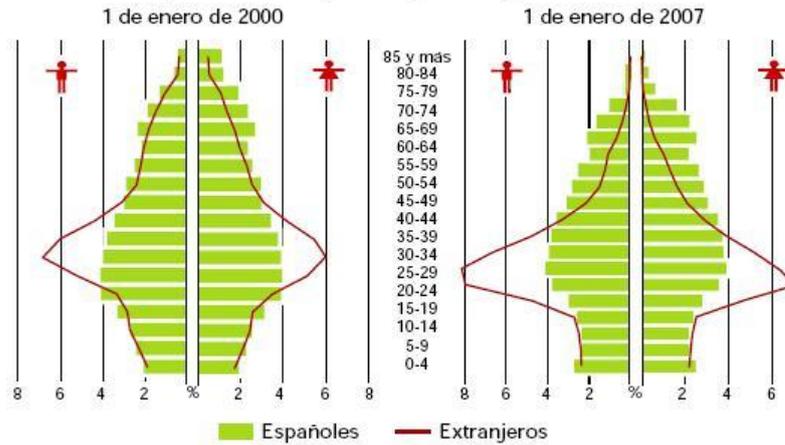
$x_3=14$                        $f_3=\underline{\hspace{1cm}}$

Pulsa  para ir a la página siguiente

**Estadística. Datos del INE**  
**POBLACIÓN**

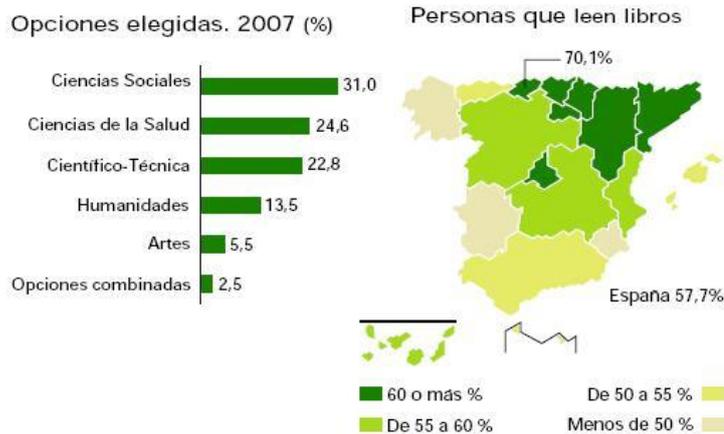
24. ¿A partir de qué edad hay más mujeres que hombres?  
 ¿Qué porcentaje de españolas tienen 85 o más años?  
 ¿Entre los 20 y los 44 años qué porcentaje de población española hay?  
 ¿Los nacimientos de los últimos 20 años han ido creciendo o disminuyendo?

Pirámide de población española y extranjera



**EDUCACIÓN**

25. ¿En qué zonas geográficas se leen menos libros?  
 ¿Cuál es la opción más elegida?  
 ¿Qué zona, con más de un 60% de personas que leen libros, está rodeada de zonas con menos porcentaje de lectura?  
 ¿Se lee más en la zona Norte o en la zona Sur?



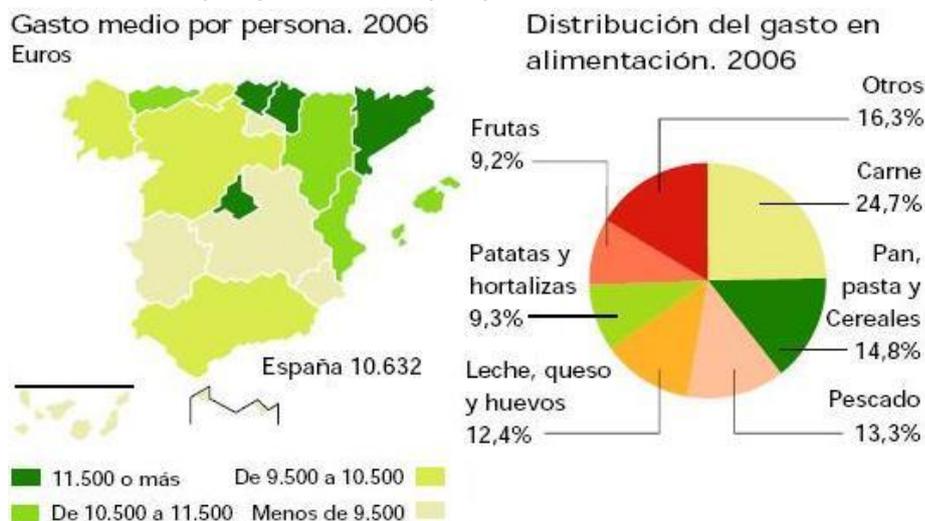
**SALUD**

26. ¿La depresión afecta al mismo porcentaje de hombres que mujeres?  
 Indica alguna zona geográfica con más de 1000 muertes cada 100000.  
 Indica alguna zona con una mortalidad por debajo de la media.  
 ¿Qué dolencia tiene mayor porcentaje de población?



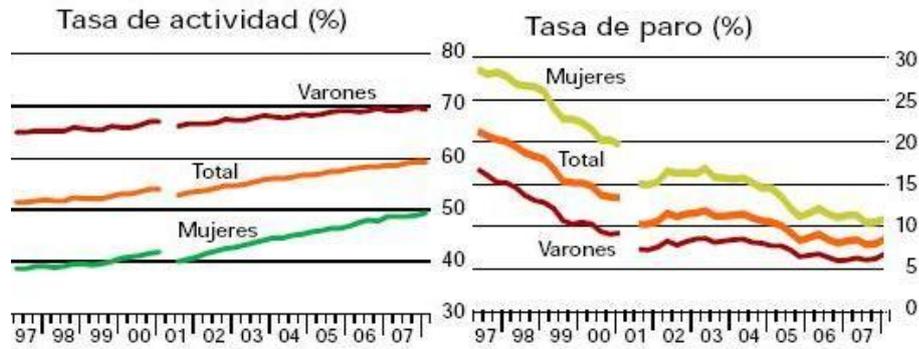
**CONDICIONES DE VIDA**

27. Alguien que gaste en alimentación como en el gráfico, ¿cuánto gasta en pescado de cada 500 euros?  
 ¿En qué nos gastamos más dinero para alimentarnos?  
 Indica una zona donde el gasto medio por persona sea inferior a la media.  
 Indica las zonas con mayor gasto medio por persona.



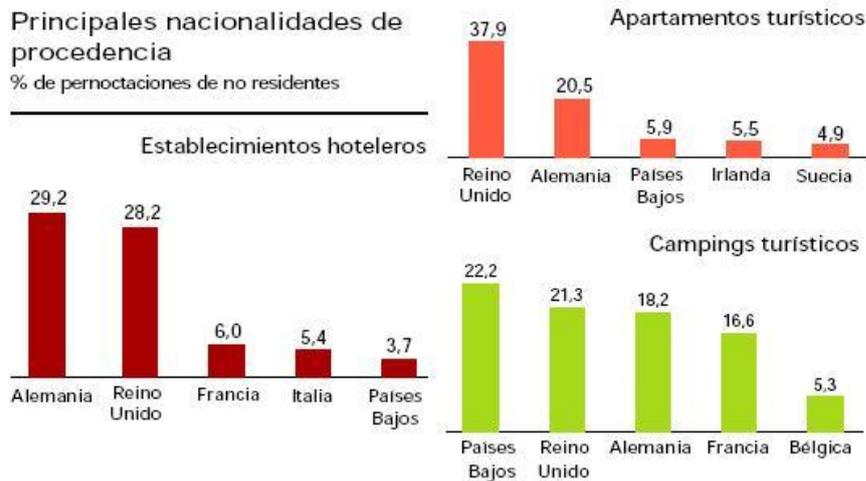
**TRABAJO**

28. ¿En qué periodo de tres años disminuyó más rápido el paro?  
 Desde el 2001, ¿en qué año disminuyó más el paro?  
 ¿En los 20 años del gráfico, la mujer ha tenido alguna vez menos paro que el hombre?  
 ¿A partir de qué año la tasa de actividad de la mujer sobrepasó el 40%?



**TURISMO**

29. ¿Dónde te alojarías para encontrarte con un belga por cada 3 franceses?  
 ¿De qué nacionalidad de procedencia hay mayor ocupación en los hoteles de España?  
 ¿Qué dos países tienen mayor presencia turística en España?  
 ¿En qué tipo de pernoctación hay más turistas de los Países Bajos que de otras nacionalidades?



Pulsa  para ir a la página siguiente

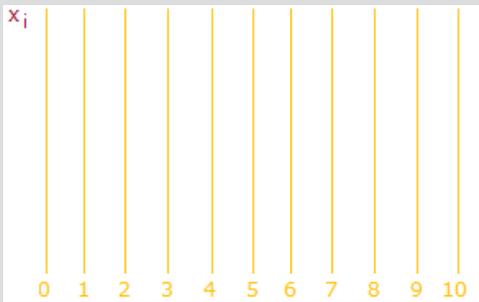
## Autoevaluación



Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.

1 Cuenta los \_\_\_ que hay.


2 ¿Qué frecuencia tiene el valor \_\_\_?



3 Calcula la media.

$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$

4 Calcula la mediana

$x_i$	$f_i$	$F_i$	%

5 Con los datos del ejercicio 4, calcula el primer cuartil.

**6** Con los datos del ejercicio 4, calcula el tercer cuartil.

**7** Calcula la amplitud del rango.

$x_i$	$f_i$

**8** Calcula la desviación media.

$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$ \bar{X} - x_i  \cdot f_i$

**9** Calcula la desviación típica.

$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$(\bar{X} - x_i)^2 \cdot f_i$

**10** Con los datos del ejercicio 9, calcula el coeficiente de variación, en tanto por uno.



## Para practicar más

**1.** ¿Cuántas personas suponen una muestra del 5% de una población de 20.000 habitantes? ¿Y de una de 1000 habitantes?

**2.** De una población de 30000 individuos se ha estudiado varias características en 150 individuos. ¿Qué porcentaje del total ha sido estudiado?

**3.** Un veterinario estudia las siguientes características en una muestra de animales de una granja tipo de animal, peso, color de los ojos, temperatura corporal, número de compañeros y metros cuadrados por animal.

**4.** Haz un recuento de los siguientes datos, un gráfico de sectores y otro de barras. Indica el ángulo de cada sector.

a	b	c	a	c	c
d	c	d	b	d	a
d	a	b	b	c	c
a	a	b	a	b	d

**5.** Haz un recuento de los siguientes datos y un diagrama de barras con polígono de frecuencias

3	3	1	1	3	2
3	3	2	1	3	2
2	3	1	1	4	3
2	2	4	4	3	3

**6.** Agrupa los siguientes datos en 10 grupos. Agrupa los mismos datos, ahora, en 5 grupos.

3	6	5	9	2	6
2	2	7	9	4	6
2	5	9	9	1	0
2	5	3	6	7	8
6	4	3	6	7	9
10	10	9	1	6	8
6	2	3	9	6	5
6	6	5	7	6	6
10	1	3	4	4	4

**7.** Calcula la media en cada caso:

- a) 14,16, 18
- b) 24, 26, 28, 26
- c) 1000, 1200, 1800, 2000

**8.** Calcula la media de los siguientes datos

3	3	1	1	3	2
3	3	2	1	3	2
2	3	1	1	4	3
2	2	4	4	3	3

**9.** Calcula la media de los siguientes datos

10	1,5	18	20	16	1
9,5	5,50	15,5	6,5	4,5	4
8,5	7,5	1,5	15	13	0
20	12,5	7,5	4,5	14,5	9

**10.** Determina la moda para los datos

3	3	1	1	3	2
3	3	2	1	3	2
2	3	1	1	4	3
2	2	4	4	3	3

**11.** Calcula la mediana, el primer y el segundo cuartil de los datos del ejercicio anterior.

**12.** Calcula de desviación media en cada caso:

- a) 14, 16, 18
- b) 34, 36, 38, 36
- c) 1000, 1200, 1800, 2000

**13.** Calcula el rango y la desviación media de los datos:

23	8	21	24	20	9
33	20	11	36	13	1
40	25	30	12	18	5
40	27	16	26	9	7

**14.** Calcula la desviación media de los datos tabulados siguientes:

Intervalo	Marca = $X_i$	Fr	$F_i \cdot  \bar{X} - X_i $
[ 0 , 200 )	100	1	450
[ 200 , 400 )	300	3	750
[ 400 , 600 )	500	3	150
[ 600 , 800 )	700	2	300
[ 800 , 1000 )	900	3	1050

**15.** Calcula la media y la desviación típica en

- a) 2000, 2500
- b) 1750, 2750
- c) 2500, 2500

**16.** Calcula la media y la desviación típica de los datos:

3	1	1	3	1	4
4	4	4	1	1	4
4	2	2	2	3	2
4	2	4	2	1	3

**17.** Calcula el coeficiente de variación de los datos del ejercicio anterior.

**18.** Calcula la media y la desviación típica de los datos:

25	29	40	9	32	4
15	35	26	24	16	2
11	16	37	10	30	2
35	17	8	40	38	5

**19.** Calcula el coeficiente de variación de los datos del ejercicio anterior.

**20.** Calcula la media y la desviación típica de los datos agrupados siguientes:

$X_i$	$f_i$
5	7
10	0
15	2
20	2
25	4
30	2

**21.** Haz los cálculos para un millón de habitantes en cada comunidad.

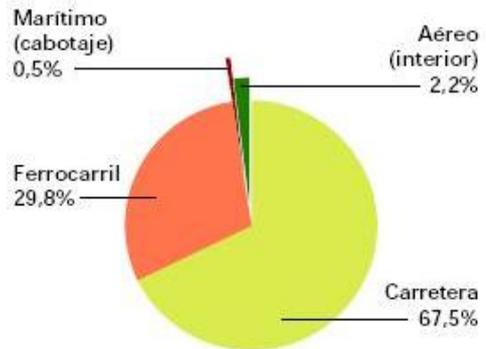
**Tasa de criminalidad. 2006**  
Infracciones penales por 1.000 hab.

Tasas más altas

Illes Balears	78,8
Comunidad de Madrid	70,8
Comunitat Valenciana	67,5
Ceuta	67,4
Cataluña	65,3

**22.** De cada millón de viajeros, ¿cuántos corresponden a cada sector?

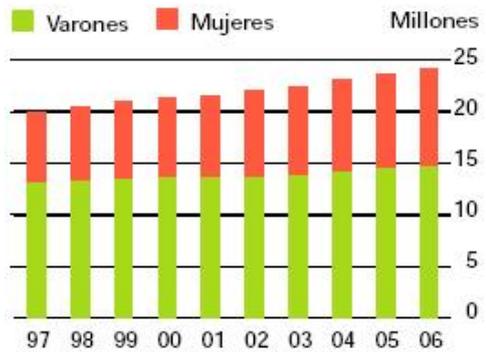
Viajeros que utilizan transporte interurbano. 2007



Fuentes: INE, RENFE, FEVE, D. Gral. de Aviación Civil y D. Gral. de Puertos y Costas

**23.** ¿Cuántos conductores había en el año 2002? ¿Cuántos eran hombres y cuántas mujeres?

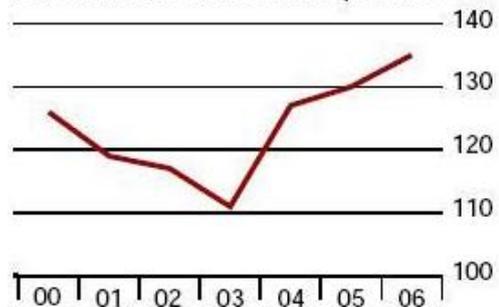
Censo de conductores



Fuente: Dirección General de Tráfico

**24.** ¿Entre qué años aumentaron más los detenidos por infracciones penales?

Tasa de detenidos  
Por cada 1.000 infracciones penales



Fuente: Ministerio del Interior

# Probabilidad

## Contenidos

1. Experimentos aleatorios  
Espacio muestral y sucesos  
Técnicas de recuento  
Operaciones con sucesos  
Propiedades
2. Probabilidad  
Probabilidad de un suceso  
Regla de Laplace  
Propiedades de la probabilidad  
Probabilidad experimental  
Simulación

## Objetivos

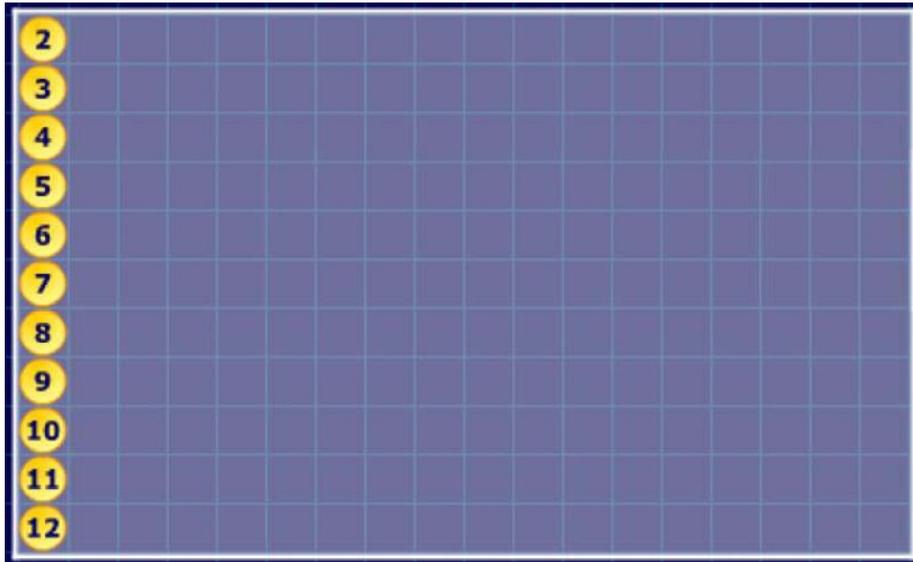
- Distinguir los experimentos aleatorios de los que no lo son.
- Hallar el espacio muestral y distintos sucesos de un experimento aleatorio.
- Realizar operaciones con sucesos.
- Determinar si dos sucesos son compatibles o incompatibles.
- Calcular la probabilidad de un suceso mediante la regla de Laplace.
- Calcular probabilidades mediante la experimentación.
- Conocer y aplicar las propiedades de la probabilidad.

**Antes de empezar**

**Investiga jugando**

Se tiran dos dados, la ficha cuyo número coincide con la suma de los resultados avanza una casilla. Se vuelven a tirar los dados hasta que una ficha llegue al final, ¿por cuál apostarías?

Antes de practicar con la escena, contesta la siguiente pregunta: ¿tienen todas las fichas la misma probabilidad de ganar?



Ahora practica con la escena para ver si tu respuesta es correcta.

Investiga por qué gana casi siempre la misma ficha. Te damos algunas preguntas para dirigir tu investigación.

¿Por qué no hay ninguna ficha con el 1?

¿Qué tiene que ocurrir para que avance la ficha con el número 2?

¿Y para que avance la ficha con el número 3?

Pulsa en el botón  para ver un video.

Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 1. Experimentos aleatorios

### 1.a. Espacio muestral y sucesos

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO 1.** Define:

EXPERIMENTO ALEATORIO:	
EXPERIMENTO DETERMINISTA:	

**EJERCICIO 2.** Completa:

- El \_\_\_\_\_ es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se suele designar con la letra \_\_\_\_\_.
- Cada uno de estos posibles resultados se llama \_\_\_\_\_.
- Llamaremos \_\_\_\_\_ a cualquier subconjunto del espacio muestral.
- El mismo espacio muestral es un suceso llamado \_\_\_\_\_ y el conjunto vacío,  $\emptyset$ , es el \_\_\_\_\_.

Cuando hayas comprendido bien los conceptos ... Pulsa en  para hacer un ejercicio.

### EJERCICIO

1. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y en caso afirmativo halla su espacio muestral:
  - a) Extraer una carta de una baraja española y anotar el palo.
  - b) Pesar un litro de aceite.
  - c) Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos los catetos.
  - d) Elegir sin mirar una ficha de dominó.
  - e) Averiguar el resultado de un partido de fútbol antes de que se juegue.
  - f) Sacar una bola de una bolsa con 4 bolas rojas.
  - g) Sacar una bola de una bolsa con 1 bola roja, 1 verde, 1 azul y 1 blanca.
  - h) Lanzar al aire una moneda y observar el tiempo que tarda en llegar al suelo.

Usa la escena para repasar los conceptos que has visto. Prueba con los distintos experimentos aleatorios.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.b. Técnicas de recuento

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO.** Completa:

Se llaman experimento compuesto al formado por \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_.

En estos casos el espacio muestral se puede obtener utilizando alguna de estas técnicas:

- Tabla \_\_\_\_\_.
- Diagrama \_\_\_\_\_.

Si el primer experimento tiene \_\_\_ resultados distintos y el segundo \_\_\_\_, el número de resultados del experimento compuesto es \_\_\_\_\_.

Cuando hayas comprendido los conceptos ... Pulsa en  para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIO

2. Calcula las posibilidades mediante un diagrama de árbol:

- En un equipo de fútbol-sala disponen para jugar de pantalones blancos o negros, y de camisetas rojas, azules o verdes. ¿De cuántas maneras se pueden vestir para un partido?
- Se tira una moneda y un dado, ¿cuáles son los resultados posibles?
- Se tira una moneda, si sale cara se saca una bola de la urna A que contiene una bola roja, una azul y una verde; y si sale cruz se saca de la urna B en la que hay una bola roja, una azul, una blanca y una negra. Escribe los posibles resultados.
- Marta y María juegan un campeonato de parchís, vence la primera que gane dos partidas seguidas o tres alternas. ¿De cuántas maneras se puede desarrollar el juego?

Realiza el ejercicio sobre el *lanzamiento de dos dados* en la pestaña "tabla de doble entrada" de la escena. Cuando lo hayas hecho correctamente, observa en la pestaña "diagrama de árbol" cómo se pueden representar todos los resultados posibles del experimento *lanzar una moneda 3 veces* usando un diagrama de árbol.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.c. Operaciones con sucesos

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO.** Completa:

Dados dos sucesos A y B de un espacio muestral E, llamaremos:

- Suceso **contrario** de A \_\_\_\_\_.
- Suceso **unión** de A y B \_\_\_\_\_.
- Suceso **intersección** de A y B \_\_\_\_\_.
- Sucesos **incompatibles** \_\_\_\_\_.

Utiliza la escena para ver diferentes sucesos y operaciones con ellos, de los experimentos aleatorios "tirar un dado" y "extraer una bola".

### EJERCICIO de Refuerzo

a) En el experimento aleatorio "tirar un dado", describe los sucesos:

- A : "salir impar" = { \_\_\_\_\_ }
- B : "salir mayor que 4" = { \_\_\_\_\_ }
- $A \cap B$  = { \_\_\_\_\_ }
- $A \cup B$  = { \_\_\_\_\_ }
- $\bar{A}$  = { \_\_\_\_\_ }
- $\bar{A} \cap B$  = { \_\_\_\_\_ }

Cuando hayas comprendido los conceptos ...

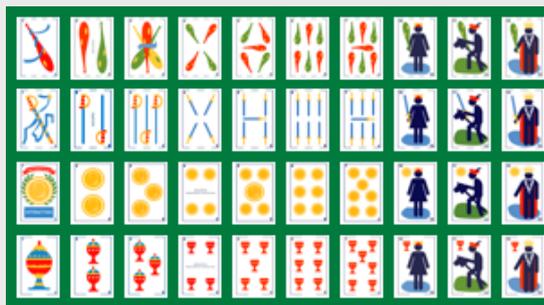
Pulsa en



para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIO

3. Considera el experimento aleatorio de extraer una carta de la baraja.



Expresa con uniones e intersecciones de A y de B, o con el contrario, los siguientes sucesos:

- |                     |                   |                                    |
|---------------------|-------------------|------------------------------------|
| a) A="salir figura" | B="salir bastos"  | "Que salga figura o sea de bastos" |
| b) A="salir un rey" | B="salir copas"   | "Salir copas pero que no sea rey"  |
| c) A="salir un as"  | B="salir oros"    | "Que no salga un as ni de oros"    |
| d) A="salir un rey" | B="salir espadas" | "Salir el rey de espadas"          |

Cuando acabes ...

Pulsa



para ir a la página siguiente.



## 2. Probabilidad

### 2.a. Probabilidad de un suceso

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

#### EJERCICIO 1:

Dado un suceso S,

¿qué indica la probabilidad de S? \_\_\_\_\_

¿qué significa que dicha probabilidad esté próxima a 1? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la probabilidad del suceso seguro? \_\_\_\_\_

¿Qué es la frecuencia relativa? \_\_\_\_\_

¿Qué establece la **ley de los grandes números**? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Practica con la escena para ver las frecuencias de dos experimentos aleatorios; el resultado obtenido al lanzar un dado y la puntuación más alta al lanzar dos dados.

#### EJERCICIO 2:

En el experimento "lanzar un dado", ¿qué valor asignarías a la probabilidad de que salga un 4? \_\_\_\_\_

En el experimento "lanzar dos dados", ¿qué valor asignarías a la probabilidad de que el mayor de los números obtenidos sea un 4? \_\_\_\_\_

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 2.b. Regla de Laplace

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

#### EJERCICIO 1. Define:

Sucesos equiprobables: \_\_\_\_\_

Experimento regular: \_\_\_\_\_

#### EJERCICIO 2. Completa:

  $P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

Practica la regla de Laplace con la escena de este apartado. En la escena tienes tres experimentos para practicar: la extracción de una bola de una urna, el lanzamiento de dos dados para elegir la puntuación mayor y el lanzamiento de 3 monedas.

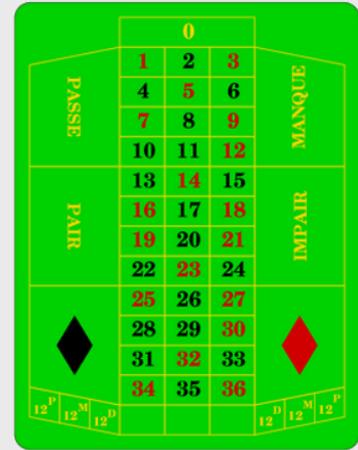
Cuando hayas comprendido los conceptos ... Pulsa en  para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIO

5. La ruleta es un conocido juego de los casinos. Consiste en una rueda equilibrada, dividida en 37 casillas numeradas del 0 al 36. El 0 es de color verde y si sale gana la banca. Hay diferentes tipos de apuestas, a un número sólo, a "par" o a "impar", a "rojo" o a "negro", a "passe" ( $n^o > 18$ ) o a "falte" ( $n^o < 18$ ), a una columna, ...

Calcula las siguientes probabilidades:

- a)  $P(17) =$
- b)  $P(\text{"impar"}) =$
- c)  $P(\text{"2ª columna"}) =$
- d)  $P(\text{"par y rojo"}) =$
- e)  $P(\text{"impar y falte"}) =$
- f)  $P(\text{"rojo"}) =$



Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 2.c. Propiedades de la probabilidad

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

#### EJERCICIO:

Escribe las 3 propiedades fundamentales de la probabilidad:

- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_

Escribe 2 propiedades de la probabilidad que se deducen de las anteriores:

- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_

Observa en la escena el uso de las propiedades de la probabilidad.

Pulsa en  para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIO

6. En la última evaluación, en mi clase aprobaron las Matemáticas el 67% y el Inglés el 63%, el 38% aprobaron las dos asignaturas. Elegido un estudiante de la clase al azar, calcula la probabilidad de que:

- a) Haya aprobado alguna de las dos.
- b) No haya aprobado ninguna de las dos.
- c) Haya aprobado sólo las Matemáticas.
- d) Haya aprobado sólo una de las dos.

Quando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2.d. Probabilidad experimental

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO.** Completa:

La ley de Laplace nos permite calcular la probabilidad de \_\_\_\_\_, pero si la experiencia es irregular desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos, entonces es preciso recurrir a \_\_\_\_\_.

La probabilidad **experimental** es la probabilidad asignada a un suceso mediante el cálculo de la \_\_\_\_\_ del mismo al repetir el experimento muchas veces.

Cuanto mayor es el número de pruebas realizadas más se aproxima el valor obtenido al valor desconocido de la \_\_\_\_\_. El número de pruebas a realizar dependerá del experimento y del nº de sus \_\_\_\_\_.

Observa en la escena dos ejemplos de experimentos irregulares y cómo repitiéndolos muchas veces las frecuencias relativas se estabilizan y se aproximan a la probabilidad teórica.

Pulsa en  para hacer unos ejercicios.

### EJERCICIO

7. Al tirar una chincheta puede caer con la punta hacia arriba o hacia abajo. Para averiguar la probabilidad de cada uno de estos sucesos, se ha realizado el experimento muchas veces obteniendo los resultados dados en la tabla. A la vista de ellos, ¿qué probabilidad asignarías al suceso "caer con la punta hacia abajo"?

Nº de tiradas	10	50	100	500	1000
Punta hacia arriba	7	29	65	337	668



Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2.e. Simulación de experimentos

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

**EJERCICIO.** Contesta:

¿En qué consiste la simulación de experimentos aleatorios? \_\_\_\_\_

¿Qué ocurre al pulsar la tecla RAND (RAN#, RANDOM...) de tu calculadora? \_\_\_\_\_

Practica la simulación con la aplicación que tienes bajo la explicación teórica. Introduce números entre 0 y 1 y pulsa el botón  para ver cómo la aplicación transforma tu número en un lanzamiento del dado.

Cuando acabes ... Pulsa  para ir a la página siguiente.



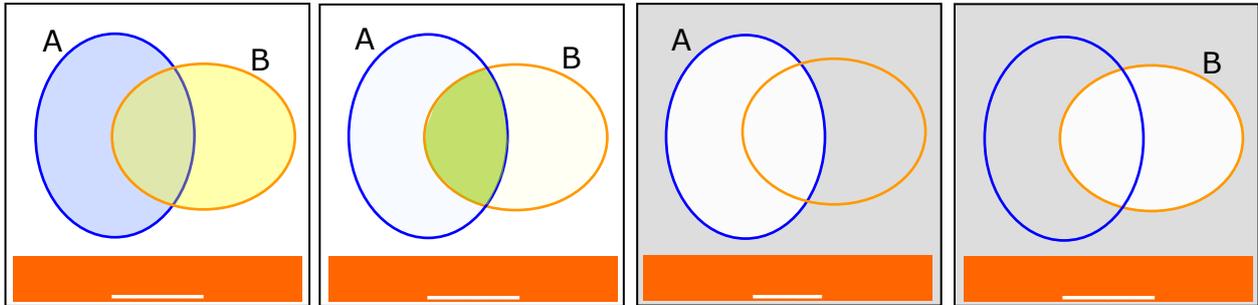
## Recuerda lo más importante – RESUMEN

### Espacio muestral y sucesos

- \_\_\_\_\_, el que no se puede predecir el resultado.
- **Espacio muestral** conjunto de todos los \_\_\_\_\_.
- Llamaremos **suceso** a \_\_\_\_\_ del espacio muestral.
- Sucesos \_\_\_\_\_ si no se pueden realizar a la vez.

### Operaciones con sucesos

- Suceso \_\_\_\_\_ de A y B,  $A \cup B$ , es el que ocurre cuando ocurre A o B, alguno de los dos.
- Suceso **intersección** de A y B,  $A \cap B$ , suceso que ocurre cuando \_\_\_\_\_.
- Suceso **contrario** de A al que ocurre cuando \_\_\_\_\_, lo indicaremos  $\bar{A}$ .



### Calcular probabilidades

- En experimentos regulares, cuando los sucesos elementales son equiprobables, con la **Regla de Laplace**.

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

- Si el experimento no es regular se recurre a la \_\_\_\_\_, tomando la probabilidad de A como su frecuencia \_\_\_\_\_ al repetir el experimento muchas veces.

### Propiedades de la probabilidad

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(E) = 1$ ,  $P(\emptyset) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Probabilidad de la unión
  - A y B incompatibles:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - A y B compatibles:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Pulsa  para ir a la página siguiente



## Para practicar

En esta unidad encontrarás **Ejercicios de sucesos, regla de Laplace y propiedades de la probabilidad y Problemas con probabilidades**. Haz al menos uno de cada clase y una vez resuelto comprueba la solución.

### Ejercicios de sucesos, regla de Laplace y propiedades de la probabilidad

#### ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS

1. Elegimos una ficha de dominó al azar,  
 a) Describe los sucesos:  
     A="sacar \_\_\_\_\_"  
     B="sacar \_\_\_\_\_"  
 b) Escribe  $A \cup B$  y  $A \cap B$ .

2. Escribe el espacio muestral del experimento resultante de tirar 3 monedas. Considera los sucesos:  
 A="Salir \_\_\_\_\_"  
 B="Salir \_\_\_\_\_"  
 Escribe  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  y el suceso contrario de B.

3. En una urna hay 15 bolas numeradas del 1 al 15, se extrae una de ellas; considera los sucesos:  
 A="Sacar \_\_\_\_\_"  
 B="Sacar \_\_\_\_\_"  
 Escribe  $A \cup B$  y  $A \cap B$ .

4. Lanzamos un dado dodecaédrico y anotamos el nº de la cara superior. Describe los sucesos:  
 A="Sacar \_\_\_\_\_"  
 B="Sacar \_\_\_\_\_"  
 Escribe  $A \cap B$ ,  $A \cap \bar{B}$  y  $\bar{A} \cap \bar{B}$ .



#### REGLA DE LAPLACE

5. En una caja hay \_\_\_ bolas rojas, \_\_\_ verdes y \_\_\_ azules. Se extrae una bola y se anota el color, calcula la probabilidad de que sea \_\_\_\_\_.

6. Se elige al azar un nº entre los primeros \_\_\_ naturales (a partir del 1). Calcula la probabilidad de los sucesos:  
 A="salir un nº mayor que \_\_\_ y menor que \_\_\_".  
 B="Salir un cuadrado perfecto"

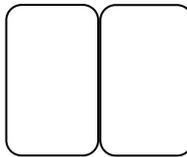
7. De una baraja de 40 (española) se extrae una carta, calcula la probabilidad de los sucesos:

A="Salir \_\_\_\_\_"

B="No salir \_\_\_\_\_"

8. Lanzamos dos dados y nos fijamos en la \_\_\_\_\_ de las puntuaciones. Calcula la probabilidad de que sea un \_\_\_\_\_.

9. Encima de la mesa tenemos las cartas de una baraja que aparecen abajo, sacamos otra carta y nos fijamos en su número, calcula la probabilidad de que la suma de los números de las tres cartas sea 15.



10. Extraemos una ficha de dominó, calcula la probabilidad de que la suma de los puntos sea menor que \_\_\_\_\_.

11. Con un \_\_\_\_\_, un \_\_\_\_\_ y un \_\_\_\_\_, formamos todos los números de tres cifras posibles, si elegimos uno de estos al azar, calcula la probabilidad de que acabe en \_\_\_\_\_.

12. Al girar la ruleta de la figura, calcula la probabilidad de que salga \_\_\_\_\_ y mayor que \_\_\_\_\_.



**PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD**

13. La probabilidad de un suceso es \_\_\_\_\_, calcula la del suceso contrario.

14. La probabilidad de un suceso A es  $P(A)=$ \_\_\_\_\_, la de otro suceso B es  $P(B)=$ \_\_\_\_\_ y la de la intersección de ambos es  $P(A \cap B)=$ \_\_\_\_\_. Calcula la probabilidad de  $A \cup B$ .

15. Considera dos sucesos A y B de un experimento aleatorio. Si  $P(A)=$ \_\_\_\_;  $P(A \cup B)=$ \_\_\_\_\_ y  $P(A \cap B)=$ \_\_\_\_; calcula  $P(\bar{B})$ .

16. Un dado está trucado de manera que la probabilidad de sacar un nº \_\_\_\_\_ es \_\_\_\_\_; además  $P(1)=P(3)=P(5)$ . Calcula la probabilidad de sacar un \_\_\_\_.

**Problemas con probabilidades**

**EN LA REUNIÓN**

17. A una reunión asisten \_\_\_\_ hombres y \_\_\_\_ mujeres. La mitad de los hombres y la cuarta parte de las mujeres tienen 40 años o más. Elegida una persona al azar calcula la probabilidad de que sea \_\_\_\_\_.

*Sugerencia: completa la tabla.*

	40 o más	<40	
HOMBRE			
MUJER			

**MENÚ DEL DÍA**

18. En un restaurante ofrecen un menú que consta de primer plato a elegir entre ensalada, pasta o legumbres; un segundo plato a elegir entre carne o pescado; y postre a elegir entre fruta o helado. Ana elige su menú al azar, ¿qué probabilidad hay de que coma "\_\_\_\_\_"?

*Sugerencia: haz un diagrama de árbol para ver de cuántas formas se puede elegir el menú.*

**FÚTBOL O BALONCESTO**

19. En un instituto el \_\_\_% de los estudiantes son aficionados al fútbol y el \_\_\_% lo son al baloncesto. Hay un \_\_\_% que son aficionados a ambos deportes. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no sea aficionado al fútbol ni al baloncesto.

*Sugerencia: usa diagramas.*

**MONEDAS DEL BOLSILLO**

20. Llevo en el bolsillo 2 monedas de 50 céntimos, dos de 20 céntimos y dos de 10 céntimos. También llevo un agujero por el que se me caen dos y las pierdo. Calcula la probabilidad de haber perdido \_\_\_\_\_.

*Sugerencia: haz una tabla de doble entrada.*

**FALTAN CARTAS**

21. He perdido algunas cartas de una baraja. Si de entre las que me quedan saco una al azar, la probabilidad de que sea de \_\_\_\_\_ es \_\_\_\_\_, de que sea \_\_\_\_\_ es \_\_\_\_\_ y de que sea \_\_\_\_\_ o de \_\_\_\_\_ es \_\_\_\_\_. ¿Está el \_\_\_\_\_ entre las cartas que me quedan?

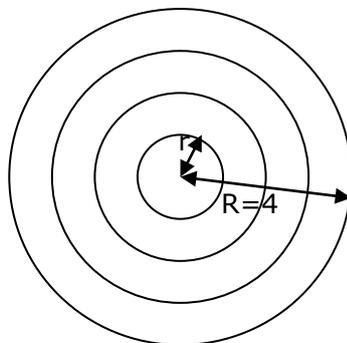
*Sugerencia: calcula la probabilidad del suceso intersección.*

**LAS GRULLAS DE LA LAGUNA**

22. A un humedal llegan todos los años bandadas de grullas en su camino a zonas cálidas. Para observar cuántas hay, se ha capturado y anillado una muestra de \_\_\_ grullas. Posteriormente se observan \_\_\_ de las que \_\_\_ llevan anilla, ¿cuántas grullas estimaremos que hay?

**DAR EN LA DIANA**

23. Se supone que la probabilidad de acertar al tirar un dardo en cualquier punto de la diana es la misma. Calcula la probabilidad de acertar en la zona de color \_\_\_\_\_.



Pulsa para ir a la página siguiente

## Autoevaluación



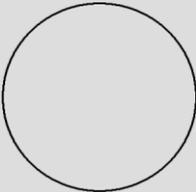
Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.

1 Escribimos cada una de las letras de la palabra \_\_\_\_\_ en un papel y sacamos una al azar. Escribe el suceso "salir vocal".

2 Escribe el suceso contrario del calculado en ejercicio anterior.

3 En una bolsa hay 100 bolas numeradas del 0 al 99. Se extrae una al azar, calcula la probabilidad de que en sus cifras esté el \_\_\_\_.

4 En una bolsa hay \_\_\_\_ bolas rojas, \_\_\_\_ bolas verdes y \_\_\_\_ azules. Se saca una bola al azar, calcula la probabilidad de que \_\_\_\_\_.

5  Calcula la probabilidad de rojo en la ruleta de la figura.

6 Se saca una carta de una baraja de 40, calcula la probabilidad de que sea de \_\_\_\_ o un \_\_\_\_.

7 Si A y B son dos sucesos tales que  $P(A)=$ \_\_\_\_,  $P(B)=$ \_\_\_\_ y  $P(A \cap B)=$ \_\_\_\_. Calcula  $P(A \cup B)$ .

8 Los resultados de un examen realizado por dos grupos de 3º ESO se muestran en la tabla adjunta. Seleccionado un estudiante al azar calcula la probabilidad de que sea del grupo \_\_\_\_ y \_\_\_\_\_.

	aprueban	suspenden
Grupo A		
Grupo B		

9 Un dado cúbico está trucado de manera que la probabilidad de sacar un \_\_\_\_\_ es \_\_\_\_\_ veces la probabilidad de cualquiera de las otras caras. Calcula la probabilidad de obtener un \_\_\_\_\_.

10 Se lanzan una moneda y un dado, calcula la probabilidad de que salga \_\_\_\_\_ y nº \_\_\_\_\_.

No olvides visitar el enlace [Para saber más](#) para ampliar tus conocimientos.