matemáticas

1

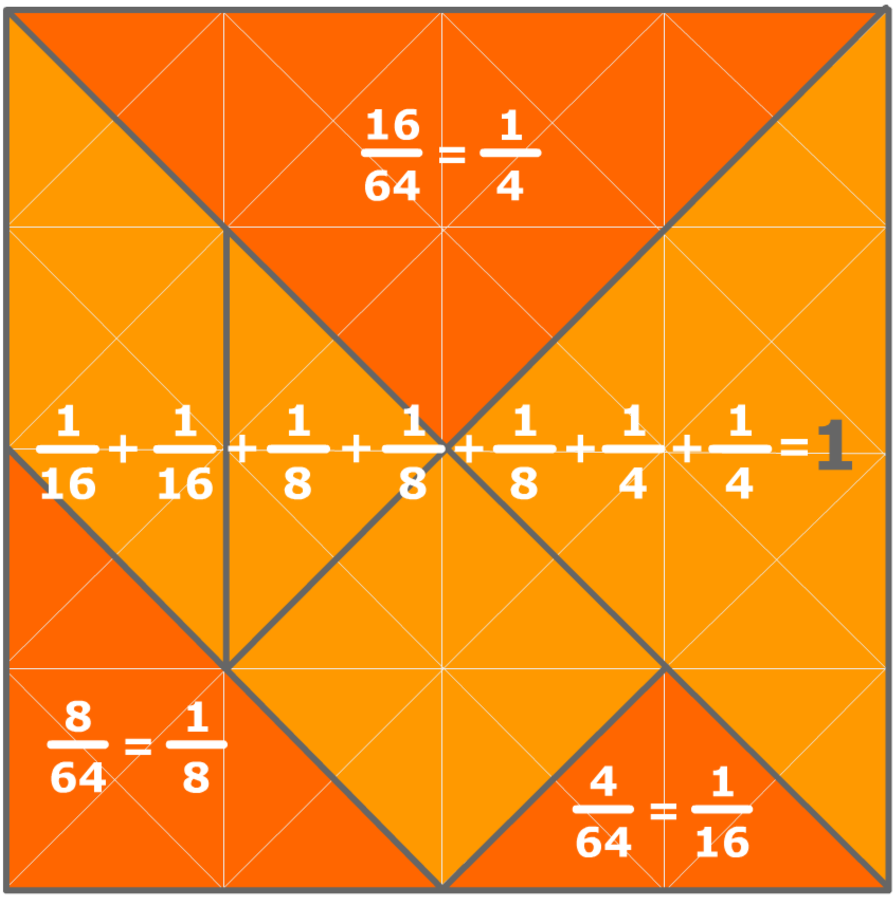
Los números racionales

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Identificar, representar y ordenar números racionales.
- Efectuar operaciones con fracciones.
- Expresar fracciones como números decimales y números decimales como fracciones.
- Calcular potencias con exponente entero y efectuar operaciones con potencias.
- Aproximar números y calcular el error absoluto y relativo.
- Cómo se expresa un número en notación científica y cómo se realizan operaciones con números en esta notación.
- Utilizar los números racionales para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.

Antes de empezar



Investiga

Con los números enteros es fácil calcular el siguiente de un número: El siguiente de -3 es -2, el siguiente es -1, el siguiente es 0, el siguiente es 1, el siguiente es 2, y así sucesivamente.

La cosa no es tan clara si los números son fraccionarios o decimales. Intenta encontrar el siguiente de estos números:

2/3   1,6   1,675   1,67555...   1,6799....

1. Números racionales

Decimales periódicos

Una fracción es un cociente entre dos números enteros. La división de esos dos números da lugar a una **expresión decimal** con un grupo de cifras que se repiten periódicamente, el llamado **periodo**, y que puede ser:

- Decimal **periódico puro**.

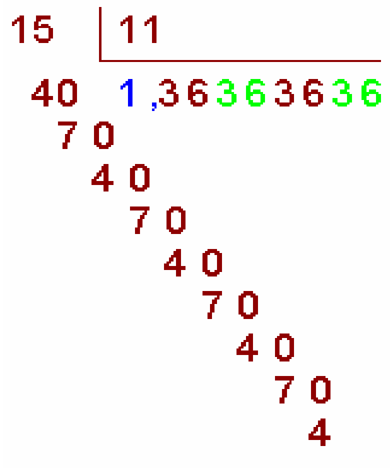
  12/11 = 1,090909... = $1,\overset{\frown}{09}$; **El periodo es 09**

- Decimal **periódico mixto**.

  31/15 = 2,06666... = $2,0\overset{\frown}{6}$; **El periodo es 6**

- Decimal **exacto**.

  1/8 = 0,125000... = 0,125



El resto siempre es menor que el divisor, luego a lo sumo en un número de pasos igual al divisor, el resto se va repetir y las cifras decimales del cociente también.

Fracción generatriz

Todo decimal periódico puede expresarse en forma de fracción a la que llamaremos **fracción generatriz** dedecimal en cuestión.
En estos casos no es necesario aplicar la fórmula sino que resulta más sencillo proceder de la siguiente manera:

Decimal exacto
Se divide el número sin coma, por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hay.

Decimal periódico puro
En el numerador se escribe la diferencia entre la parte entera seguida del periodo y la parte entera, en el denominador tantos nueves como cifras tiene el periodo.

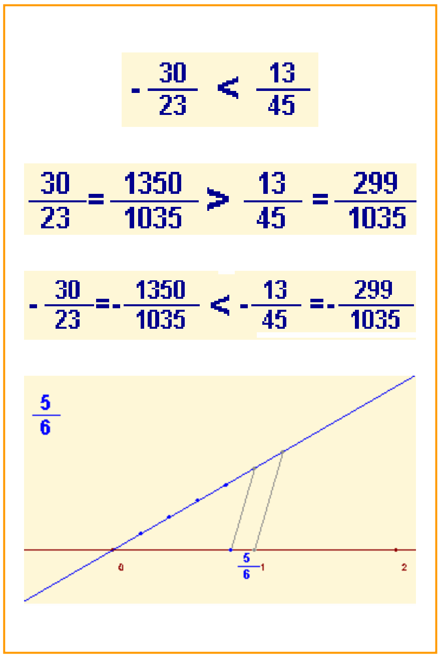
Decimal periódico mixto
En el numerador se escribe la parte entera seguida de las cifras hasta acabar el primer periodo menos la parte entera seguida de las cifras hasta comenzar el periodo, en el denominador tantos nueves como cifras tiene el periodo seguidos de tantos ceros como cifras hay entre la coma y el comienzo del periodo.

- Decimal exacto $x=71,52$
  2 cifras decimales:
  se multiplica por 10^2
  $100x=7152$
  $x = \frac{7152}{100}$

- Periódico puro $x=853,11...$
  Periodo con 1 cifra:
  se multiplica por 10
  $10x=8531,11..$
  Restando: $9x=8531-853$
  $x = \frac{7678}{9}$

- Periódico mixto $x=4,9368368..$
  1 cifra entre la coma y el periodo:
  se multiplica por 10
  $10x=49,368368...$
  Periodo con 3 cifras:
  se multiplica por 10^3
  $10000x=49368,368...$
  Restando: $9990x=49368-49$
  $x = \frac{49319}{9990}$

Ordenación y representación gráfica



Los números racionales están ordenados, de manera que siempre podemos comparar dos cualesquiera y podemos representarlos como puntos de una recta.

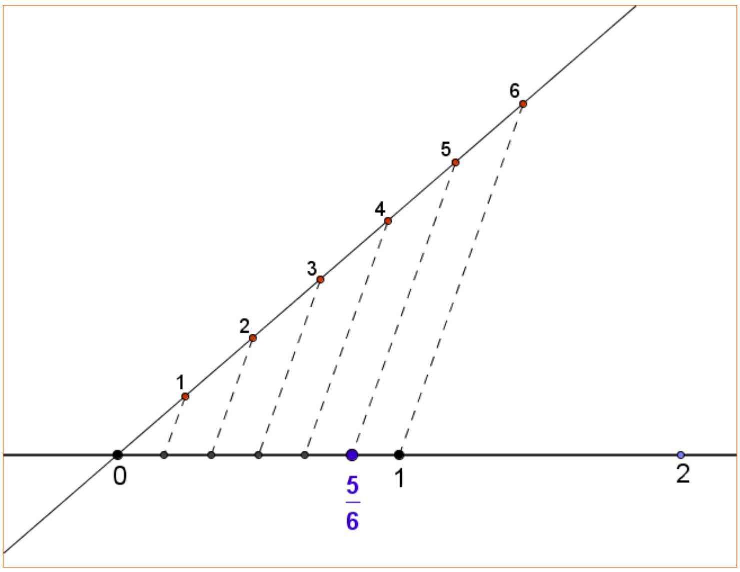
Para **comparar** dos números racionales los escribimos en forma de fracción, los reducimos a común denominador y comparamos los numeradores, teniendo en cuenta que:

- Cualquier fracción negativa es menor que cualquier fracción positiva.
- De dos fracciones positivas con igual denominador es menor la que tenga el menor numerador.
- De dos fracciones negativas con igual denominador es menor la que tenga el numerador con mayor valor absoluto.

Para **representarlos** gráficamente utilizaremos la técnica descrita en la imagen adjunta.

Para dividir un segmento en partes iguales, se dibuja una recta auxiliar desde un extremo del segmento, sobre ella se toma una medida arbitraria y con el compás se traslada tantas veces a la derecha como partes se quieran hacer.

Se une el último punto así obtenido con el otro extremo del segmento, y se trazan paralelas a este último segmento. Estas paralelas dividen el segmento inicial en las partes deseadas.



EJERCICIOS resueltos

1. Determina de qué tipo son los decimales que resultan de las fracciones siguientes:

$$\text{a) } \frac{92}{73} \qquad \text{b) } \frac{57}{22} \qquad \text{c) } \frac{27}{36}$$

Solución: a) 1.260273972602739726027397260274... Periódico puro
b) 2.590909090... Periódico mixto
c) 0.75 Decimal exacto

2. Calcula las fracciones generatrices de los siguientes decimales:

a) $x = 2{,}375 \Rightarrow 1000x = 2375 \Rightarrow x = \frac{2375}{1000}$

b) $x = 43{,}666... \Rightarrow 10x = 436{,}666... \Rightarrow 9x = 436 - 43 = 393 \Rightarrow x = \frac{393}{9} = \frac{131}{3}$

c) $x = 4{,}3666... \Rightarrow 10x = 43{,}666... \Rightarrow 100x = 436{,}666... \Rightarrow 90x = 436 - 43 \Rightarrow x = \frac{393}{90} = \frac{131}{30}$

3. Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones: $\frac{-5}{10}, \frac{3}{12}, \frac{-9}{9}, \frac{9}{5}, \frac{-9}{2}$

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 180. Reducimos las fracciones a denominador común:

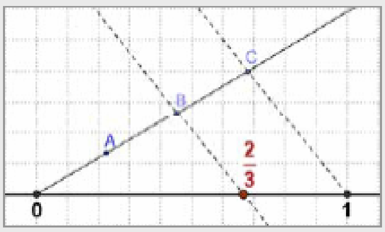
$\frac{-5}{10} = \frac{-90}{180}, \frac{3}{12} = \frac{45}{180}, \frac{-9}{9} = \frac{-180}{180}, \frac{9}{5} = \frac{324}{180}, \frac{-9}{2} = \frac{-810}{180}$.

Ahora ordenamos: primero los negativos de mayor a menor numerador en valor absoluto y luego los positivos de menor a mayor numerador:

$$\frac{-9}{2} < \frac{-9}{9} < \frac{-5}{10} < \frac{3}{12} < \frac{9}{5}$$

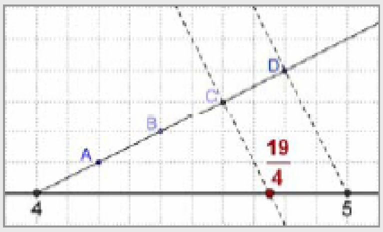
4. Represента en la recta las siguientes fracciones:

a) 2/3



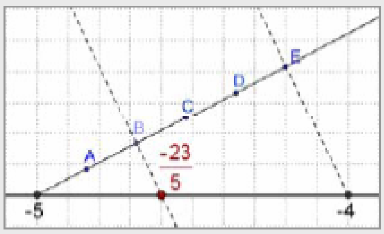
Se divide el segmento (0,1) en 3 partes iguales y se toman 2.

b) 19/4 =4 + 3/4



Puesto que 19/4 = 4 + 3/4, se divide el segmento (4,5) en 4 partes iguales y se toman 3.

c) -23/5 = -5 + 2/5

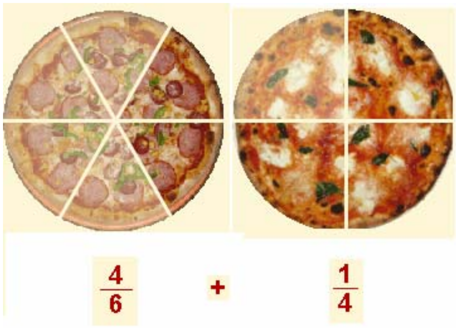


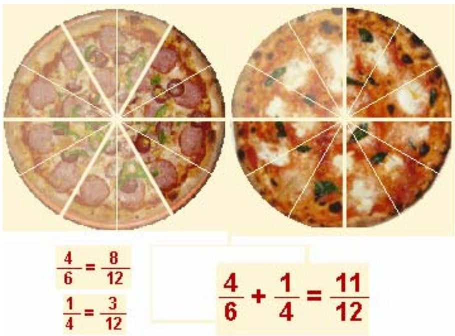
Puesto que -23/5 = -5 + 2/5, se divide el segmento (-5,-4) en 5 partes iguales y se toman 2.

2. Operaciones con fracciones

Suma y diferencia

Para ***sumar*** fracciones se reducen a denominador común, se deja el mismo denominador y se suman los numeradores.





Para ***restar*** fracciones se suma la primera con la opuesta de la segunda.

Propiedades de la suma

Conmutativa: El orden de los sumandos no cambia el resultado:

$$\frac{-12}{11}+\frac{-9}{4}=\frac{-48}{44}-\frac{99}{44}=\frac{-147}{44}$$
$$\frac{-9}{4}+\frac{-12}{11}=\frac{-99}{44}-\frac{48}{44}=\frac{-147}{44}$$

Asociativa: Cuando hay varios sumandos se pueden agrupar en cualquier orden:

$$\frac{-12}{11}+\left(\frac{-9}{4}+\frac{6}{13}\right)=\frac{-12}{11}+\frac{-93}{52}=\frac{-1647}{572}$$
$$\left(\frac{-12}{11}+\frac{-9}{4}\right)+\frac{6}{13}=\frac{-147}{44}+\frac{6}{13}=\frac{-1647}{572}$$

Elemento neutro: Cualquier fracción sumada con cero da la misma fracción. (Ten en cuenta que 0 = 0/1 = 0/2 = 0/3 = ...)

$$\frac{-12}{11}+\frac{0}{11}=\frac{-12+0}{11}=\frac{-12}{11}$$

Elemento opuesto: Dada una fracción cualquiera existe otra (su opuesta) que sumada con ella da cero:

$$\frac{-12}{11}+\frac{12}{11}=\frac{-12+12}{11}=\frac{0}{11}=0$$

Producto y cociente

Para ***multiplicar*** dos o más fracciones se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

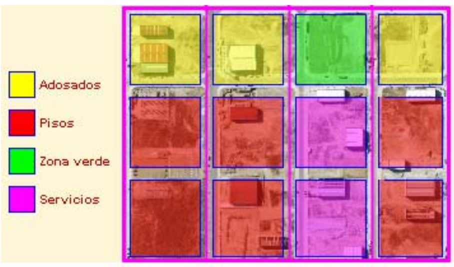
Para multiplicar una fracción por un número entero, se multiplica el numerador por el número y se deja el mismo denominador.

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$$

Si el número por el que se multiplica es −1 el resultado se puede poner de varias maneras.

$$\frac{a}{b}\cdot(-1)=\frac{a\cdot(-1)}{b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}=\frac{a}{-b}$$

El producto de fracciones puede entenderse como el resultado de calcular una fracción de otra fracción. En el ejemplo tenemos una parcela dividida en cuatro fases:



Las zonas de adosados representan 3/12 del total de la parcela, pero esa fracción puede interpretarse así: hay adosados en 3 fases de las 4 (3/4) y en cada fase ocupan 1 parte de cada 3 (1/3). Total

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{12}$$

La **inversa** de una fracción es otra fracción que se construye intercambiando en la fracción inicial el denominador con el numerador. ***Si el numerador inicial es cero la fracción no tiene inversa***.

$$\text{La inversa de } \frac{a}{b} \text{ es } \frac{b}{a} \text{ y se representa } \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Para **dividir** fracciones se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Propiedades del producto

Conmutativa: El orden de los factores no cambia el resultado:

$$\frac{-5}{2} \cdot \frac{-13}{7} = \frac{-5 \cdot (-13)}{2 \cdot 7} = \frac{65}{14}$$
$$\frac{-13}{7} \cdot \frac{-5}{2} = \frac{-13 \cdot (-5)}{7 \cdot 2} = \frac{65}{14}$$

Asociativa: Cuando hay varios factores se pueden agrupar en cualquier orden:

$$\frac{-5}{2} \cdot \left(\frac{-13}{7} \cdot \frac{-10}{5}\right) = \frac{-5}{2} \cdot \frac{130}{35} = \frac{-650}{70}$$
$$\left(\frac{-5}{2} \cdot \frac{-13}{7}\right) \cdot \frac{-10}{5} = \frac{65}{14} \cdot \frac{-10}{5} = \frac{-650}{70}$$

Elemento neutro: Cualquier fracción multiplicada por uno da la misma fracción.

$$\frac{-5}{2} \cdot 1 = \frac{-5}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{-5 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{-5}{2}$$

Elemento inverso: Dada una fracción cualquiera (*excepto las de numerador igual a cero*) existe otra (su inversa) que multiplicada con ella da uno:

$$\frac{-5}{2} \cdot \frac{2}{-5} = \frac{-5 \cdot 2}{2 \cdot -5} = \frac{-10}{-10} = 1$$

$\frac{2}{-5}$ es la **fracción inversa** de $\frac{-5}{2}$

Distributiva: Cuando se multiplica una fracción por una suma de fracciones se puede multiplicar la fracción por cada sumando y realizar la suma después:

$$\frac{10}{3} \cdot \left(\frac{14}{9} + \frac{-14}{8}\right) = \frac{10}{3} \cdot \frac{-14}{72} = \frac{-140}{216}$$
$$\frac{10}{3} \cdot \frac{14}{9} + \frac{10}{3} \cdot \frac{-14}{8} = \frac{140}{27} + \frac{-140}{24} = \frac{-140}{216}$$

La propiedad contraria de la propiedad distributiva es **sacar factor común**. Esta propiedad consiste en que cuando hay varios sumandos y todos ellos van multiplicados por un mismo factor, se puede hacer primero la suma de esos sumandos y multiplicar el resultado por el factor.

Operaciones combinadas

Cuando se van a efectuar operaciones combinadas (con fracciones u otro tipo de números) hay que tener en cuenta las siguientes ***reglas de prioridad***:

- ***Si no hay paréntesis***:
  - Se efectúan en primer lugar todos los productos y cocientes de izquierda a derecha.
  - Con los resultados obtenidos se hacen las sumas y restas, también de izquierda a derecha.

- ***Si hay paréntesis***:
  - Se efectúan primero las operaciones de los paréntesis de acuerdo con las reglas anteriores.
  - Si hay paréntesis anidados se van haciendo las operaciones del interior al exterior.
  - Debe tenerse en cuenta que los paréntesis pueden estar implícitos, por ejemplo, si en el numerador o en el denominador de una fracción hay operaciones, debe considerarse que están dentro de un paréntesis aunque éste no se haya escrito.

EJERCICIOS resueltos

5. Calcula $\frac{-1}{11}+\frac{9}{8}$ Mcm(11,8) = 88, luego $\frac{-1}{11}+\frac{9}{8}=\frac{-8}{88}+\frac{99}{88}=\frac{91}{88}$

6. Calcula $\frac{-9}{5}-\frac{-7}{12}$ Mcm(5,12) = 60, luego $\frac{-9}{5}-\frac{-7}{12}=\frac{-108}{60}-\frac{-35}{60}=\frac{-108+35}{60}=\frac{-73}{60}$

7. Calcula $\frac{-9}{5}-7$ $\frac{-9}{5}-7=\frac{-9}{5}-\frac{35}{5}=\frac{-44}{5}$

8. Calcula $\frac{-9}{5}-\frac{-7}{12}+\frac{2}{10}+9-\frac{-8}{5}$ Mcm(5,12,10)=60 luego

$$\frac{-9}{5}-\frac{-7}{12}+\frac{2}{10}+9-\frac{-8}{5}=\frac{-108}{60}+\frac{35}{60}+\frac{12}{60}+\frac{540}{60}+\frac{96}{60}=\frac{575}{60}=\frac{115}{12}$$

9. Calcula $\frac{-1}{7}\cdot\frac{-6}{-5}$ $\frac{-1}{7}\cdot\frac{-6}{-5}=\frac{6}{-35}=-\frac{6}{35}$

10. Calcula $\frac{-1}{7}:\frac{-6}{-5}$ $\frac{-1}{7}:\frac{-6}{-5}=\frac{(-1)\cdot(-5)}{7\cdot(-6)}=\frac{5}{-42}=-\frac{5}{42}$

11. Calcula $\frac{-1}{7}\cdot(-6)$ $\frac{-1}{7}\cdot(-6)=\frac{6}{7}$

12. Calcula $(-6)\cdot\frac{-1}{7}$ $(-6)\cdot\frac{-1}{7}=\frac{6}{7}$

13. Calcula $\frac{-1}{7}:(-6)$ $\frac{-1}{7}:(-6)=\frac{-1}{7\cdot(-6)}=\frac{-1}{-42}=\frac{1}{42}$

14. Calcula $(-6):\frac{-1}{7}$ $(-6):\frac{-1}{7}=\frac{(-6)\cdot 7}{-1}=\frac{-42}{-1}=42$

15. Calcula $\frac{4}{6}:4+\frac{1}{7}-\frac{6}{4}\cdot 3-\frac{2}{6}-2$

Antes de hacer ninguna operación simplificamos. Luego hacemos primero los productos y cocientes de izquierda a derecha y luego las sumas y restas. Recuerda simplificar siempre antes de operar.

$$\frac{2}{3}:4+\frac{1}{7}-\frac{3}{2}\cdot 3-\frac{1}{3}-2=\frac{2}{12}+\frac{1}{7}-\frac{9}{2}-\frac{1}{3}-2=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{9}{2}-\frac{1}{3}-2=\frac{7+6-189-14-84}{42}=\frac{-274}{42}=-\frac{137}{21}$$

16. Calcula $\frac{4}{6}+\left(\frac{1}{7}\cdot 7\right)\cdot 7-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}:\frac{7}{6}\right)$

Igual que antes, pero ahora los paréntesis alteran las prioridades.

$$\frac{2}{3}+1\cdot 7-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)=\frac{2}{3}+7-\frac{9}{14}=\frac{28+294-27}{42}=\frac{295}{42}$$

17. Calcula $\dfrac{\frac{5}{7}+\frac{3}{2}}{\frac{1}{7}+\frac{1}{2}}:\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{2}+\frac{1}{2}}$

$$\dfrac{\frac{5}{7}+\frac{3}{2}}{\frac{1}{7}+\frac{1}{2}}:\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{2}+\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{10+21}{14}}{\frac{2+7}{14}}:\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{2}}=\frac{31}{9}:\dfrac{\frac{2}{5}}{4}=\frac{31}{9}:\frac{2}{20}=\frac{31}{9}:\frac{1}{10}=\frac{310}{9}$$

3. Potencias de exponente entero

Definición

Sea **a** un número racional distinto de cero y **n** un número entero. Se llama **potencia** de **base** *a* y **exponente** *n* al número:

$$a^n = \begin{cases} a & si \quad n=1 \\ a\cdot a\cdot \overset{n\,veces}{\ldots}\cdot a & si \quad n>1 \\ 1 & si \quad n=0 \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=\frac{1}{a^{-n}} & si \quad n<0 \end{cases}$$

Operaciones con potencias

Cuando se van a efectuar operaciones combinadas y entre esas operaciones hay potencias, a las ***reglas de prioridad*** que conocíamos hay que añadir una nueva y en primer lugar:

- Se efectúan en primer lugar todas las potencias de izquierda a derecha.
- A continuación, todos los productos y cocientes de izquierda a derecha.
- Con los resultados obtenidos se hacen las sumas y restas, también de izquierda a derecha.

Las prioridades anteriores pueden alterarse con paréntesis, o también si pueden aplicarse algunas de las propiedades vistas en la página anterior (productos o cocientes de potencias de igual base)

Propiedades de las potencias

Para multiplicar potencias de igual base se deja la misma base y se suman los exponentes:

$$\left(\frac{-6}{9}\right)^3\cdot\left(\frac{-6}{9}\right)^2=\left(\frac{-6}{9}\right)^5$$

Para dividir potencias de igual base se deja la misma base y se restan los exponentes:

$$\frac{\left(\frac{2}{6}\right)^5}{\left(\frac{2}{6}\right)^3}=\left(\frac{2}{6}\right)^2$$

Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la base y se multiplican los exponentes:

$$\left(\left(\frac{-5}{6}\right)^5\right)^3=\left(\frac{-5}{6}\right)^{15}$$

Para elevar un producto a una potencia se puede elevar cada factor a esa potencia y multiplicar después:

$$(5\cdot 9)^4=5^4\cdot 9^4$$

Para elevar una fracción a una potencia se elevan a la misma el numerador y el denominador:

$$\left(\frac{-1}{9}\right)^4=\frac{(-1)^4}{9^4}$$

Ojo:

$$(-5)^4=625$$

$$-5^4=-625$$

EJERCICIOS resueltos

18. Calcula $\left(\frac{5}{9}\right)^4$ $\qquad \left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{5^4}{9^4} = \frac{625}{6561}$

19. Calcula $-\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}$ $\qquad -\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2} = -\left(\frac{5}{-2}\right)^2 = -\frac{25}{4}$

20. Calcula 3^{-4} $\qquad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

21. Calcula $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

22. Calcula $-\frac{5}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 : \frac{6}{7} : \frac{3}{4} : (-1)^0$

Hacemos primero las potencias y luego aplicamos las prioridades anteriores:

$$-\frac{5}{3} - \frac{1}{8} : \frac{6}{7} : \frac{3}{4} : 1 = -\frac{5}{3} - \frac{3}{28} : \frac{3}{4} : 1 = -\frac{5}{3} - \frac{1}{7} : 1 = -\frac{5}{3} - \frac{1}{7} = -\frac{38}{21}$$

23. Transforma 1000 en potencia de 10 $\qquad 1000 = 2^3 \cdot 5^3 = (2\cdot 5)^3 = 10^3$

24. Transforma 0,00001 en potencia de 10 $\qquad 0{,}00001 = \frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$

25. Transforma 16 en potencia de 2 $\qquad 16 = 2^4$

26. Transforma 0,0016 en potencia de 5 $\qquad 0{,}0016 = \frac{16}{10000} = \frac{1}{625} = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$

27. Expresa cada término como potencia de 10 y simplifica

$$\frac{(-0{,}1)^{-2} : (-1000)^2 \cdot (0{,}01)^2}{0{,}01^{-2} \cdot 10^{-2}} = \frac{\left(-\frac{1}{10}\right)^2 : \left(-10^3\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{10^2}\right)^{-2} \cdot 10^{-2}} = \frac{10^{-2} : 10^6 \cdot 10^{-4}}{10^4 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^{-8} \cdot 10^{-4}}{10^2} = \frac{10^{-12}}{10^2} = 10^{-14}$$

28. Expresa cada término como potencia de 4 y simplifica

$$\frac{16 \cdot \frac{1}{(-64)^{-2}} \cdot \frac{1}{64^{-2}}}{(-64) : 4} = \frac{4^2 \cdot \frac{1}{\left(-4^3\right)^{-2}} \cdot \frac{1}{\left(4^3\right)^{-2}}}{\left(-4^3\right) : 4} = \frac{4^2 \cdot 4^6 \cdot 4^6}{-4^3 : 4} = -\frac{4^{14}}{4^2} = -4^{12}$$

29. Simplifica todo lo posible la fracción siguiente de manera que el resultado quede en forma de productos y cocientes de potencias de exponente positivo.

$$\left(\frac{\left(2^{-2} \cdot 3\right)^2 \cdot 5^3}{2^3 \cdot \left(3 \cdot 7^3\right)^{-2}}\right)^2 = \left(\frac{2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 7^{-6}}\right)^2 = \left(\frac{3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6}{2^7}\right)^2 = \frac{3^8 \cdot 5^6 \cdot 7^{12}}{2^{14}}$$

4. Notación científica

Productos y cocientes por potencias de 10

Sea **n** un número entero positivo. Éstas son las reglas para multiplicar o dividir un número racional por 10^n:

- **Multiplicar por 10^n** (*equivale a dividir por 10^{-n}*)
  - Si el número es entero se añaden a la derecha tantos ceros como indique el exponente.
  - Si no es entero se desplaza la coma hacia la derecha tanto como indique el exponente, completando con ceros si es preciso.
- **Dividir por 10^n** (*equivale a multiplicar por 10^{-n}*)
  - Se desplaza la coma hacia la izquierda tantos lugares como indique el exponente añadiendo ceros si fuera necesario.

$$72639 \cdot 10^7 = 726390000000$$

$$\frac{72639}{10^7} = 72639 \cdot 10^{-7} = 0{,}0072639$$

$$12{,}88003 \cdot 10^7 = 128800300$$

$$\frac{50{,}83}{10^7} = 50{,}83 \cdot 10^{-7} = 0{,}00000508$$

Números muy grandes o muy pequeños

Se dice que un número está escrito en **notación científica** si tiene el siguiente aspecto:

$$\mathbf{c_0{,}c_1c_2..c_p \cdot 10^n}$$

donde c_0 es una cifra distinta de cero, c_1, c_2, ..., c_p son cifras decimales y n es un número entero (positivo, cero o negativo). Se dice que **n** es el **orden de magnitud** del número.

Este tipo de notación es especialmente adecuada para el tratamiento de números muy grandes o muy pequeños porque, a causa de su longitud, es fácil equivocarse con sus cifras y de esta manera el orden de magnitud nos informa con claridad de su tamaño.

El nombre es debido a que este tipo de números aparecen con frecuencia en el ámbito de la ciencia.

Con la calculadora

Para introducir en la calculadora números en notación científica como:

- $9{,}0043 \cdot 10^{13}$

  Teclea 9 [.] 0043 [EXP] 13

  Aparecerá: [9.0043 ^{13}]
- $6{,}0743 \cdot 10^{-18}$

  Teclea 6 [.] 0743 [EXP] [+/-] 18

  Aparecerá: [6.0743 $^{-18}$]

Si introduces:

- $900{,}43 \cdot 10^{13}$

  Teclea 900 [.] 43 [EXP] 13

  Aparecerá: [900.43 ^{13}]

  Y pulsando [=] sale el nº en notación científica: [9.0043 ^{15}]

Operaciones en notación científica

Basta tener en cuenta las operaciones con potencias. Fíjate en los ejemplos siguientes:

La galaxia de Andrómeda tiene un diámetro de 100000 años-luz y está situada a unos 2000000 de años-luz, ¿cuál es su diámetro y cuánto dista en km?

Velocidad de la luz:300000 km/sg

En un año:

$300000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 =$

$9.460.800.000.000$ km $=$

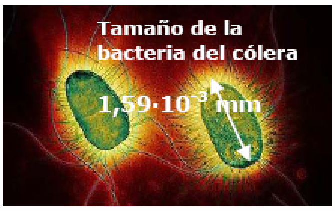
$\mathbf{9{,}4608 \cdot 10^{12}}$

Diámetro de la galaxia (km):

$10^5 \cdot 9{,}4608 \cdot 10^{12} = \mathbf{9{,}4608 \cdot 10^{17}}$

Distancia (km):

$2 \cdot 10^6 \cdot 9{,}4608 \cdot 10^{12} = \mathbf{1{,}8922 \cdot 10^{19}}$



¿Cuántos átomos de oxígeno caben a lo largo de una bacteria?

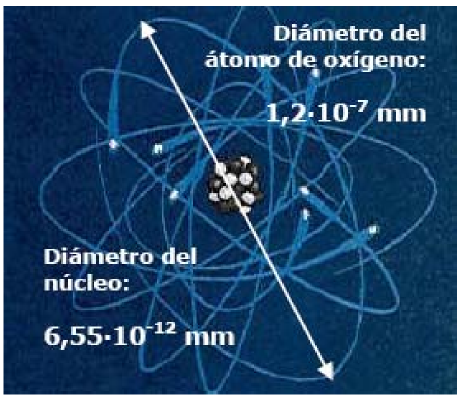
$$\frac{1{,}59 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-7}} = 1{,}325 \cdot 10^4$$

¿Cuántos núcleos de oxígeno caben a lo largo de un átomo?

$$\frac{1{,}2 \cdot 10^{-7}}{6{,}55 \cdot 10^{-12}} = 0{,}1832 \cdot 10^5$$

en notación científica

$$= 1{,}832 \cdot 10^4$$



EJERCICIOS resueltos

30. Calcula $63.785 \cdot 10^{8}$ — 6.378.500.000.000

31. Calcula $133{,}75078 \cdot 10^{10}$ — 1.337.507.800.000

32. Calcula $30189 \cdot 10^{-2}$ — $\frac{30189}{100} = 301{,}89$

33. Calcula $626{,}2 \cdot 10^{-5}$ — $\frac{626{,}2}{100000} = 0{,}006262$

34. Pasa a forma científica el número 94494000 — $9{,}4494 \cdot 10^{7}$

35. Pasa a forma científica el número 0,0000007308 — $7{,}308 \cdot 10^{-7}$

36. Efectúa las siguientes operaciones dejando el resultado en notación científica:

$(5{,}6733 \cdot 10^{2}) \cdot (1{,}6258 \cdot 10^{-6})$ — $9{,}22365114 \cdot 10^{-4}$

37. Efectúa las siguientes operaciones dejando el resultado en notación científica:

$(1{,}2319 \cdot 10^{-9}) \cdot (8{,}4798 \cdot 10^{-1})$

$$10{,}44626562 \cdot 10^{-10} = 1{,}044626562 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 1{,}044626562 \cdot 10^{-8}$$

38. Efectúa las siguientes operaciones dejando el resultado en notación científica:

$\frac{9{,}9989 \cdot 10^{11}}{1{,}6422 \cdot 10^{-10}}$ — $6{,}0887224455 \cdot 10^{21}$

39. Efectúa las siguientes operaciones dejando el resultado en notación científica:

$$\frac{1{,}3472 \cdot 10^{-10}}{3{,}217 \cdot 10^{4}}$$

$$0{,}4187752564501 \cdot 10^{-14} = 4{,}187752564501 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-14} = 4{,}187752564501 \cdot 10^{-15}$$

5. Medida de errores

Aproximaciones

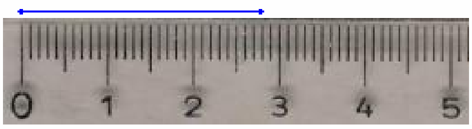
En la vida real suelen presentarse situaciones en las que no se puede, o no interesa realizar cálculos con valores exactos, bien porque éstos no se conocen, bien porque la información que ofrece el resultado exacto es irrelevante. En estas situaciones se recurre al cálculo con aproximaciones. En las imágenes de la derecha se te muestran algunas de estas situaciones en la vida real.

La manera más habitual de efectuar una aproximación es la denominada **redondeo**. Esta operación se puede aplicar a números enteros o a decimales. El concepto de redondeo es bastante intuitivo y lo entenderás perfectamente a partir de los ejemplos y de los ejercicios resueltos.

Hay otras formas de aproximación, pero las verás con más detalle el próximo curso.

Aprox. por defecto: 2,7   Aprox. por exceso: 2,8

Valor más probable: 2,75



Error absoluto y error relativo

Presentamos aquí una serie de medidas que se usan para controlar los errores en los cálculos aproximados.

- **Error absoluto**: Es la diferencia (en valor absoluto) entre el valor exacto y el aproximado. Tiene las mismas unidades que los valores que se usan.
- **Cota de error**: Es la longitud del intervalo, en torno al valor aproximado, en el que puede encontrarse el valor exacto. Esta medida se usa cuando no se conoce el valor exacto.
- **Error relativo**: Es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto. No tiene unidades y puede expresarse también en forma de porcentaje. Cuando el valor exacto no se conoce, el error relativo se puede calcular dividiendo la cota de error por el valor aproximado.

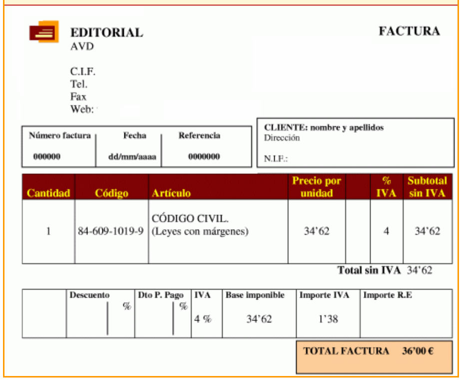
Hemos realizado una consulta en Internet usando varios buscadores y hemos obtenido los resultados que ves abajo. Observa que en casi todos se usa la palabra ***aproximadamente***.

Google: 120.000.000. Redondeo a las decenas de millón. El valor exacto estará entre 115.000.000 y 125.000.000
Ask: 26.900.000. Redondeo a las centenas de millar. El valor exacto estará entre 26.850.000 y 26.950.000
Yahoo: 269.000.000. Redondeo a las unidades de millón. El valor exacto estará entre 268.500.000 y 269.500.000

El valor exacto no es importante aquí. El valor aproximado es suficiente y nos permite comparar unos buscadores con otros.

Abajo tienes una factura de una editorial por la venta de un libro. En ella se indica que el precio del ejemplar sin IVA es de 34'62€ al que hay que sumar un 4% de IVA:

34'62 · 0'04 = 1'3848, pero como la menor unidad monetaria es el céntimo, en la factura **se redondea la cantidad a las centésimas**, es decir a 1'38€



EDITORIAL
AVD

C.I.F.
Tel.
Fax
Web:

FACTURA

Número factura	Fecha	Referencia
000000	dd/mm/aaaa	0000000

CLIENTE: nombre y apellidos
Dirección
N.I.F.:

Cantidad	Código	Artículo	Precio por unidad	% IVA	Subtotal sin IVA
1	84-609-1019-9	CÓDIGO CIVIL. (Leyes con márgenes)	34'62	4	34'62

Total sin IVA 34'62

Descuento	%	Dto P. Pago %	IVA	Base imponible	Importe IVA	Importe R.E
			4 %	34'62	1'38	

TOTAL FACTURA 36'00 €

EJEMPLO 1

En el ejemplo de la factura el IVA era el 4% de 34'62 €, es decir,

0'04 · 34'62 = 1'3848 € ≈ 1'38 €

Valor exacto del IVA: 1'3848
Valor aproximado: 1'38

ERROR ABSOLUTO = |1'3848 - 1'38| = 0'0048 €

ERROR RELATIVO $= \dfrac{0'0048}{1'3848} \approx 0'003466 \approx 0'35\ \%$

El error relativo es más significativo:

si el valor exacto hubiera sido 0'0148 y el aproximado 0'01, el error absoluto sería el mismo: 0'0048, pero

¡¡¡¡¡¡ el relativo sería $\dfrac{0'0048}{0'01} = 0'48 = 48\ \%$ **!!!!!!!**

EJEMPLO 2

Resultados Google:
Valor exacto: DESCONOCIDO
Valor aproximado: 120000000

Resultados Ask:
Valor exacto: DESCONOCIDO
Valor aproximado: 26.900.000

Sin conocer el valor exacto no podemos hallar el error absoluto, pero las colas de ceros sugieren un redondeo a las decenas de millón en Google y a las centenas de millar en Ask. Los valores exactos estarán entre 115.000.000 y 125.000.000 para Google y entre 26.850.000 y 26.950.000 para Ask.

Google

COTA DE ERROR = |125000000 - 120000000| = 5000000

ERROR RELATIVO $= \dfrac{5000000}{120000000} \approx 0'0417 \approx 4'17\ \%$

Ask

COTA DE ERROR = |26950000 - 26900000| = 50000

ERROR RELATIVO $= \dfrac{50000}{26900000} \approx 0'001859 \approx 0'19\ \%$

cidead

EJERCICIOS resueltos

40. Redondea a las centésimas 171,39664703 171,40

41. Redondea a las diezmilésimas y pasa a notación científica 0,0065439

$0{,}0065 = 6{,}5\cdot 10^{-3}$

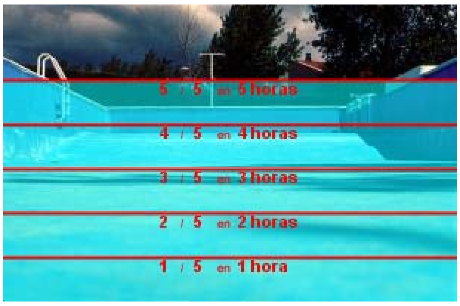
42. Redondea a las decenas de millar y pasa a notación científica 859.417.590

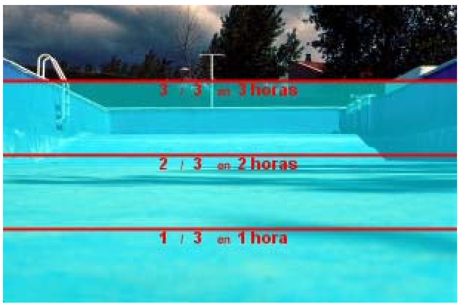
$859.420.000 = 8{,}5942\cdot 10^{8}$

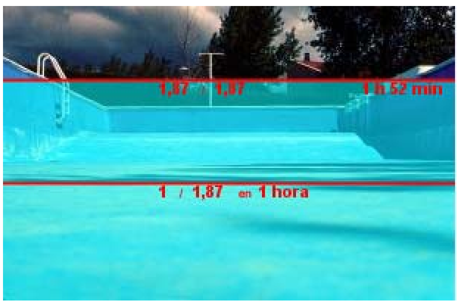
43. 460.000.000 es un redondeo a las decenas de millón de 456.099.072. Calcula el error absoluto y el relativo.

Error absoluto = |460.000.000-456.099.072| = 3.900.928

Error relativo = 3.900.928 / 456.099.072 ≈ 0,0085528085 ≈ 0,86%







6. Aplicaciones

Problemas de aplicación

PROBLEMA 1
La piscina de un chalet dispone de dos entradas de agua para su llenado. Si sólo se usa la primera, la piscina tarda 5 horas en llenarse. Si sólo se usa la segunda tarda 3 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse con los dos grifos abiertos a la vez?

SOLUCIÓN:
Si tarda 5 horas en llenarse con el primer grifo, cada hora llenará 1/5 del total de la piscina.

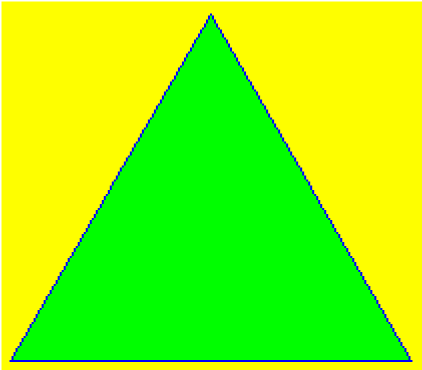
Si con el segundo tarda 3 horas, cada hora llenará 1/3 de la piscina.

Si están abiertos los dos, cada hora llenará

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$$

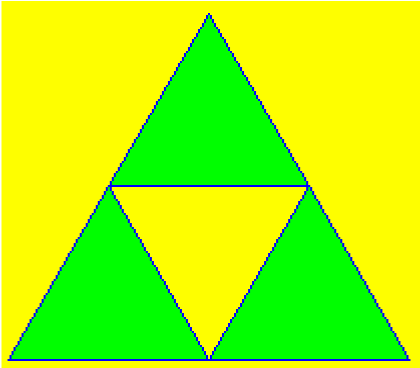
de la piscina, por lo que tardará en llenarla 15/8 de hora, es decir, 1,87 horas = **1 hora 52 minutos**.

PROBLEMA 2.



El **triángulo de Sierpinski** es una figura geométrica de un tipo especial denominado **fractal**. Se construye en forma recursiva a partir de un triángulo equilátero.

El triángulo de Sierpinski de **nivel 1** se obtiene quitándole al triángulo anterior el triángulo equilátero que se obtiene uniendo los puntos medios de cada lado.

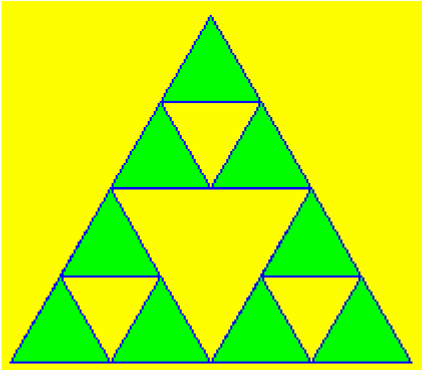


El de **nivel 2** se obtiene repitiendo el proceso sobre los tres triángulos que forman el triángulo de Sierpinski de nivel 1.

El de **nivel 3** es lo mismo aplicado al nivel 2 y el proceso continúa de forma indefinida. *De hecho, el auténtico triángulo de Sierpinski es la figura geométrica que resulta de aplicar este proceso infinitas veces*.

Si el área del triángulo inicial es de 1 m^2, ¿cuál es el área del triángulo de Sierpinski de nivel 4?

SOLUCIÓN:

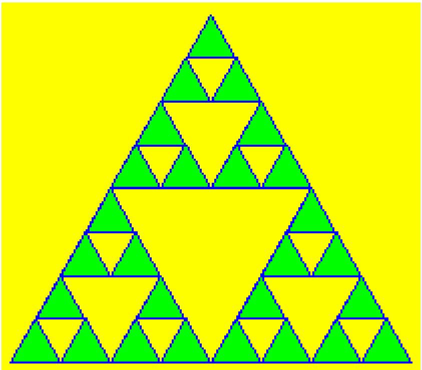


Como es fácil de ver, el área del triángulo de cada nivel son las tres cuartas partes del área del nivel anterior, así,

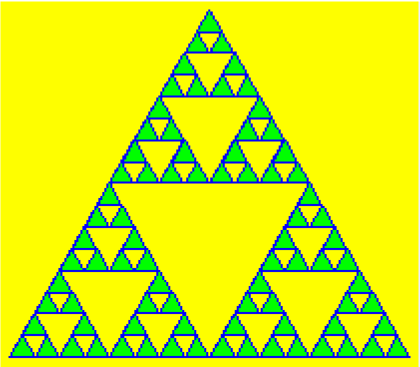
el área del triángulo de nivel 1 será ¾ m^2 = 0,75 m^2

el área del triángulo de nivel 2 será: $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}\,m^2$

el de nivel 3 será $\left(\frac{3}{4}\right)^3\,m^2$ y el de nivel 4 será



$$\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{3^4}{4^4}=\frac{81}{256}\,m^2 = 0{,}3164\ m^2$$



PROBLEMA 3.

El aire presiona sobre cada cm^2 de la superficie terrestre con la fuerza de 1 kg. Si la superficie del planeta es de unos 510 millones de km^2, ¿cuánto pesa la atmósfera?.

Si el planeta pesa unas $6{\cdot}10^{21}$ Tm, ¿cuántas veces es más pesado el planeta que la atmósfera?

SOLUCIÓN:

$1\ km^2 = 10^{10}\ cm^2$

$510.000.000\ km^2 = 5{,}1{\cdot}10^8\ km^2 = 5{,}1{\cdot}10^8{\cdot}10^{10}\ cm^2 = 5{,}1 \cdot 10^{18}\ cm^2$.
Como el peso sobre cada cm^2 es de 1 kg,
la atmósfera pesa $5{,}1 \cdot 10^{18}$ kg

$1\ Tm = 1000\ kg = 10^3\ kg$

$6{\cdot}10^{21}\ Tm = 6{\cdot}10^{24}\ kg.\quad 10^{24}/10^{18} = 10^6 = 1.000.000$

El planeta es, aproximadamente, un millón de veces más pesado que la atmósfera.

Con algo más de precisión:
$(6/5{,}1){\cdot}10^6 = 1{,}18{\cdot}10^6$ veces.

PROBLEMA 4.

En joyería se usa la **onza troy (oz)** como unidad de peso para el oro. Una onza troy pesa 31,1034768 g. Si el precio del oro es de 273 €/oz, calcula el precio de un gramo de oro.

Cierto joyero que trabaja el oro dispone de una balanza que comete un error máximo de 5 centésimas de gramo por gramo. Con el precio anterior ¿cuánto puede ganar o perder por cada onza y por cada gramo a causa del error?

SOLUCIÓN:

1 gramo cuesta 273/31,1034768 ≈ 8,78 €
(*Redondeamos a los céntimos*)

Un error de 0,05 g por gramo da un error relativo de 0,05/1 = 0,05 = 5%, por tanto, el joyero puede ganar el 5% de 273€ en una onza y el 5% de 8,78€ en un gramo:

5% de 273€ = 0,05 · 273 ≈ **13,65 €/oz**

5% de 8,78€ = 0,05 · 8,78 ≈ **0,44€/g**

Para practicar

1. El ayuntamiento de una ciudad vende 1/3 de un solar a una empresa constructora y 3/4 del resto a otra, quedando aún 5 Ha sin vender. ¿Qué superficie tiene el solar.

2. El importe de la reparación de un coche en un taller es de 382€ sin IVA. ¿A cuánto asciende la reparación con un IVA del 16%?

3. Hemos pagado por un vestido 280€ y, en la etiqueta, nos indican que se le ha aplicado una rebaja del 20%. ¿Cuál era el precio del vestido antes del descuento? (*Redondea el resultado a céntimos*).

4. ¿Qué cantidad de vino hay almacenado en once cajas y un tercio si cada caja tiene 24 botellas de tres cuartos de litro cada una?

5. Una fuente llena un depósito en 4 horas y otra lo hace en 13 cuartos de hora. ¿Qué fracción del depósito llena cada una por separado en una hora? ¿Y las dos juntas? ¿Cuánto tardarán en llenar el depósito las dos a la vez?

6. En un almacén venden café en paquetes de 1/4 kg y descafeinado en paquetes de 1/3 kg. El precio por kg de ambas variedades es el mismo. Un bar ha comprado 23 paquetes de café normal y 21 de descafeinado, pagando un total de 71,46€. ¿Cuál es el precio de un kg de café?

7. Quiero hacer una copia de seguridad de los archivos de mi PC que ocupan 188 GB ¿Cuántos DVD's de 4,5 GB necesito al menos para hacerlo? ¿Y si uso CD's de 700 MB? ¿Cuántos de los antiguos disquetes de 1,4 MB serían necesarios? ¿Y de los antiquísimos de 360 KB? (Utiliza la tabla adjunta).

La unidad mínima de información es el bit (1 b) *(Con b minúscula)*

1 Byte = 1 B *(Con B mayúscula)* **= 8 b**

1 KiloByte = 1 KB = 2^{10} B = 1024 Bytes
(aproximadamente mil)

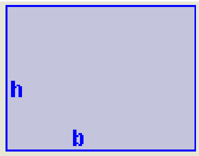
1 MegaByte = 1 MB = 2^{10} KB = 2^{20} B
(aproximadamente un millón)

1 GigaByte =
1GB = 2^{10} MB = 2^{20} KB = 2^{30} B
(aproximadamente mil millones)

8. Sabiendo que el radio del planeta Júpiter es de 71492 km, calcula su volumen. Si su masa es de $1{,}9\cdot 10^{27}$ kg, calcula su densidad en g/cm^3.

9. En condiciones normales, en un mol de nitrógeno hay $6{,}022\cdot 10^{23}$ moléculas de nitrógeno y pesan 28 gramos. Calcula el peso en gramos de una molécula de nitrógeno.

10. Medimos una parcela rectangular con una larga cuerda con marcas cada metro. (Ver medidas en el cuadro adjunto). Repetimos la medida con un teodolito, mejorando la precisión. Calcula las cotas de error que se comenten al calcular la superficie en cada caso. Con el precio que se indica, calcula las mayores diferencias de coste en cada caso según la medida que tomemos.



Con la cuerda:
b está entre 652 m y 653 m
h está entre 503 m y 504 m

Con el teodolito:
b está entre 65236 cm y 65237 cm
h está entre 50365 cm y 50366 cm

Precio del m^2 = 944 €

11. Una empresa de demoscopia ha realizado una encuesta de intención de voto, obteniendo los resultados que ves abajo. Con estos datos, la cadena de televisión ABCD informa de que el PBP* ganará las elecciones. Por su parte, la cadena DCBA dice que hay un empate técnico entre el PBP y el PTC* ¿Quién crees que tiene razón?

*** PBP: Partido para Bajar el Paro**
*** PTC: Partido por el Trabajo en Casa**

Intención de voto:

PBP = 42,46 %
PTC = 39,80 %

Margen de error de la encuesta: **2,66 %**

Para saber más

¿Cuál es el siguiente de un número racional?

Recuerda que ésta era la pregunta que planteábamos al iniciar el tema. Para fijar ideas podemos tomar el cero. ¿Cuál es el siguiente del cero? Alguien podría decir que el uno, pero se le puede contestar que el 0,5 = ½ es un número racional que está entre el cero y el uno. Entonces, podemos decir que el 0,1 es el siguiente. Pero, de nuevo, podemos argumentar que el 0,05 = 1/20 es un número racional que está entre cero y 0,1. Y así podríamos seguir indefinidamente.

De hecho, se puede demostrar que dadas dos fracciones

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

la fracción que se obtiene sumando los numeradores y sumando los denominadores está entre ambas, es decir:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Por lo tanto, parece claro que es imposible saber cuál es el siguiente de un número racional cualquiera.

¿O acaso sí es posible para algunos? ¿No parece obvio que el siguiente del número 9,12999999999... es el número 9,13?

Analicemos esto con más detalle. El primero es un decimal periódico mixto y el segundo es un decimal exacto.

La fracción generatriz de 9,129999..... es $\frac{9129-912}{900} = \frac{8217}{900} = \frac{913}{100}$

Por su parte, la fracción generatriz de 9,13 es $\frac{913}{100}$

Por lo tanto, resulta que **no es el siguiente, es el mismo número.**

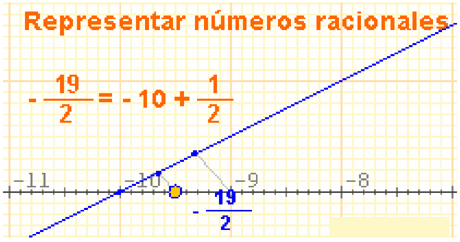
Recuerda lo más importante

Los números racionales

Un **número racional** es una fracción y todas sus equivalentes.

Todo nº racional se puede expresar como un **decimal periódico** y viceversa.

Los números racionales están ordenados y se pueden representar en una recta. Los números enteros también son números racionales.



Operaciones con fracciones

Para **sumar y restar** se reducen a denominador común, se deja ese denominador y se suman o restan los numeradores.

Para **multiplicar y dividir**:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Para **elevar a potencias**:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

$$a^p\cdot a^q=a^{p+q} \qquad \frac{a^p}{a^q}=a^{p-q} \qquad \left(a^p\right)^q=a^{p\cdot q}$$

Potencias

Si $n>0$, $a^n = a\cdot a\cdot\ldots^{n\text{ veces}}\ldots\cdot a$

Si $a\neq 0$, $a^0=1$ y $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

En particular:

$$a^{-1}=\frac{1}{a} \text{ y } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Prioridades en las operaciones

- Primero se efectúan las potencias de izquierda a derecha.
- Después los productos y cocientes, también de izquierda a derecha.
- Por último, las sumas y restas de izquierda a derecha.
- Las prioridades se pueden alterar con paréntesis.

Notación científica

Los números muy grandes o muy pequeños se expresan en notación científica **$\times 10^n$**

Para operar con números en notación científica aplicamos las propiedades de las potencias.

Medida de errores

El **error absoluto** es la diferencia positiva entre el valor exacto y el valor aproximado.

El **error relativo** es el cociente entre el valor aproximado y el exacto, suele expresarse en %.

La **cota de error** de una aproximación es el error absoluto máximo posible.

Autoevaluación

1. Escribe la fracción generatriz de 6,292929....

2. Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$\frac{-9}{4},\quad \frac{-1}{11},\quad \frac{3}{5},\quad -1,\quad \frac{-9}{10}$$

3. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

$$\frac{-9}{4}+\frac{3}{7}\cdot\frac{-1}{11}$$

4. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

$$\left(\frac{-9}{4}+\frac{3}{7}\right)\cdot\frac{-1}{11}$$

5. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

$$\frac{\frac{-9}{4}}{\frac{3}{7}+\frac{-1}{11}}$$

6. Calcula el resultado de $\left(\frac{-11}{12}\right)^{-2}$

7. Simplifica la siguiente expresión dejando el resultado como productos o cocientes de potencias de exponente positivo:

$$\left(\frac{11^{-9}\cdot 12^{-1}}{11^{-7}\cdot 12^{3}}\right)^{-9}$$

8. Calcula $(5{,}4\cdot 10^{-9})\cdot(7{,}2\cdot 10^{-7})$

9. Redondea a las diezmilésimas 35407,03048664.

10. Un obrero tarda 4 días en levantar una valla. Otro tardaría 7 días. ¿Cuánto tardarían trabajando juntos?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 30 Ha.
2. 443,12 €
3. 350,00 €
4. 206 litros de vino.
5. a) La primera llena 1/4 del depósito en una hora y la segunda 4/13.
   b) Las dos juntas llenan 29/52 en una hora.
   c) Tardan 52/29 horas en llenarlo (1 h 47 min aprox.)
6. 5,60 €/kg.
7. 42 DVD's, 276 CD's, 137.509 discos de 1,4 MB, 547590 discos de 360 KB.
8. $1{,}53\cdot10^{15}$ Km^3. $1{,}24$ g/cm^3.
9. $4.65\cdot10^{-23}$ g
10. a) Con la cuerda la cota de error es 1 m, con el teodolito 1 cm.
    b) El precio varía en 1.091.264 € con la cuerda y en 10.912,83 € con el teodolito.
11. Tiene razón la cadena DCBA, porque el peor resultado posible del PBP (partido ganador a priori) es 39,80% de los votos, peor que el mejor resultado posible del PTC 42,46%.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 623/99
2. −9/4 < -1 < -9/10 < -1/11 < 3/5
3. −705/308
4. 51/308
5. −693/104
6. 144/121
7. $11^{18}\cdot12^{36}$
8. $3{,}888\cdot10^{-15}$
9. 35407,0305
10. 2 días y 13 horas

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

2

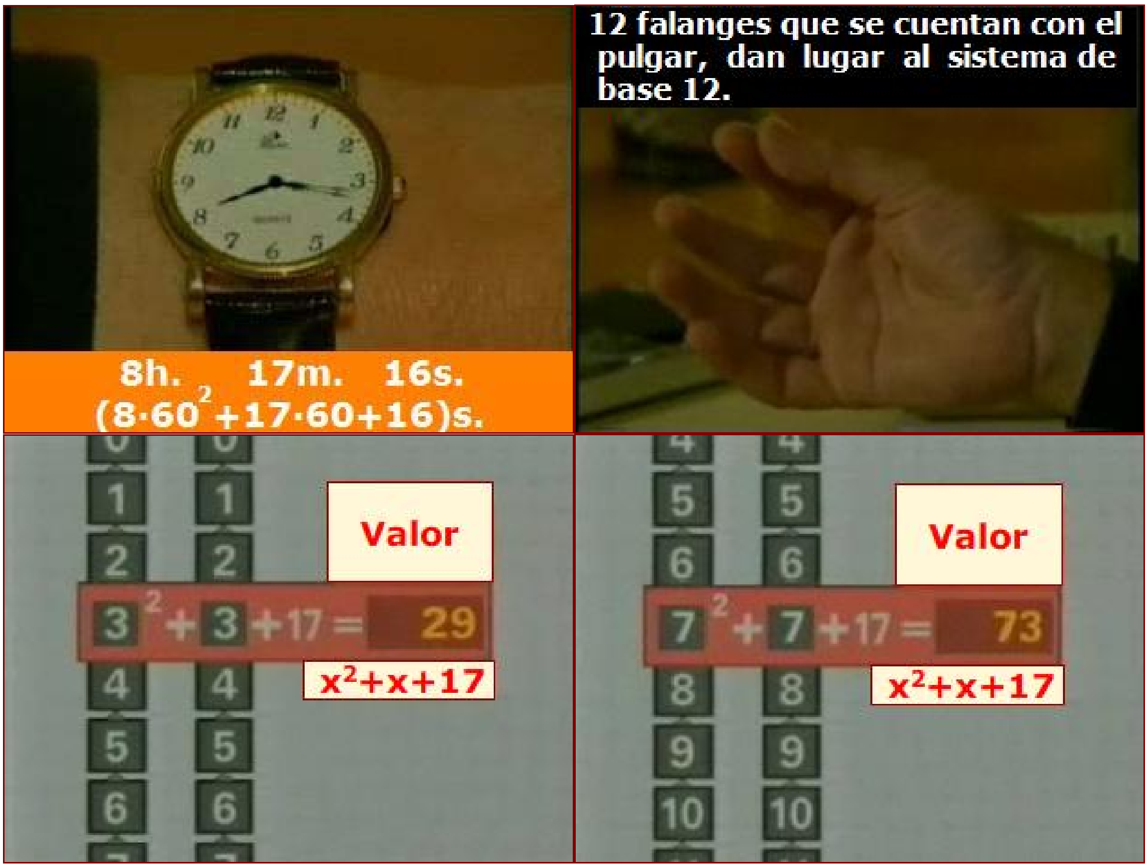
Polinomios

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Manejar las expresiones algebraicas y calcular su valor numérico.
- Reconocer los polinomios y su grado.
- Sumar, restar y multiplicar polinomios.
- Sacar factor común.
- Conocer y utilizar las identidades notables.

Antes de empezar



Expresiones polinómicas y valor numérico

Si el número 235 está dado en **base 10** su expresión polinómica es

$2\cdot\mathbf{10}^2 + 3\cdot\mathbf{10} + 5$, valor numérico en **10** de la expresión $2\cdot\mathbf{x}^2 + 3\cdot\mathbf{x} + 5$.

Para medir ángulos o el tiempo se usa la **base sexagesimal,** así 2 horas 3 minutos 5 segundos es igual a

$2\cdot\mathbf{60}^2 + 3\cdot\mathbf{60} + 5$ segundos, valor numérico en **60** de $2\cdot\mathbf{x}^2 + 3\cdot\mathbf{x} + 5$.

Para expresar la cantidad de color se utiliza el sistema de **base 16** o **hexadecimal**, así 48 en este sistema es igual a

$4\cdot\mathbf{16} + 8$ en base 10, valor numérico en **16** de la expresión $4\cdot\mathbf{x}+8$.

El lenguaje de los ordenadores esta basado en el **sistema binario o de base 2**, con solo dos cifras el 0 y el 1; el valor decimal de la expresión binaria 11001 es

$\mathbf{2}^4+\mathbf{2}^3+1$, valor numérico en **2** de la expresión $\mathbf{x}^4+\mathbf{x}^3+1$.

1. Monomios y polinomios

Expresiones algebraicas

Son muchas las situaciones en las que se utilizan expresiones algebraicas (sumas, diferencias, productos cocientes y potencias de números y letras), en la derecha se presentan algunas.

Cuando la expresión algebraica es de estos tipos:

$\mathbf{3xy^2}$; $\mathbf{2x^{10}}$; $\mathbf{3/4 \cdot x^2 \cdot y^5}$

solo con productos de números y potencias de variables de exponente natural, se denomina **monomio**. **La suma de varios monomios es un polinomio.**

Observa cómo se determinan el **grado** y **los coeficientes** de los ejemplos:

$\mathbf{3xy^4}$ es un momomio de dos variables con **coeficiente 3** de **grado 5**, uno por la x y cuatro por la y.

El coeficiente de $\mathbf{3/4\ x^2y^5}$ es **3/4** y **su grado 7**.

El polinomio $\mathbf{3x^5+4x^2-2}$ es de **grado 5**, el mayor grado de sus monomios, sus coeficientes son:

3 de grado 5, **0** de 4, **0** de 3, **4** de 2, **0** de 1 y **-2** de 0.

a) Halla la expresión algebraica que da el número de cuadraditos del rectángulo.

b) ¿Qué monomio nos da los km recorridos a una velocidad de x km/h durante t horas?

Soluciones: a) x^2+4x b) $x\cdot t$

Expresión en coeficientes

Un polinomio se puede definir mediante la expresión en coeficientes que consiste en dar todos sus coeficientes ordenados, empezando por el de grado mayor y terminando por el de grado cero así $\mathbf{x^2+2x}$ se expresa por **1 2 0.**

Más ejemplos

Polinomio	Coeficientes
$\sqrt{2}\,x^3$	$\sqrt{2}$ 0 0 0
$2x^3-\frac{4}{5}$	2 0 0 $-\frac{4}{5}$
x^3+4x^2+3x-2	1 4 3 -2

Es claro que dos polinomios son iguales si y solo si coinciden sus expresiones en coeficientes.

Polinomio

$3x^4+0x^3+1x^2+(-5)x^1+3x^0$

Manera usual de escribir el polinomio

$3x^4+x^2-5x+3$

$P(x)=x^5+2x^4-2x^3-4x^2$

$Q(x)=x^5+ax^4-2x^3-4x^2$

Si P(x)=Q(x), **a**=2

Valor numérico de un polinomio

La notación numérica que utilizamos tiene mucho que ver con los polinomios. Si en el polinomio de coeficientes **5 2 3**,

$$\mathbf{5}x^2+\mathbf{2}x+\mathbf{3}$$

sustituimos la x por 10, resulta

$$\mathbf{5}\cdot 10^2+\mathbf{2}\cdot 10+\mathbf{3}=\mathbf{523},$$

hemos vuelto a la expresión en coeficientes del polinomio, igual ocurre en el sistema sexagesimal con el que contamos las horas, minutos y segundos, si en el polinomio anterior sustituimos la x por 60

$$\mathbf{5}\cdot 60^2+\mathbf{2}\cdot 60+\mathbf{3}$$

obtenemos los 18123 segundos que hay en

5 horas **2** minutos y **3** segundos.

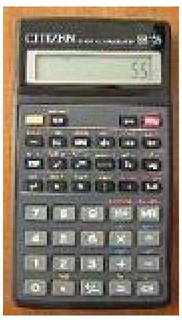
523 es el valor numérico del polinomio en 10 y 18123 es el valor numérico de ese mismo polinomio en 60.

$P(x)=-\frac{5}{3}x^3+\frac{5}{6}x^2+\frac{3}{4}$

Valor de x → -1

$P(-1)=-\frac{5}{3}(-1)^3+\frac{5}{6}(-1)^2+\frac{3}{4}$

Valor del polinomio en -1 → $\frac{13}{4}$

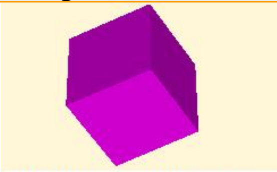
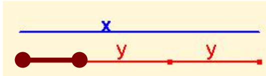
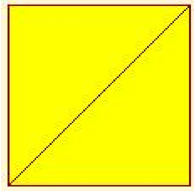
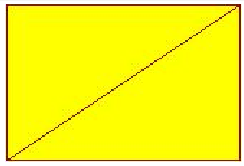


Puedes utilizar la calculadora para hallar el valor numérico de un polinomio. Recuerda que para realizar la potencia 2^4 se utiliza la tecla x^y,

2 x^y 4 = →16

EJERCICIOS resueltos

1. Halla las expresiones algebraicas asociadas a cada imagen

x **Área del rectángulo** y	 **Volumen, arista=x**	Longitud del segmento marrón 	Qué polinomio expresa la **media aritmética de** dos números **x, y**
El triple de un número menos cinco	La suma de los cuadrados de dos números	 La diagonal de un cuadrado de lado x	 La diagonal de un rectángulo de base x y altura y

Soluciones

$x\cdot y$ Polinomio de grado 2 y dos variables	x^3 Monomio de grado 3	x-2y Polinomio de grado1 Dos variables	0,5x+0,5y Polinomio de grado1 Dos variables
3x-5 Polinomio de grado 1 Una variable	x^2+y^2	$\sqrt{2}\cdot x$	$\sqrt{x^2+y^2}$

2.

x	**-4**	El grado de P(x) es **7**
-5	**-2**	El coeficiente de mayor grado es **-2**
+5	x^7	El coeficiente de grado 3 es **-5**
x^5	x^2	El coeficiente de grado 2 es **-3**
x^3	**-3**	El coeficiente de grado 1 es **5**
		Los demás coeficientes son cero

Solución $\mathbf{P(x)=-2x^7-4x^5-5x^3-3x^2+5x}$

3. Halla la expresión en coeficientes de los polinomios $P(x)=3x^2-2x+1$; $Q(x)=x^3-4$; $R(x)=0,5x^2+3x$

Las respectivas expresiones en coeficientes son:

P(x)→ 3 -2 1; Q(x)→ 1 0 0 -4; R(x)→ 0,5 3 0

4. Escribe las expresiones polinómicas de los polinomios cuya expresión en coeficientes es:

P(x)→ 1 0 3 -1; Q(x)→ 3 2 0 0; R(x)→ 3/2 -3 0 5

$P(x)=x^3+3x-1$; $Q(x)=3x^3+2x^2$; $R(x)=3/2\ x^3-3x^2+5$

5. Halla el valor numérico en 1, 0 y –2 de los siguientes polinomios:

POLINOMIO	Valor en 1	Valor en 0	Valor en -2
$x^5-2x^3-x^2$	-2	0	-20
$x^2/5-1$	-5/5	-1	-1/5
$-2x^3+\pi x^2$	$-2+\pi$	0	$16+4\pi$
$-x^3+1,2x^2-1/5$	0	-1/5	63/5
$-\sqrt{2}\,x^2+1$	$-\sqrt{2}+1$	1	$-4\sqrt{2}+1$

2. Operaciones

Suma y diferencia

Para sumar o restar polinomios se juntan los monomios de igual grado y se suman o restan

$$P(x)=5x^3+2x^2+3x+4$$
$$Q(x)=6x^3+7x^2+5x+1$$
$$P(x)+Q(x)=5x^3+2x^2+3x+4\ +\ 6x^3+7x^2+5x+1=$$
$$=5x^3+6x^3+2x^2+7x^2+3x+5x+4+1=$$
$$=\mathbf{11x^3+9x^2+8x+5}$$

Análogamente

$$P(x)-Q(x)=\mathbf{-x^3-5x^2-2x+3}$$

Para operar con polinomios puede resultar cómodo pasar a su expresión en coeficientes.

Suma $P(x)=8x^4+x^2-5x-4$

$Q(x)=3x^3+x^2-3x-2$

Se suman los coeficientes de igual grado:

P(x)→	8	0	1	-5	-4
Q(x)→		3	1	-3	-2
P(x)+Q(x)→	8	3	2	-8	-6

$P(x)+Q(x)=8x^4+3x^3+2x^2-8x-6$

Producto

Los polinomios se multiplican monomio a monomio, aplicando la propiedad distributiva del producto, así si $P(x)=2x^3+3x+4$ y $Q(x)=x^2+5x$

$$P(x)\cdot Q(x)=(2x^3+3x+4)\cdot(x^2+5x)=$$
$$=2x^3x^2+3xx^2+4x^2+2x^35x+3x5x+4\cdot 5x=$$
$$=2x^5+3x^3+4x^2+10x^4+15x^2+20x$$

Y ordenamos los monomios según su grado,

$$2x^5+10x^4+3x^3+4x^2+15x^2+20x=$$
$$=\mathbf{2x^5+10x^4+3x^3+19x^2+20x}$$

$P(x)=3x^3+5x-4$

$Q(x)=x^2-x+2$

Se multiplican coeficiente a coeficiente:

P(x)→			3	0	5	-4
Q(x)→				1	-1	2
			6	0	10	-8
		-3	0	-5	4	
	3	0	5	-4		
P(x)·Q(x)→	3	-3	11	-9	14	-8

$P(x)\cdot Q(x)=3x^5-3x^4+11x^3-9x^2+14x-8$

Factor x^n

Dos monomios pueden tener como factor común una potencia de **x** y un factor de sus coeficientes. Los monomios del siguiente polinomio

$$6x^5+15x^2$$

tienen en común la potencia x^2 pues $x^5=x^3\cdot x^2$

$$6x^3\mathbf{x^2}+15\mathbf{x^2}=(6x^3+15)\mathbf{x^2}$$

y sus coeficientes, 6 y 15 tienen como factor común el número 3 pues 6=2·3 y 15 =5·3,

$$(6x^3+15)x^2=(2\cdot\mathbf{3}\cdot x^3+5\cdot\mathbf{3})x^2=(2x^3+5)\mathbf{3}x^2$$

Diferencia $P(x)=3x^3+x^2+5x+4$

$Q(x)=3x^3+3x+2$

Se restan los coeficientes de igual grado:

P(x)→	3	1	5	4
Q(x)→	3	0	3	2
P(x)-Q(x)→		1	2	2

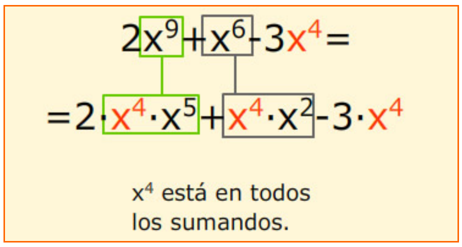
$P(x)-Q(x)=x^2+2x+2$

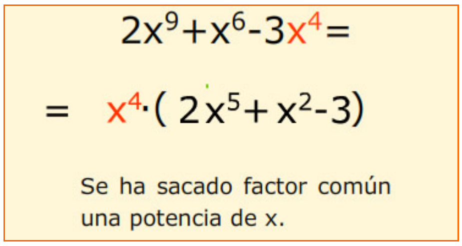
Observa el grado del resultado:
$\mathbf{gr(P\pm Q)\leq max(gr(P),\ gr(Q))}$

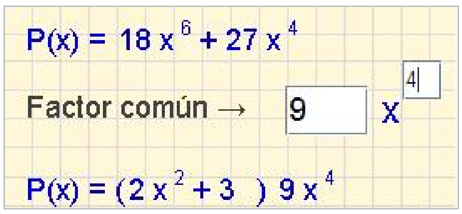
Para multiplicar el paréntesis por 4 hay que multiplicar los dos monomios.

$$(x^2\ +3x\ ).4$$
$$(x^2.4+3x.4)$$

$\mathbf{gr(P\cdot Q)=gr(P)+gr(Q)}$







EJERCICIOS resueltos

6. Halla P(x)+Q(x) y 3·P(x)-Q(x)

$P(x)=x^4+2x^3+3x$ $\qquad$ $Q(x)=2x^3+x^2-3x+5$

P(x)→	1	2	0	3	0
Q(x)→		2	1	-3	5
P(x)+Q(x)→	1	4	1	0	5

3·P(x)→	3	6	0	9	0
Q(x)→		2	1	-3	5
3·P(x)-Q(x) →	3	4	-1	12	-5

$P(x)+Q(x)=x^4+4x^3+x^2+5$ $\qquad$ **$3·P(x)-Q(x)=3x^4+4x^3-x^2+12x-5$**

7. Multiplica $P(x)=x^3+6x^2+4x-6$ por $Q(x)= x^3+3x^2+5x-2$

P(x)→				1	6	4	-6
Q(x)→				1	3	5	-2
				-2	-12	-8	12
			5	30	20	-30	
		3	18	12	-18		
	1	6	4	-6			
P(x)·Q(x)→	1	9	27	34	-10	-38	12

$P(x)·(Q(x)=x^6+9x^5+27x^4+34x^3-10x^2-38x+12$

8. Suma P(x) y Q(x)

$P(x)= 5x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{5}x$

$Q(x)= x^3 - \frac{5}{2}x$

$P(x)-Q(x)= 4x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{10}x$

Multiplica P(x) y Q(x)

$P(x)= - 5x^{10} + 2x^8$

$Q(x)= - 5x^9 + x^8$

$P(x)·Q(x)= 25x^{19} - 5x^{18} - 10x^{17} + 2x^{16}$

9. Saca factor común

$P(x)= 4x^{13} – 4x^{11} - 6x^5 – 3x^4$	$P(x)= x^4· (4x^9 – 4x^7 - 6x – 3)$
$P(x)= -8x^{10} + 6x^9 – 2x^3 – 4x^2$	$P(x)= -2x^2· (4x^8 - 3x^7 + x + 2)$
$P(x)= 6x^5 + x^2 – 4x$	$P(x)= x· (6x^4 + x - 4)$

3. Identidades notables

Suma al cuadrado

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrrr} & & a & b \\ \times & & a & b \\ \hline & & ab & b^2 \\ & a^2 & ab & \\ \hline & a^2 & +2ab & +\,b^2 \end{array}$$

La suma al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º

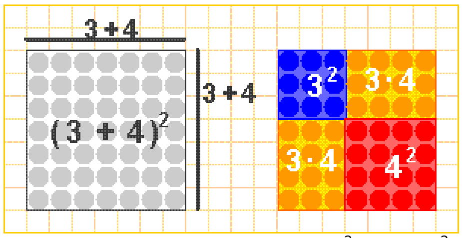
Diferencia al cuadrado

$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

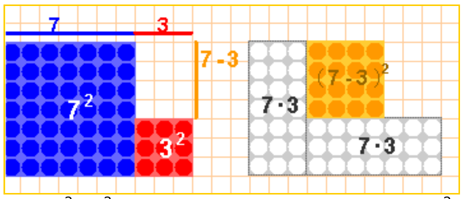
Demostración

$$\begin{array}{rrrr} & & a & -b \\ \times & & a & -b \\ \hline & & -ab & b^2 \\ & a^2 & -ab & \\ \hline & a^2 & -2ab & +\,b^2 \end{array}$$

La diferencia al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º



El cuadrado de a+b es igual a $a^2+2ab+b^2$



Si a a^2+b^2 le quitamos 2ab, resulta $(a-b)^2$

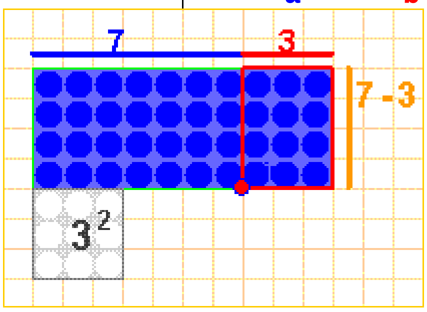
Suma por diferencia

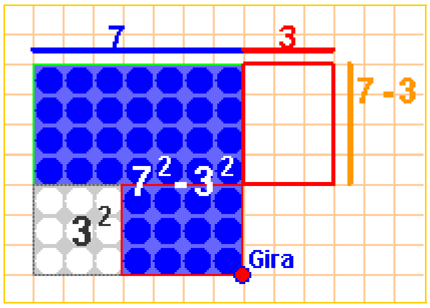
$(a+b)\cdot(a-b)= a^2 - b^2$

La suma por diferencia es igual a la diferencia de cuadrados.

Demostración

$$\begin{array}{rrrr} & & a & b \\ \times & & a & -b \\ \hline & & -ab & -b^2 \\ & a^2 & ab & \\ \hline & a^2 & & -b^2 \end{array}$$





Arriba en azul vemos la diferencia de cuadrados y a la izquierda la suma por la diferencia, basta girar un rectángulo y trasladarlo para ver que las dos figuras azules coinciden.

Debes aprender estas igualdades en los dos sentidos, es decir, si nos dan la expresión

$$x^2 - 6x + 9$$

la debemos identificar con

$$(x + 3)^2$$

y si nos dan la expresión

$$(2x - 5)^2$$

la expresaremos como

$$4x^2 - 20x + 25$$

Análogamente, debemos reconocer la diferencia de cuadrados como suma por diferencia:

$$24^2 - 23^2 = 24 + 23$$

Y sabremos ver la suma por diferencia como diferencia de cuadrados:

$$(x + 3)\cdot(x - 3) = x^2 - 9$$

CÁLCULO MENTAL

$$121^2 - 120^2$$

Si se aplican las identidades notables basta sumar 121 y 120 para hacer este cálculo.

cidead

EJERCICIOS resueltos

10. Observa cómo se aplican las identidades notables

Para desarrollar $(x+5)^2$

Cuadrado del 1º→x^2. Doble del 1º por el 2º→$2\cdot x\cdot 5=10x$. Cuadrado del 2º→$5^2=25$

por tanto $(x+5)^2=x^2+10x+25$

Para descomponer el polinomio $x^2-8x+16$ se intenta ver uno de los miembros de una identidad notable, al ser los signos de los coeficientes alternativos, + - +, se compara con la diferencia al cuadrado.

$16=4^2$ y $8x$=doble de x por 4→ $x^2-8x+16=(x-4)^2$

Para descomponer el polinomio $4x^2-9$ se intenta ver si es una identidad notable, al ser 0 el coeficiente de grado uno se compara con la diferencia de cuadrados

$4x^2=(2x)^2$; $9=3^2$ → $4x^2-9=(2x+3)\cdot(2x-3)$

11. Desarrolla las siguientes expresiones

Expresión	Solución	Expresión	Solución
$(x+1)^2$	x^2+2x+1	$(x-1)^2$	x^2-2x+1
$(2x+1)^2$	$4x^2+4x+1$	$(3-2x)^2$	$4x^2-12x+9$
$(3x/2+5)^2$	$9x^2/4+15x+25$	$(x/3-2)^2$	$x^2/9-4x/3+4$
$(\sqrt{2}\,x+2)^2$	$2x^2+4\sqrt{2}\,x+4$	$(x-\sqrt{3})^2$	$x^2-2\sqrt{3}\,x+3$

12. Halla la expresión en coeficientes de los siguientes productos

Productos	Solución	Productos	Solución
$(x+2)\cdot(x-2)$	x^2-4; 1 0 -4	$(x-1/4)\cdot(x+1/4)$	1 0 -1/16
$(3x+7)\cdot(3x-7)$	9 0 -49	$(1+\sqrt{2}\,x)\cdot(1-\sqrt{2}\,x)$	-2 0 1

13. Resuelve aplicando las identidades notables la ecuación $x^2+10x+9=0$

Se compara la primera parte, $\mathbf{x^2+10x}$, con una identidad notable, con $(x+5)^2$
Pues $(x+5)^2=\mathbf{x^2+10x}+25$, por tanto, $x^2+10x=(x+5)^2-25$
y el primer miembro de la ecuación es $\mathbf{x^2+10x}+9\mathbf{=(x+5)^2-25}+9$,

$(x+5)^2-16=0$→ $(x+5)^2-4^2=0$→ $(x+5+4)\cdot(x+5-4)=0$ → Soluciones $x=-9$ y $x=-1$

14. Aplica las identidades notables para descomponer en factores los siguientes polinomios

Expresión	Solución	Expresión	Solución
$4x^2+12x+9$	$(2x+3)^2$ o $9(2x+1)^2$	$49x^2-36$	$(7x+6)\cdot(7x-6)$
$36x^2+36x+9$	$(6x+3)^2$ o $9(2x+1)^2$	$25x^2-9/4$	$(5x+3/4)\cdot(5x-3/4)$
$6x^5-12x^4+6x^3$	$6x^2(x-1)^2$	$4x^2-3$	$(2x+\sqrt{3})\cdot(2x-\sqrt{3})$

15. Escribe 7^2 como la diferencia de los cuadrados de dos números naturales.

49 es la suma de dos números consecutivos, por tanto, $49=25^2-24^2$.

Para practicar

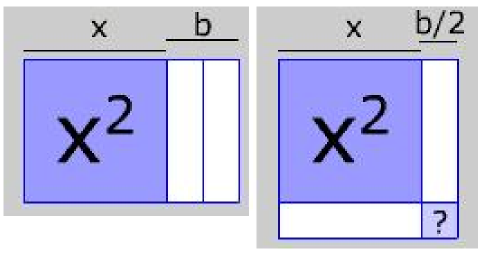
1. Halla la expresión algebraica de un número de cuatro cifras, xyzt, sabiendo que la cifras de las unidades es tres veces la cifra de las decenas.
2. De lunes a jueves camino x Km. diarios y de viernes a domingo, 6 Km. cada día. Halla la expresión algebraica que da los Km. que camino en z semanas
3. Si practico ciclismo a una velocidad media de 45 Km./h. Durante t horas al mes.¿Cuántos Km. hago al cabo de un año?
4. Mi sueldo mensual es de 1400€. Cada año aumenta un x%. Calculara el sueldo mensual dentro de dos años.
5. 2·Π·radio es la expresión que define la longitud de la circunferencia en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿el grado? ¿el coeficiente? ¿la longitud para un radio de 3 cm?
6. π·radio^2 es la expresión que define el área del círculo en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿el grado? ¿el coeficiente? ¿el área para un radio de 12 cm?
7. 4· π ·radio^2 es la expresión que define el área de la esfera en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿el grado? ¿el coeficiente? ¿el área para un radio de 15 cm?
8. 4· π/3·radio^3 es la expresión que define el volumen de la esfera en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿el grado? ¿el coeficiente? ¿el volumen para un radio de 6 cm
9. ¿Cuál es el grado del polinomio $-4x^3-6x^2$? ¿Cuál es su coeficiente de grado dos? ¿y el de grado uno? Calcula su valor numérico en x=-1
10. ¿Qué fracción de hora son 51 minutos y 14 segundos? ¿Sabes expresarla como el valor numérico de un polinomio de 2º grado?
11. ¿Cuántos segundos hay en 5h. 35min. y 53 seg.? ¿Sabes expresarlos como el valor numérico de un polinomio de 2º grado?
12. ¿Cuántas unidades hay en 5 masas, 8 gruesas y 6 docenas? ¿Sabes expresarlas como el valor numérico de un polinomio de tercer grado?

    Una masa=12 gruesas, una gruesa=12 docenas, una docena= 12 unidades.
13. Halla los coeficientes de P(x)-3·Q(x)

    $P(x)=-7x^3+2x^2-x-2$

    $Q(x)=6x^3-2x^2+x-2$
14. Halla los coeficientes de P(x)·Q(x)

    $P(x)=7x^2+5x \quad Q(x)=-4x^3+7x^2-x-3$
15. Saca factor común en el polinomio $4x^{12}+24x^7$
16. ¿Cuántas unidades tienes que añadir a x^2+16x para convertir este binomio en el cuadrado de otro binomio?



17. Calcula a) $(x+6)^2$ b) $(-2x+5)^2$

    c) $(2x-3/2)\cdot(2x+3/2)$
18. Calcula mentalmente 32^2-31^2 y 19·21
19. Halla la expresión algebraica que define el producto de tres números enteros consecutivos. Toma como x el número central.
20. Simplifica las fracciones

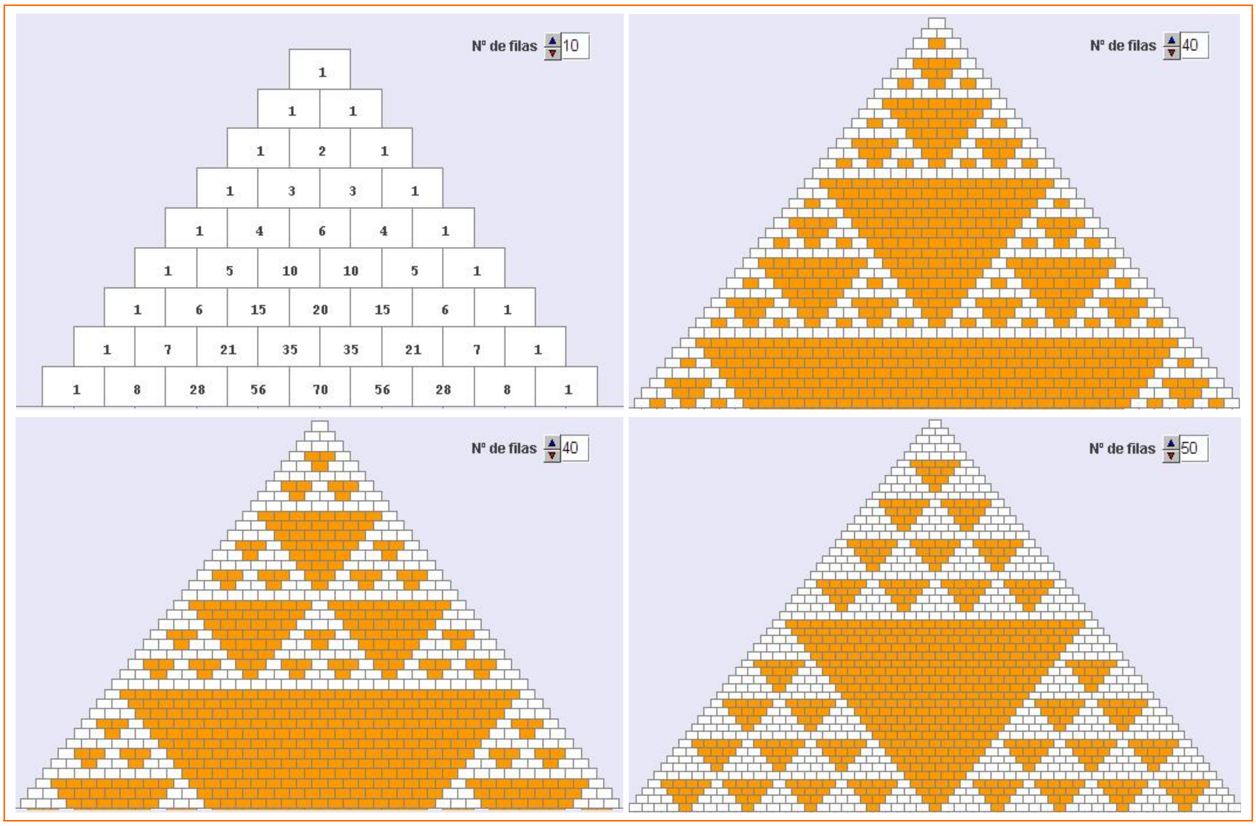
    a) $\dfrac{x^2+4x+4}{3x+6}$ b) $\dfrac{4x^2-4}{x^2-2x+1}$

    c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{8x^2-2}$ d) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{2x^2-2y^2}$

Para saber más

Expansiones polinomiales

Investiga en la web las aplicaciones de los polinomios, nosotros hemos encontrado esta frase ***"Mediante expansiones polinomiales se puede calcular la poblacion de un cultivo de bacterias"***
¿Qué es una expansión polinomial?. Halla los coeficientes de $(1+x)^0$: 1, de $(1+x)^1$:1 1, de $(1+x)^2$: 1 2 1, $(1+x)^3$: 1 3 3 1, ...
El primer triángulo de la figura, triángulo de Pascal, es la expansión polinomial de $(1+x)^n$, sus filas son los coeficientes de estas potencias de (1+x).
Observa las figuras que se forman al colorear en el triángulo de Pascal, los múltiplos de 2, de 3 o de 5. Puedes probar tú con otros múltiplos.



Y un par de trucos para operar

Fíjate lo rápido que puedes calcular el cuadrado de números acabados en 5 y algunos productos sin más que aplicar las identidades notables.

Cuadrados de números de dos cifras acabados en 5

$$25^2$$

2·uno más=6

y se añade 25

625

$15^2=225$; $35^2=1225$; $45^2=2025$; $55^2=3025$; $65^2=4225$; $75^2=5625$.

Puedes razonarlo considerando 25^2 como $(5+20)^2=25+2^2\cdot100+2\cdot100$ $(5+30)^2=25+3^2\cdot100+3\cdot100$...

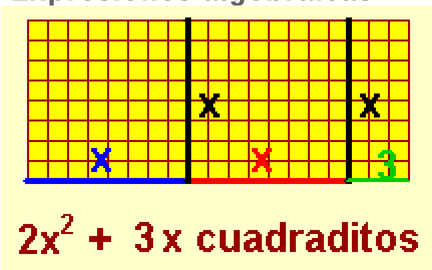
Productos de números equidistantes

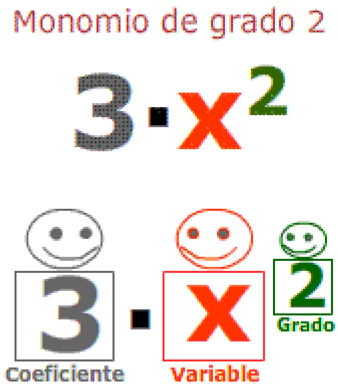
$$24\cdot26$$
$$25^2-1=624$$
$$23\cdot27$$
$$25^2-2^2=621$$

Se aplica que suma por diferencia es diferencia de cuadrados

Recuerda lo más importante

Expresiones algebraicas





Valor numérico de la expresión

en x=4

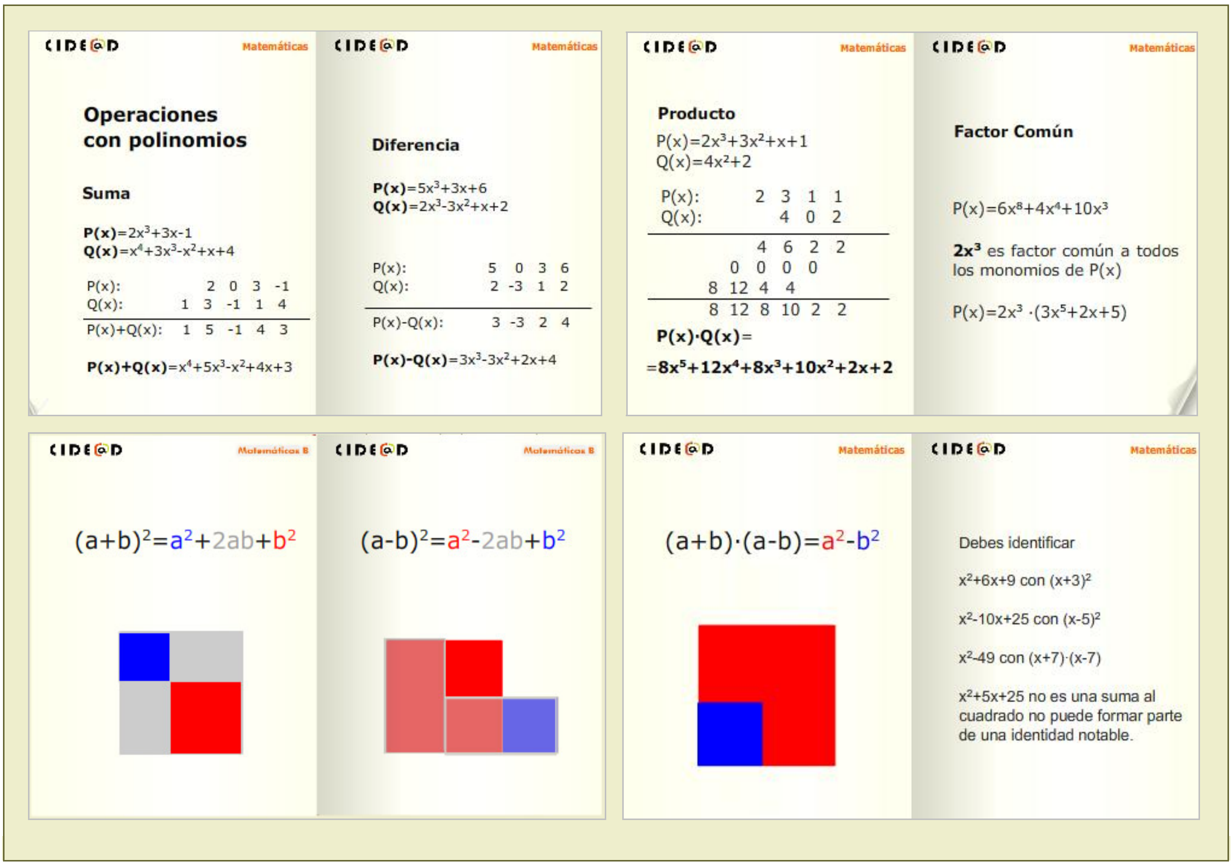
$2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 = 2 \cdot 16 + 3 \cdot 4 =$

$32 + 12 = 44$

en x=-2

$2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) =$

$8 - 6 = 2$



Autoevaluación

1. Halla los coeficientes de P(x)·Q(x)+ P(x)·R(x) siendo $P(x)=6x+1$, $Q(x)=3x^2-2$ y $R(x)=x^2+14x$.

2. Calcula el valor numérico de $2x^3-5x^2+4$ en $x=2$.

3. Halla la expresión algebraica que define el área de 6 cuadrados de lado x+y y 6 rectángulos de base x y altura y.

4. ¿Es cierta la igualdad $9x^2+30x+25=(3x+5)^2$?

5. Halla los coeficientes de $(2x+1)^2$.

6. ¿Qué constante hay que sumar a $25x^2-30x$ para obtener el cuadrado de un binomio?

7. Calcula el coeficiente de primer grado de $(4x-5)^2$.

8. Calcula mentalmente en menos de 10 segundos 34^2-33^2.

9. Simplifica la fracción $\dfrac{x^2-b^2}{x+b}$.

10. Saca factor común la mayor potencia de x en $5x^{19}+8x^8$.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. $1000x+100y+13z$
2. $4xz+18z$
3. $540\cdot t$
4. $1400+28x+0{,}14x^2$
5. Variable=radio, coeficiente=2π
   Grado=1, Longitud=6π cm
   ~18,84cm
6. Variable=radio, coeficiente= π
   Grado=2, Área en cm^2=144Π ~452,16
7. Variable=radio, coeficiente=$4\pi/3$
   Grado=3, Área en cm^2=900Π ~2826
8. Variable=radio, coeficiente=4π
   Grado=2, Vol. en cm^3=288Π ~2826
9. Grado=3, Coeficiente gr 1=0,
   Coeficiente gr2=-6, Valor en −1=-2
10. $\frac{1537}{1800}$ valor en $\frac{1}{60}$ de $51x+14x^2$
11. 20153 valor en 60 de $5x^2+35x+53$
12. 9864 valor en 12 de $5x^3+8x^2+6x$
13. 8 0 4
14. −28 29 0 -26 -15 0
15. $4x^7(x^5+6)$
16. 64
17. a) $x^2+12x+36$ b)$4x^2-20x+25$
    c)$4x^2-9/4$
18. 63; $19\cdot 21=20^2-1^2=399$
19. x^3-x
20. a) $\frac{x+2}{3}$ b) $\frac{4(x+1)}{x-1}$

    c) $\frac{2x+1}{2(2x-1)}$ d) $\frac{x+y}{2x-2y}$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 24 88 2 -2
2. 0
3. $6x^2+6y^2+18xy$
4. Sí
5. 4 4 1
6. 9
7. −40
8. 67
9. x-b
10. $x^8(5x^{11}+8)$

No olvides enviar las actividades al tutor ►

3

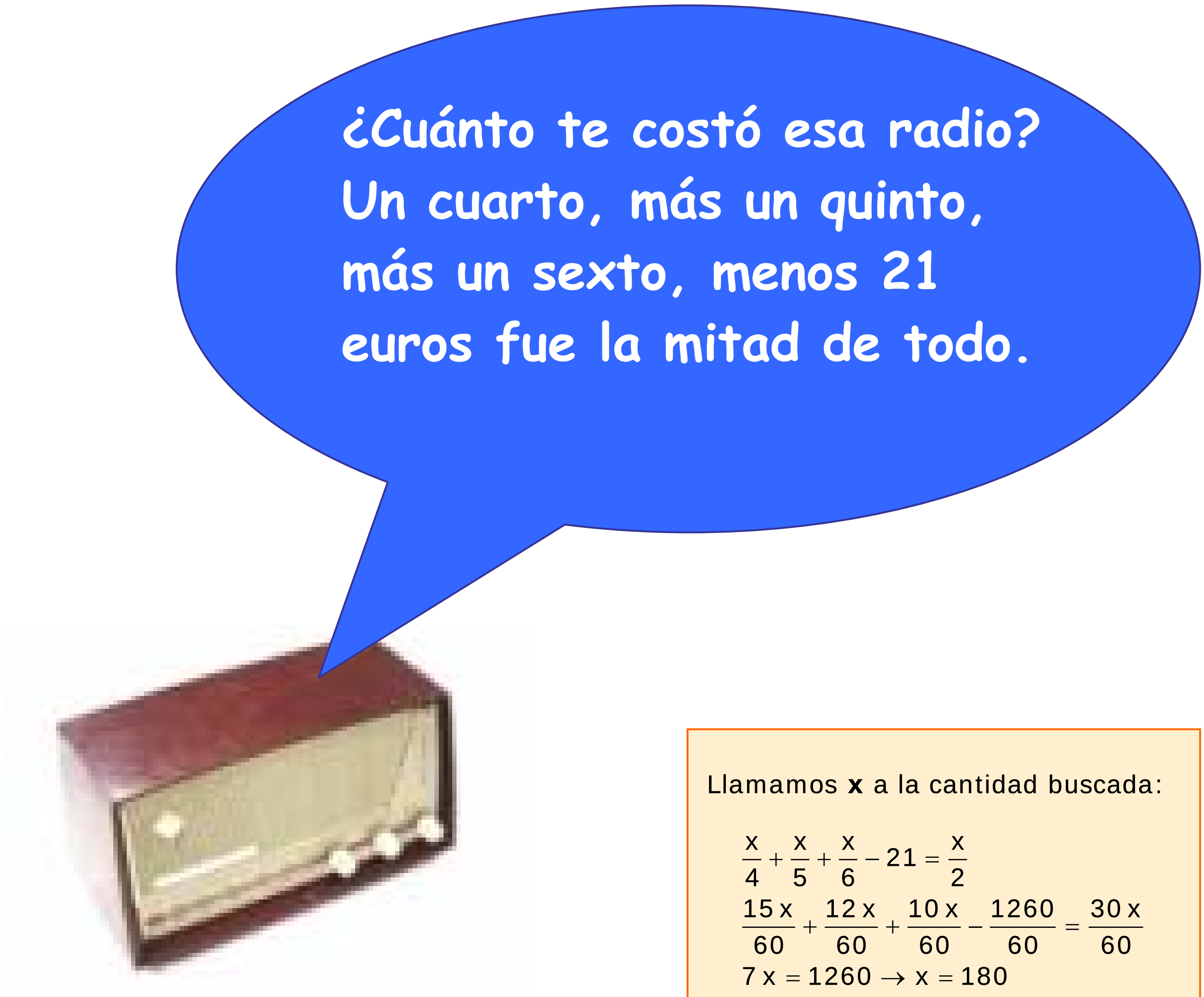
Ecuaciones de segundo grado

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Identificar las soluciones de una ecuación.
- Reconocer y obtener ecuaciones equivalentes.
- Resolver ecuaciones de primer grado
- Resolver ecuaciones de segundo grado tanto completas como incompletas.
- Utilizar el lenguaje algebraico y las ecuaciones para resolver problemas.

Antes de empezar



Llamamos **x** a la cantidad buscada:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}-21=\frac{x}{2}$$

$$\frac{15x}{60}+\frac{12x}{60}+\frac{10x}{60}-\frac{1260}{60}=\frac{30x}{60}$$

$$7x=1260 \rightarrow x=180$$

1. Expresiones algebraicas

Identidad y Ecuación.

Una **igualdad algebraica** esta formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual (**=**).

- Cuando la igualdad es cierta para algún valor de las letras se llama **ecuación**.
- Si la igualdad es cierta para cualquier valor de las letras se llama **identidad**.

Identidad: $2(x+1) = 2x+2$

Observa que se verifica para cualquier valor de x:

$x = 0;\ 2(0+1) = 2 = 2(0)+2$
$x = 1;\ 2(1+1) = 4 = 2(1)+2$
$x = 2;\ 2(2+1) = 6 = 2(2)+2$

Ecuación: $x+1 = 2$

Observa que se verifica sólo para x=1

$x = 1;\ 1+1 = 2$
$x = 2;\ 2+1 = 3 \# 2$
$x = 3;\ 3+1 = 4 \# 2$

Solución de una ecuación

El valor de la letra que hace que la igualdad se verifique se llama **solución** de la ecuación.

Resolver una ecuación es encontrar la solución ó soluciones.

Una ecuación se llama **compatible** si tiene solución.

Si no tiene solución se llama **incompatible**.

Dos o más ecuaciones que tienen las mismas soluciones se llaman **equivalentes**.

$x+5=8$ es una **ecuación compatible** tiene por única solución x=3

$x+1=4$ es una **ecuación compatible** tiene por única solución x=3

Las dos **ecuaciones** son **equivalentes**

$x^2 = -1$ es una **ecuación incompatible**, no tiene solución, ningún número elevado al cuadrado puede ser negativo

Para obtener una **ecuación equivalente** a una dada se utilizan las siguientes reglas.

- Si **sumamos o restamos** a los dos miembros de una ecuación la misma expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.
- Si **multiplicamos o dividimos** los dos miembros de una ecuación la misma expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

Ecuaciones equivalentes a $x+5=8$

$x+7=10$ se obtiene sumando 2
$x+5+2 = 8+2 \rightarrow x+7=10$

$2x+10=16$ se obtiene multiplicando por 2
$2(x+5) = 2\cdot 8 \rightarrow 2x+10 = 16$

EJERCICIOS resueltos

1. Clasifica la siguiente expresión algebraica: $6(7x-1)+3x=4x+76$,en identidad o ecuación.

Sol: Es una ecuación, $6(7x-1)+3x=42x-6+3x=45x-6 \neq 4x+76$

2. Clasifica la siguiente expresión alegraica: $7(5x-1)+5x=40x-7$,en identidad o ecuación.

Sol: Es una identidad, $7(5x-1)+5x=35x-7+5x=40x-7$

3. Escribe una ecuación de la forma ax+b=c cuya solución sea x=4

Sol: $3x-5=7$

4. Escribe una ecuación de la forma ax =b que sea equivalente a $5x+4=-16$

Sol: Restando 4 a los dos miembros de la ecuación se obtiene $5x=-20$

5. Escribe una ecuación de la forma x +b=c que sea equivalente a $5x+20=15$

Sol: Dividiendo por 5 a los dos miembros de la ecuación se obtiene $5x+4=3$

6. Razona si x=2 es solución de la ecuación: $5x+3(x-1)=13$

Sol: Si es solución $5(2)+3(2-1)=10+3 \cdot 1=10+3=13$

7. Razona si x=3 es solución de la ecuación: $7x+3(x-2)=16$

Sol: No es solución $7(3)+3(3-2)=21+3 \cdot 1=24 \neq 16$

8. Comprueba que x=-1, es solución de la ecuación $5x+x^2=-4$

Sol: Si es solución $5(-1)+(-1)^2=-5+1=-4$

9. Escribe una ecuación que sea incompatible

Sol: $(x-1)^2=-4$, ningún número elevado al cuadrado es negativo

2. Ecuaciones de primer grado

Definición

Una **ecuación de primer grado con una incógnita es** una igualdad algebraica que se puede expresar en la forma: **ax=b,** siendo **a** y **b** números reales y **a#0**.

El mayor exponente de las **x** debe ser **1**.

Si a#0 siempre tiene solución y además es única, la solución es: **x=-b/a**

$2x+9=15$ Ecuación de grado 1, se puede escribir como $2x=6$

La solución es: $x=\dfrac{6}{2}=3$

Método de resolución

Para resolver una ecuación de primer grado se siguen estos pasos.

- Se eliminan los denominadores. Para ello se calcula el mcm de los denominadores y se multiplican los dos miembros de la ecuación por él.
- Se quitan los paréntesis.
- Agrupar los términos en x a la izquierda del igual y los números a la derecha.
- Reducir términos semejantes.

$$\boxed{\frac{3x}{2}+2(x-1)=5}$$

Quitar denominadores:

$$2\left(\frac{3x}{2}+2(x-1)\right)=2{\cdot}5$$

$$3x+4(x-1)=10$$

Quitar paréntesis:

$$3x+4x-4=10$$

Agrupar: $3x+4x=10+4$

Reducir: $7x=14$

Despejar: $x=\dfrac{14}{7}=2$

Resolución de problemas

Para resolver un problema mediante una ecuación, hay que traducir al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado y después resolver la ecuación planteada.

Comienza por leer detenidamente el enunciado hasta asegurarte de que comprendes bien lo que se ha de calcular y los datos que te dan.

Una vez resuelta la ecuación da la solución al problema.

EJEMPLO 1) La edad de un padre es triple de la de su hijo, si entre los dos suman 72 años, ¿qué edad tiene cada uno?

✓ Edad del hijo: x años Edad del padre: 3x años
Entre los dos 72 años → 3x+x=72

<u>Ecuación</u>: 3x+x=72
Se resuelve: 4x=72 x=72/4=18
El hijo tiene 18 y el padre 54 años

EJEMPLO 2) ¿Cuántos litros de vino de 4€ litro tenemos que mezclar con vino de 2 € litro, para obtener 40 litros de vino cuyo precio sea 3 € el litro.

✓ Vino de 4€/l: x litros Precio: 4x
Vino de 2€/l: 40-x litros Precio: 2(40-x)
Precio de la mezcla 40·3 → 4x+2(40-x)=3·40

<u>Ecuación</u>: 4x+2(40-x)=3·40
Se resuelve: 4x+80-2x=120
2x=40 x=40/2=20
Hay mezclar 20 litros de vino de cada precio.

EJERCICIOS resueltos

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{-7x+5}{7}+\frac{9x-7}{8}=-1$

Sol: $56\frac{-7x+5}{7}+56\frac{9x-7}{8}=56\cdot(-1)\rightarrow 8(-7x+5)+7(9x-7)=-56$

$-56x+40+63x-49=-56\rightarrow 7x=-47\rightarrow x=\frac{-47}{7}$

b) $\frac{2x-(x+1)}{4}=\frac{5x+2}{6}$

Sol: $12\frac{x-1}{4}=12\frac{5x+2}{6}\rightarrow 3(x-1)=2(5x+2)$

$3x-3=10x+4\rightarrow -7x=7\rightarrow x=\frac{7}{-7}=-1$

c) $\frac{3x-7(x+1)}{6}=\frac{2x-1}{3}-2$

Sol: $6\frac{3x-7(x+1)}{6}=6\frac{2x-1}{3}-6\cdot 2\rightarrow 3x-7(x+1)=2(2x-1)-12$

$3x-7x-7=4x-2-12\rightarrow -8x=-7\rightarrow x=\frac{7}{8}$

d) $\frac{2x-5}{3}-\frac{-2x+8}{7}=x$

Sol: $21\frac{2x-5}{3}-21\frac{-2x+8}{7}=21x\rightarrow 7(2x-5)-3(-2x+8)=21x$

$14x-35+6x-24=21x\rightarrow -x=59\rightarrow x=-59$

e) $\frac{6x-(x-8)}{6}=\frac{-2x-17}{3}+x$

Sol: $6\frac{6x-(x-8)}{6}=6\frac{-2x-17}{3}+6x\rightarrow 6x-(x-8)=2(-2x-17)+6x$

$5x+8=-4x-34+6x\rightarrow 3x=-42\rightarrow x=-14$

11. La edad de un padre es el triple que la de su hijo, si entre los dos suman 56 años ¿Cuál es la edad de cada uno?

Sol:
Edad del hijo: x
Edad del padre: $3x$

$x+3x=56\rightarrow 4x=56\rightarrow x=\frac{56}{4}=14$

La edad del hijo es 14 años y la del padre es 42 años

12. ¿Cuántos litros de vino de 5€ el litro deben mezclarse con vino de 3€ el litro para obtener 50 litros de vino cuyo precio sea de 4€ el litro?

Sol:
Litros de vino de 5 € : x

	litros	precio
vino de 3 € el litro	x	5x
vino de 4 € el litro	50 – x	3(50 – x)
vino de 6 € el litro	50	200

$5x+3(50-x)=200\rightarrow 2x=50\rightarrow x=25$

Hay que mezclar 25 litros de 5 € con vino de 3 €

3. Ecuaciones de segundo grado

Definición. Tipos

Una **ecuación de segundo grado con una incógnita es** una igualdad algebraica que se puede expresar en la forma: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, siendo **a**, **b** y **c** números reales y $\mathbf{a \neq 0}$.

- Los **coeficientes** de la ecuación son a y b. El **término independiente** es c.
- Si $b\neq0$ y $c\neq0$, se dice que la ecuación es **completa**.
- Si b=0 ó c=0 la ecuación es **incompleta**.

Ecuación de segundo grado **completa**: $3x^2 + 4x + 2 = 0$

a=3 ; b=4 ; c=2

Ecuación de segundo grado **incompleta**: $3x^2 + 2 = 0$

a=3 ; b=0 ; c=2

Resolución de $ax^2+bx=0$

La ecuación de segundo grado **incompleta** del tipo $\mathbf{ax^2+bx=0}$ tiene dos soluciones: $\mathbf{x_1=0}$ y $\mathbf{x_2=-b/a}$

Se resuelve sacando factor común a la x e igualando los dos factores a cero.

$$\boxed{3x^2 + 9x = 0}$$

$$x(3x+9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 9 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Resolución de $ax^2+c=0$

La ecuación de segundo grado **incompleta** del tipo $\mathbf{ax^2+c=0}$, puede no tener solución ó tener dos soluciones distintas de la forma $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

$$\boxed{3x^2 - 9 = 0}$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Resolución de $ax^2+bx+c=0$

La ecuación de segundo grado **completa** es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$, siendo a, b y c números reales y $\mathbf{a \neq 0}$

Para obtener las soluciones utilizamos la fórmula

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\boxed{x^2 - 5x + 6 = 0}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}6}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Suma y Producto de las raíces

Si $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ son las raíces de una ecuación de segundo grado $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$, estas cumplen las siguientes propiedades :

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad ; \quad x_1{\cdot}x_2 = \frac{c}{a}}$$

$$\boxed{x^2 - 5x + 6 = 0}$$

Las raíces son x=3 y x=2

$$x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5 = \frac{-(-5)}{1}$$

$$x_1{\cdot}x_2 = 2{\cdot}3 = 6 = \frac{6}{1}$$

$\boxed{2x^2 + 5x - 3 = 0}$

$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)} = \sqrt{49}$

Tiene dos raíces reales distintas

$\boxed{3x^2 + 5x + 6 = 0}$

$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{-37}$

No tiene raíces reales

$\boxed{x^2 + 6x + 9 = 0}$

$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9} = \sqrt{0} = 0$

Tiene dos raíces reales iguales

Discriminante

Se llama discriminante de una ecuación de segundo grado $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$, a la expresión:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$ hay dos raíces reales distintas
- Si $\Delta = 0$ hay dos raíces reales iguales
- Si $\Delta < 0$ no hay raíces reales

$\boxed{(x+7) \cdot (x-9) = 0}$

Para que un producto sea igual a cero basta con que uno de los factores sea cero.

$x + 7 = 0 \rightarrow x = -7$

$x - 9 = 0 \rightarrow x = 9$

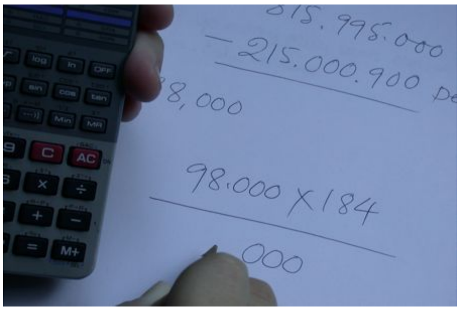
Ecuación (x-a)·(x-b)=0

Para que un producto de varios factores sea cero, al menos uno de los factores ha de ser cero.

Para resolver las ecuaciones en las que un producto sea igual a cero, $\mathbf{(x-a)(x-b)=0}$, se igualan a cero cada uno de los factores y se resuelven las ecuaciones resultantes.

$$x-a=0 \; ; \; x=a$$
$$x-b=0 \; ; \; x=b$$

Resolución de Problemas



Las ecuaciones de primer y segundo grado aparecen en multitud de ocasiones en la resolución de distintos problemas de la vida real

Recuerda los pasos:

- Comprender el enunciado
- Identificar la incógnita
- Traducir a lenguaje algebraico
- Plantear la ecuación
- Resolver
- Comprobar las soluciones

La suma de los cuadrados de dos números naturales es 313. ¿Cuáles son los números?

Llamamos x al menor de los números.

Llamamos x+1 al consecutivo

La ecuación es: $x^2 + (x+1)^2 = 313$

Resolvemos:

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 313$

$2x^2 + 2x + 1 = 313$

$2x^2 + 2x - 312 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 2496}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2500}}{4} = \frac{-2 \pm 50}{4} = \begin{cases} 12 \\ -13 \end{cases}$$

La solución es el número 12, (-13 no vale por no ser natural).

EJERCICIOS resueltos

13. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x^2 - 6x = 0$ Sol: $x(x-6) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x - 6 = 0 \to x = 6 \end{cases}$

b) $x^2 + 27x = 0$ Sol: $x(x+27) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x + 27 = 0 \to x = 27 \end{cases}$

c) $3x^2 + 5x = 0$ Sol: $x(3x+5) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 5 = 0 \to x = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x^2 - 36 = 0$ Sol: $x^2 = 36 \to x = \pm\sqrt{36} \to \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \end{cases}$

b) $4x^2 - 9 = 0$ Sol: $x^2 = \dfrac{9}{4} \to x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} \to \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

c) $x^2 + 9 = 0$ Sol: $x^2 = -9 \to$ No hay solución

15. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ Sol: $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$

b) $3x^2 + 17x + 20 = 0$ Sol: $x = \dfrac{-17 \pm \sqrt{289-240}}{6} = \dfrac{-17 \pm \sqrt{49}}{6} = \dfrac{-17 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{-5}{3} \\ -4 \end{cases}$

c) $3x^2 + 5x + 4 = 0$ Sol: $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-48}}{6} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{-23}}{6} =$ No hay solución

16. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raices sean x=-1, x=4:

Sol: $\left.\begin{matrix} S = -1 + 4 = 3 \\ P = -1 \cdot 4 = -4 \end{matrix}\right\rangle \to x^2 - 3x - 4 = 0$

17. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-2)(x+3) = 0$ Sol: $x - 2 = 0 \to x = 2$; $x + 3 = 0 \to x = 3$

b) $(3x-1)(x-5) = 0$ Sol: $3x - 1 = 0 \to x = \dfrac{1}{3}$; $x - 5 = 0 \to x = 5$

Para practicar

1. Determina si las siguientes igualdades algebraicas son identidades o son ecuaciones:

a) $6(x-1)-3x=4x+6$

b) $3(x-1)-5=3x-8$

c) $(x+1)^2=x^2+2x+1$

d) $x-(2x-5)=3x-8$

2. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2-1=x+2$

b) $x^2-1=x^2+x+2$

c) $x^3-1=x^3+x^2+2$

d) $x-1=3x+2$

3. Indica si x=4 es solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3(x-1)-5=3x-8$

b) $(x-1)^2-5=x$

c) $2(x+3)-5x=x+2$

d) $x^3-60=x$

4. Escribe una ecuación de primer grado cuya solución sea:

a) $x=2$

b) $x=3$

c) $x=1$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $10-x=3$

b) $2x-5=15$

c) $-9+4x=x$

d) $3x-10=50+x$

6. Calcula el valor de x:

a) $3(x-1)+2x=x+1$

b) $2-2(x-3)=3(x-3)-8$

c) $2(x+3)+3(x+1)=24$

d) $\frac{3x}{2}+2(x-1)=12$

7. Obtén la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{3}=1$

b) $\frac{x-3}{2}-3(x+2)=-20$

c) $\frac{2-2(x-3)}{2}-\frac{x+4}{4}=3$

d) $\frac{4(x+1)}{2}+x-\frac{x+3}{3}=5+3(x-2)$

8. Encuentra dos números consecutivos que sumen 71

9. Encuentra un número tal que sumado con su triple sea igual a 100

10. ¿Qué edad tengo ahora si dentro de 12 años tendré el triple de la edad que tenía hace 8 años?

11. Juan tiene 12 años menos que María, dentro de 4 años María tendrá el triple de la edad de Juan ¿cuántos años tienen ahora?

12. A una fiesta asisten 43 personas. Si se marchasen 3 chicos, habría el triple de chicas que de chicos.¿Cuántos chicos y chicas hay?

13. Resuelve

a) $x^2 - 5x = 0$

b) $x^2 + 3x = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$

d) $x^2 + 5 = 0$

14. Resuelve

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 3x - 4 = 0$

c) $x^2 + 3x - 10 = 0$

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

15. Resuelve

a) $(x+2)(x-3) = 0$

b) $(3x+1)(x+5) = 0$

c) $x(x+9) = 0$

d) $(2x+8)(3x-9) = 0$

16. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean:

a) $x=3$ y $x=-5$

b) $x=2$ y $x=4$

c) $x=-1$ y $x=-9$

d) $x=0$ y $x=-5$

17. Resuelve

a) $(x+2)(x-3) = 6$

b) $(x+1)(x-5) = 16$

18. Calcula el valor de m sabiendo que $x=3$ es solución de la ecuación de segundo grado $x^2 - mx + 27 = 0$

19. La suma de un número natural y su cuadrado es 42. ¿De qué número se trata?

20. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Halla sus dimensiones si un lado mide 2 cm menos que el otro.

21. Encuentra dos números positivos que se diferencien en 7 unidades sabiendo que su producto es 44.

22. Encuentra dos números cuya suma sea 10 y su producto 24

23. Un campo de fútbol mide 30 m más de largo que de ancho y su área es de 7000 m^2 , halla sus dimensiones.

24. Tenemos un alambre de 17 cm. ¿Cómo hemos de doblarlo para que forme un ángulo recto de modo que sus extremos queden a 13 cm?.

25. Halla el valor de los coeficientes a,b y c en la ecuación de segundo grado $7x^2 + bx + c = 0$ para qué sus soluciones sean 3 y -2

26. La diagonal de un rectángulo tiene 10 cm. Calcula sus dimensiones si el lado pequeño mide ¾ del lado grande.

27. Reparte el número 20 en dos partes de forma que la suma de sus cuadrados sea 202.

28. Encuentra dos números positivos sabiendo que se diferencian en 7 unidades y su producto es 60.

29. Un triángulo rectángulo tiene de perímetro 24 metros, y la longitud de un cateto es igual a ¾ del otro. Halla sus lados.

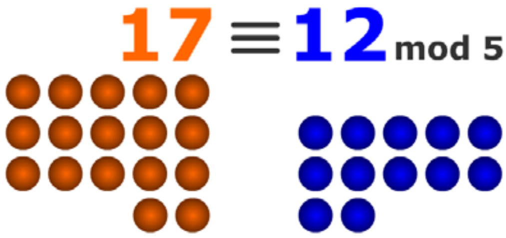
30. Encuentra dos números sabiendo que suma 18 unidades y su producto es 77.

Para saber más

Congruencias lineales

Se dice que **a** es **congruente** con **b** módulo **m** si a y b **dan el mismo resto al dividir por m**.

Se escribe: **a ≡ b mod m**



17 ≡ 12 mod 5

Observa que al dividir 17 entre 5 da resto 2 y al dividir 12 entre 5 da resto 2.

17 ≡ 11 mod 2
12 ≡ 6 mod 3

Una ecuación lineal de congruencias es una ecuación de la forma:

ax+b ≡ 0 mod m

Si **p** es una solución de la ecuación también lo son **p+m**, **p+2m**,**p+3m**,....

- ✓ Si M=m.c.d.(a,m)=1 hay una solución
- ✓ Si M=m.c.d.(a,m)#1 y M es divisor de b hay M soluciones
- ✓ Si M=m.c.d.(a,m)#1 y M no es divisor de b no hay solución

Resolver: 2x-4 ≡ 0 mod 3

mcd(2,3)=1 hay una solución que es x=2, también lo son 2+3k

Resolver: 2x-12 ≡ 0 mod 4

mcd(2,4)=2 y 2 divisor de 4 hay dos soluciones que son

x=0, también lo son 0+4k
x=2, también lo son 2+4k

Resolver: 2x-1 ≡ 0 mod 4

mcd(2,4)=2 y 2 no es divisor de 4 no hay solución.

Observa que 2x-1 es impar, y ningún impar es múltiplo de 4

Recuerda lo más importante

Identidad
Igualdad entre dos expresiones algebraicas que se verifica para cualquier valor de las letras

Ecuación
Igualdad entre dos expresiones algebraicas que se verifica para algún valor de las letras

Ecuación de primer grado
Son ecuaciones que se pueden expresar en la forma **ax=b** con **a#0**.
Tienen una sola solución que es **x=a/b**

Solución de una ecuación
Es el valor de la incógnita que hace cierta la igualdad.

Ecuación Incompatible
Es la ecuación que no tiene solución.

Ecuación Compatible
Es la ecuación que tiene solución.

Ecuaciones equivalentes
Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Ecuación de segundo grado

Completas: $ax^2+bx+c=0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- Si $b^2-4ac>0$ tiene 2 soluciones
- Si $b^2-4ac=0$ tiene 1 solución doble
- Si $b^2-4ac<0$ no tiene solución

Incompletas: Si b=0 ó c=0

- $ax^2+c=0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$
  - -c/a>0, dos soluciones
  - -c/a<0, no hay solución
  - c=0, una solución doble, x=0
- $ax^2+bx=0$
  Soluciones: x=0, x=-b/a

Propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado

La **suma** de las soluciones de la ecuación de segundo grado es

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

El **producto** de las soluciones de la ecuación de segundo grado es

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ecuación Canónica.
Si S es la suma de las raíces y P el producto la ecuación des segundo grado se puede escribir en la forma:

$$x^2-Sx+P=0$$

Autoevaluación

1. Escribe una ecuación de la forma ax+b=c cuya solución sea x=8

2. Resuelve la ecuación: $x - \frac{x-16}{6} = 2(x+6)$

3. Encuentra un número sabiendo que si ha dicho número le sumo seis veces el consecutivo el resultado es igual a 755

4. Resuelve la ecuación: $\frac{x+4}{2} + \frac{x+7}{3} = 1$

5. Resuelve la ecuación: $-4x^2 - 7x = 0$

6. Resuelve la ecuación: $-2x^2 + 8 = 0$

7. Resuelve la ecuación: $x^2 - 24x + 108 = 0$

8. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean 20 y 1

9. El cuadrado de un número positivo más el doble de su opuesto es 960. ¿Cuál es el número?

10. Resuelve: $(x+9)\cdot(4x-8)=0$

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) ecuación b) identidad
c) identidad d) ecuación

2. a) 2 b) 1 c) 2 d) 1

3. a) si b) si c) no d) si

4. a) $x+3=5$ b) $2x+1=7$
c) $3x-1=2$

5. a) x=7 b) x=10
c) x=3 d) x=30

6. a) x=1 b) x=5
c) x=3 d) x=4

7. a) x=15 b) x=5
c) x=1 d) x=6

8. 35

9. 25

10. 18

11. Juan 2 y María 14 años

12. 13 chicos y 30 chicas

13. a) x=0 x=5 b) x=3 x=-3
c) x=0 x=-3 d) No hay solución

14. a) x=2 x=3 b) x=-1 x=4
c) x=2 x=-5 d) x=3 x=3

15. a) x=-2 x=3 b) x=-1/3 x=-5
c) x=0 x=-9 d) x=-4 x=3

16. a) $x^2+2x-15=0$
b) $x^2-6x+8=0$
c) $x^2+10x+9=0$
d) $x^2-5x=0$

17. a) x=4 , x=-3 b) x=7 , x=-3
c) $x^2+10x+9=0$ d) $x^2-5x=0$

18. 12

19. 6

20. 8 y 6

21. 11 y 4

22. 6 y 4

23. 100 y 70

24. Los puntos de doblado están a 12 y 5 cm de los extremos

25. b=-7 c=-42

26. 6 y 8

27. 11 y 9

28. 12 y 5

29. 6,8 y 10

30. 11 y 7

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. -2x+7=-9

2. -8

3. 107

4. -4

5. 0 y -7/4

6. 2 y -2

7. 18 y 6

8. $x^2-21x+20=0$

9. 32

10. -9 y 2

No olvides enviar las actividades al tutor

4 Sistemas de Ecuaciones

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer y clasificar los sistemas de ecuaciones según su número de soluciones.
- Obtener la solución de un sistema mediante una tablas.
- Resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, por los métodos de sustitución, igualación y reducción.
- Utilizar el lenguaje algebraico y los sistemas para resolver problemas.

Antes de empezar

Para empezar, te propongo un problema sencillo

Por presumir de certero
un tirador atrevido
se encontró comprometido
en el lance que os refiero.

Y fue, que ante una caseta
de la feria del lugar
presumió de no fallar
ni un tiro con la escopeta,

y el feriante alzando el gallo
un duro ofreció pagarle
por cada acierto y cobrarle
a tres pesetas el fallo

Dieciséis veces tiró
el tirador afamado
al fin dijo, despechado
por los tiros que falló:

"Mala escopeta fue el cebo
y la causa de mi afrenta
pero ajustada la cuenta
ni me debes ni te debo".

Y todo el que atentamente
este relato siguió
podrá decir fácilmente
cuántos tiros acertó.

Aciertos	Fallos	Premio
16	0	80
15	1	72
14	2	64
13	3	56
12	4	48
11	5	40
10	6	32
9	7	24
8	8	16
7	9	8
6	10	0

Se puede ver que ha acertado 6 tiros.

1. Ecuaciones Lineales

Definición.

Una ecuación de primer grado se denomina **ecuación lineal**.

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una ecuación que se puede expresar de la forma **ax+by=c**, donde x e y son las incógnitas, y a, b y c son números conocidos

$3x + y = 12$

Coeficiente de x= 3, Coeficiente de y= 1

Término independiente =12

Una solución de la ecuación es:

x=1 y=9

Observa que $3\cdot(1)+9=12$

Para obtener más soluciones se da a x el valor que queramos y se calcula la y

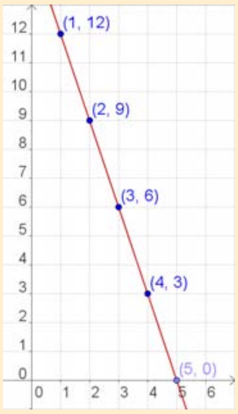
$x = 0 \rightarrow y = 12 - 3\cdot 0 = 12$

$x = 1 \rightarrow y = 12 - 3\cdot 1 = 9$

$x = 2 \rightarrow y = 12 - 3\cdot 2 = 6$

$x = 3 \rightarrow y = 12 - 3\cdot 3 = 3$

Si representamos los puntos en un sistema de ejes coordenados forman una recta:



Solución

Una **solución de una ecuación lineal** con dos incógnitas es un par de valores (x_i,y_i) que hacen cierta la igualdad.

Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones y si las representamos forman una recta.

EJERCICIOS resueltos

1. Dada la ecuación: $3x + 2y = 17$, razona si los siguientes pares son solución.

a) x=1 , y=3 Sol: No es solución $3(1) + 2(3) = 4 + 6 = 10 \# 17$

b) x=5 , y=1 Sol: Si es solución $3(5) + 2(1) = 15 + 2 = 17$

2. Dada la ecuación $5x - 2y = c$, halla el valor de c sabiendo que una solución es:

a) x=3 , y=6 Sol: $5(3) - 2(6) = 15 - 12 = 3 \rightarrow c = 3$

b) x=4 , y=1 Sol: $5(4) - 2(1) = 20 - 2 = 18 \rightarrow c = 18$

3. Halla una solución (x,y) de la ecuación $-4x + 5y = 17$ sabiendo que:

a) x=7 Sol: $-4(7) + 5y = 17 \rightarrow 5y = 45 \rightarrow y = 9 \rightarrow sol = (7,9)$

b) y=1 Sol: $-4x + 5(1) = 17 \rightarrow -4x = 12 \rightarrow x = 3 \rightarrow sol = (3,1)$

4. Escribe una ecuación lineal con dos incógnitas cuya solución sea:

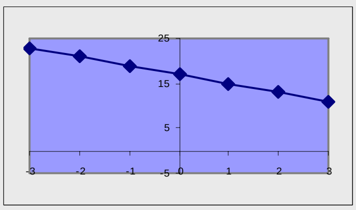
a) x=1 , y=3 Sol: $2x + 5y = 17$

b) x=-2 , y=1 Sol: $2x + y = -3$

5. Haz una tabla de valores (x,y) que sean solución de la ecuación: $2x + y = 17$, y representa estos valores en un sistema de coordenadas.

Sol:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	23	21	19	17	15	13	11



2. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición. Solución

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** son dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común.

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 3x + 4y = 19 \end{cases}$$

Una **solución de un sistema de dos ecuaciones lineales** con dos incógnitas es un par de valores (x_i, y_i) que verifican las dos ecuaciones a la vez. **Resolver el sistema** es encontrar una solución.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

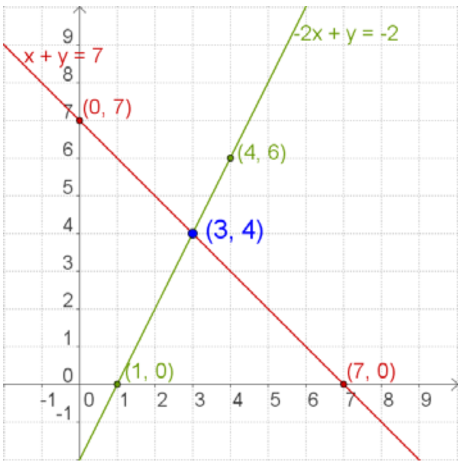
Es una solución del sistema anterior

$$\begin{cases} 2(1) + 3(4) = 2 + 12 = 14 \\ 3(1) + 4(4) = 3 + 16 = 19 \end{cases}$$

Número de Soluciones

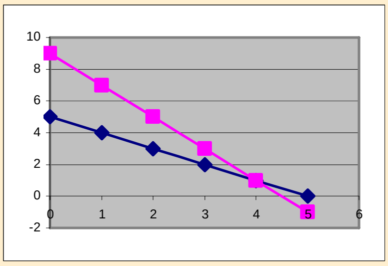
Un sistema de ecuaciones, según el número de soluciones que tenga, se llama:

- **Sistema Compatible Determinado**, si tiene una única solución. La representación gráfica del sistema son dos rectas que se cortan en un punto.
- **Sistema Compatible Indeterminado**, si tiene infinitas soluciones. La representación gráfica del sistema son dos rectas coincidentes.
- **Sistema Incompatible**, si no tiene solución. La representación gráfica del sistema son dos rectas que son paralelas.



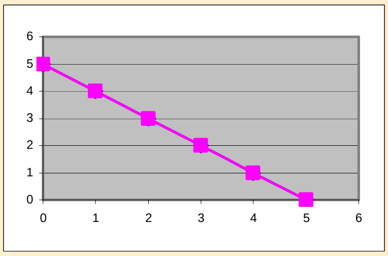
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \rightarrow sol = \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Sistema Compatible Determinado



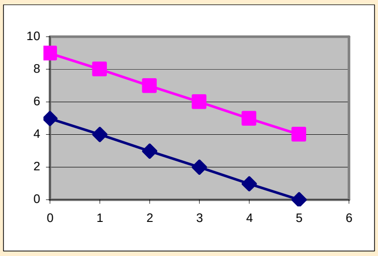
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

Sistema Compatible Indeterminado



$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

Sistema Incompatible



EJERCICIOS resueltos

6. Dado el sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$, razona si los siguientes pares son solución.

a) x=3 , y=4 Sol: Si es solución $\begin{cases} 3(3) + 2(4) = 9 + 8 = 17 \\ 5(3) - (4) = 15 - 4 = 11 \end{cases}$

b) x=5 , y=1 Sol: No es solución $\begin{cases} 3(5) + 2(1) = 15 + 2 = 17 \\ 5(5) - (1) = 25 - 1 = 24 \# 11 \end{cases}$

c) x=3 , y=1 Sol: Si es solución $\begin{cases} 3(3) + 2(1) = 9 + 2 = 11 \# 17 \\ 5(3) - (1) = 15 - 1 = 14 \# 11 \end{cases}$

7. Escribe un sistema de dos ecuaciones cuya solución sea:

a) x=1 , y=2 Sol: $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

b) x=3 , y=1 Sol: $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

c) x=2 , y=3 Sol: $\begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ x - 4y = -10 \end{cases}$

8. Haz una tabla de valores y da la solución del sitemas: $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$

Sol: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

$3x + 2y = 8 \rightarrow$

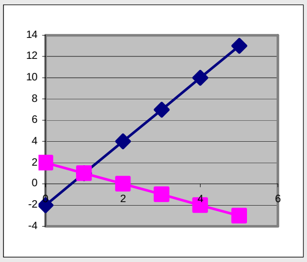
x	−2	−1	0	1	2
y	7	11 / 2	4	5 / 2	1

$5x - y = 9 \rightarrow$

x	−2	−1	0	1	2
y	−19	−14	−9	−4	1

9. Indica cuántas soluciones tiene el sistema: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

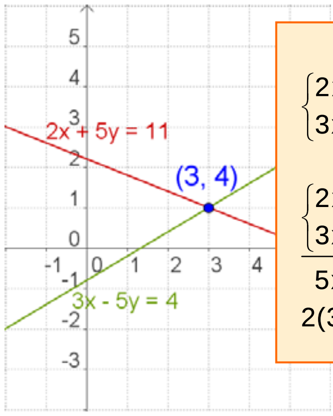
Sol: Una solución,Sistema Compatible Determinado



3. Métodos de resolución

✓ Resolver un sistema por el **método de reducción** consiste en encontrar otro sistema, con las mismas soluciones, que tenga los coeficientes de una misma incógnita iguales o de signo contrario, para que al restar ó sumar las dos ecuaciones la incógnita desaparezca.

Reducción



Reducción

$$\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

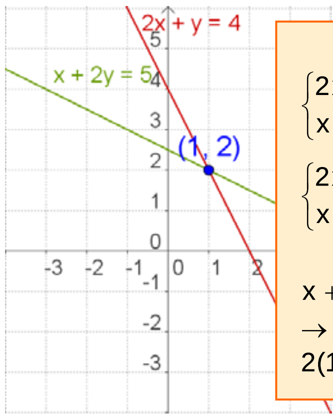
$$\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

$$5x \quad = 15 \rightarrow x = 3$$

$$2(3) + 5y = 11 \rightarrow 5y = 5 \rightarrow y = 1$$

✓ Para resolver un sistema por el **método de sustitución** se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye su valor en la otra.

Sustitución



Sustitución

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ x + 2(4 - 2x) = 5 \end{cases}$$

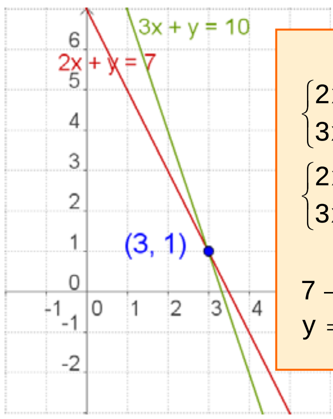
$$x + 2(4 - 2x) = 5 \rightarrow x + 8 - 4x = 5$$

$$\rightarrow -3x = -3 \rightarrow x = 1$$

$$2(1) + y = 4 \rightarrow y = 2$$

✓ Para resolver un sistema por el **método de igualación** se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan.

Igualación



Igualación

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ y = 10 - 3x \end{cases}$$

$$7 - 2x = 10 - 3x \rightarrow x = 3$$

$$y = 7 - 2x = 7 - 2(3) = 1 \rightarrow y = 1$$

EJERCICIOS resueltos

10. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

a) $\begin{cases} 2x + 7y = 20 \\ 3x - 7y = 4 \end{cases}$ Sol: $\begin{cases} 2x + 7y = 20 \\ 3x - 7y = -5 \end{cases}$

$5x = 15 \to x = 3 \to 6 + 7y = 20 \to 7y = 14 \to y = 2$

sol $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$ Sol: $\begin{cases} 10x + 15y = 45 \\ 9x - 15y = 12 \end{cases} \to \begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

$19x = 57 \to x = 3 \to 6 + 3y = 9 \to 3y = 3 \to y = 1$

sol $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

11. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} x + 7y = 11 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$ Sol: $\begin{cases} x + 7y = 11 \to x = 11 - 7y \\ 3x - 5y = 7 \to 3(11 - 7y) - 5y = 7 \to 33 - 21y - 5y = 7 \to -26y = -26 \end{cases}$

$y = 1 \to x = 11 - 7(1) = 4$

sol $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$ Sol: $\begin{cases} 2x + y = 7 \to y = 7 - 2x \\ 3x + 4y = 13 \to 3x + 4(7 - 2x) = 13 \to 3x + 28 - 8x = 13 \to -5x = -15 \end{cases}$

$x = 3 \to y = 7 - 2(3) = 1$

sol $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

12. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación:

a) $\begin{cases} x + 7y = 23 \\ x - 5y = -13 \end{cases}$ Sol: $\begin{cases} x + 7y = 23 \to x = 23 - 7y \\ x - 5y = -13 \to x = -13 + 5y \end{cases} \to 23 - 7y = -13 + 5y \to -12y = -36 \to y = 3$

$x = 23 - 7(3) \to x = 23 - 21 = 2$

sol $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 13 \\ x + y = 9 \end{cases}$ Sol: $\begin{cases} 2x + y = 13 \to y = 13 - 2x \\ x + y = 9 \to y = 9 - x \end{cases} \to 13 - 2x = 9 - x \to -x = -4 \to x = 4$

$y = 13 - 2(4) \to x = 13 - 8 = 5$

sol $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$

4. Aplicaciones prácticas

Recuerda los pasos:

- Comprender el enunciado
- Identificar las incógnitas
- Traducir a lenguaje algebraico
- Plantear las ecuaciones
- Resolver el sistema
- Comprobar la solución

Resolución de problemas

Para resolver un problema mediante un sistema, hay que traducir al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado y después resolver el sistema planteado.

Comienza por leer detenidamente el enunciado hasta asegurarte de que comprendes bien lo que se ha de calcular y los datos que te dan.

Una vez resuelta el sistema no te olvides de dar la solución al problema.

EJEMPLO 1

✓ *La suma de las edades de un padre y de su hijo es 39 y su diferencia es 25, ¿cuál es la edad de cada uno?*

Llamamos x a la edad del padre

y a la edad del hijo

La suma de las edades es 39: $x + y = 39$

La diferencia de las edades es 25: $x - y = 25$

El sistema es: $\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases}$

resolvemos el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases}$$
$$2x \quad = 64 \rightarrow x = 32$$
$$y = 39 - x = 39 - 32 \rightarrow y = 7$$

La edad del padre es 32 años y la del hijo es 7 años

EJEMPLO 2

✓ *Una parcela rectangular tiene un perímetro de 320 m. Si mide el triple de largo que de ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela?*

Llamamos x al ancho e y al largo

El largo es triple que el ancho: $y=3x$

El perímetro es 320: $2x+2y=320$

El sistema es: $\begin{cases} y = 3x \\ 2x + 2y = 320 \end{cases}$

Que resolvemos por sustitución:

$$2\cdot3x+2x=320 \rightarrow 6x+2x=320 \rightarrow 8x=320 \rightarrow x=40 \text{ m}$$
$$y=3x \rightarrow y=120 \text{ m}$$

La parcela mide 40 m de ancho por 120 m de largo.

EJERCICIOS resueltos

13. Ana tiene en su cartera billetes de 10€ y 20€, en total tiene 20 billetes y 440€ ¿Cuántos billetes tiene de cada tipo?

$$\begin{matrix} x: \text{Billetes de } 50\,€ \\ y: \text{Billetes de } 10\,€ \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x+y=20 \\ 50x+10y=440 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=20 \rightarrow y=20-x \\ 5x+y=44 \rightarrow y=44-5x \end{cases}$$

Sol: $\begin{matrix} 20-x=44-5x \rightarrow 4x=24 \rightarrow x=6 \\ y=20-x=20-6=14 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=14 \end{cases}$

Tiene 6 billetes de 50 € y 14 billetes de 10 €

14. La suma de las edades de Miguel y Pedro es 97.Dentro de 4 años la edad de Pedro será cuatro veces la edad de Miguel.¿Qué edades tienen ambos?

$$\begin{matrix} x: \text{Edad de Miguel} \\ y: \text{Edad de Pedro} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x+y=97 \\ y+4=4(x+4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=97 \\ 4x-y=-12 \end{cases}$$
$$5x=85 \rightarrow x=17$$

Sol:

$17+y=97 \rightarrow y=80 \rightarrow \begin{cases} x=17 \\ y=80 \end{cases}$

La edad de Miguel es 17 años y la de Pedro es 40 años

15. Se quiere obtener 90 kg de café a 8’5 €/kg mezclando café de 15 €/kg con café de 6 €/kg, ¿cuántos kg de cada clase hay que mezclar?

$$\begin{matrix} x: \text{Kg de café de } 15\,€/\text{kg} \\ y: \text{Kg de café de } 6\,€/\text{kg} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x+y=90 \\ 15x+6y=765 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=90-y \\ 15(90-y)+6y=765 \end{cases}$$

Sol: $1350-15y+6y=765 \rightarrow -9y=-585 \rightarrow y=65$

$x=90-y=90-65 \rightarrow x=35 \rightarrow \begin{cases} x=35 \\ y=65 \end{cases}$

Hay que mezclar 35kg de café de 15 €/kg con 65kg de café de 6 €/kg

16. En un taller hay 154 vehículos entre coches y motocicletas,si el número de ruedas es de 458, ¿cuántas motocicletas y coches hay?

Sol:

$$\begin{matrix} x: \text{número de coches} \\ y: \text{número de motocicletas} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x+y=154 \\ 4x+2y=468 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=154 \\ 2x+y=234 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x-y=-154 \\ 2x+y=234 \end{cases}$$
$$x=80$$

$y=154-x=154-80 \rightarrow y=74 \rightarrow \begin{cases} x=80 \\ y=74 \end{cases}$

Hay 80 coches y 74 motocicletas

Para practicar

1. Calcula el valor de c para qué la solución de la ecuación, $x + 7y = c$ sea:

a) $x = 1$, $y = 2$

b) $x = 3$, $y = -3$

c) $x = 5$, $y = 0$

d) $x = -2$, $y = 3$

2. Halla una solución (x,y) de la ecuación $-4x + y = 17$ sabiendo que:

a) $x = 1$

b) $y = -7$

3. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución:

a) $x = 4$, $y = -3$

b) $x = 1$, $y = -2$

c) $x = 0$, $y = 5$

d) $x = 1$, $y = 1$

4. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que:

a) tenga infinitas soluciones

b) tenga una sola solución

c) no tenga solución

5. Razona si el punto (x,y) es solución del sistema:

a) $x = 3$, $y = 4 \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases}$

b) $x = 1$, $y = 2 \rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

6. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 10 \end{cases}$

7. Resuelve por reducción:

a) $\begin{cases} 2x + y = 15 \\ x - 2y = -15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -7x + 6y = -29 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -9x - 4y = -53 \\ 9x + 8y = 61 \end{cases}$

8. Resuelve por sustitución:

a) $\begin{cases} x - 12y = 1 \\ -4x - 9y = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 6y = 3 \\ -9x + 2y = -83 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = -17 \\ 5x + 2y = -21 \end{cases}$

9. Resuelve por igualación:

a) $\begin{cases} x - 2y = 17 \\ 7x - 6y = 47 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 4y = 32 \\ x - 3y = -17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = -14 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$

10. Hallar dos números sabiendo que el mayor más seis veces el menor es igual a 62 y el menor más cinco veces el mayor es igual a 78.

11. Al dividir un número entre otro el cociente es 2 y el resto es 5. Si la diferencia entre el dividendo y el divisor es de 51 ,¿de qué números se trata?.

12. La base de un rectángulo mide 20 dm más que su altura. Si el perímetro mide 172 dm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

13. En una clase hay 80 alumnos entre chicos y chicas. En el último examen de matemáticas han aprobado 60 alumnos, el 50% de las chicas y el 90 % de los chicos.¿Cuántos chicos y chicas hay en la clase?

14. La base de un rectángulo mide 70 dm más que su altura. Si el perímetro mide 412 dm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

15. Juan ha realizado un examen que constaba de 68 preguntas, ha dejado sin contestar 18 preguntas y ha obtenido 478 puntos. Si por cada respuesta correcta se suman 10 puntos y por cada respuesta incorrecta se resta un punto,¿cuántas preguntas ha contestado bien y cuántas ha contestado mal?

16. Paco tiene en su monedero 210€ en billetes de 5 y 20 euros. Si dispone de 15 billetes,¿cuántos billetes tiene de cada clase?

17. La suma de dos números es 85 y su diferencia es 19.¿Cuáles son los números?

18. La suma de las edades de Luisa y de Miguel es 32 años. Dentro de 8 años la edad de Miguel será dos veces la edad de Luisa. ¿Qué edades tienen ambos?

19. María ha comprado un pantalón y un jersey. Los precios de estas prendas suman 77€, pero le han hecho un descuento del 10% en el pantalón y un 20% en el jersey, pagando en total 63'6€.¿Cuál es el precio sin rebajar de cada prenda

20. Encontrar un número de dos cifras sabiendo que suman 10 y que si le restamos el número que resulta al intercambiar sus cifras el resultado es 72.

21. Halla las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 88cm y que el triple de la base más el doble de la altura es igual a 118.

22. La suma de las edades de Raquel y Luisa son 65 años. La edad de Luisa más cuatro veces la edad de Raquel es igual a 104. ¿Qué edades tienen ambos?.

23. Se quiere obtener 25 kg de café a 12'36 €/kg, mezclando café de 15 €/kg con café de 9 €/kg. ¿Cuántos kilogramos de cada clase hay que mezclar?

24. Un hotel tiene 94 habitaciones entre dobles e individuales. Si el número de camas es 170. ¿Cuántas habitaciones dobles tiene?.¿Cuántas individuales?

25. Halla dos números tales que si se dividen el primero por 3 y el segundo por 4, la suma de los cocientes es 15, mientras si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5 la suma de los productos es 188.

26. En un corral hay gallinas y conejos: si se cuentan las cabezas, son 50, si se cuentan las patas son 134.¿Cuántos animales de cada clase hay?.

27. Calcula dos números que sumen 150 y cuya diferencia sea cuádruple del menor.

Para saber más

Método de Gauss

Puedes observar que algunos sistemas son muy fáciles de resolver.

Por ejemplo

$$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ \quad 2y = 6 \end{cases}$$ (Sistema Escalonado)

Se despeja la **y** en la segunda ecuación y luego se sustituye en la primera para hallar **x**.

✓ Cualquier sistema se puede transformar en uno escalonado, y resolverlo de esta forma. Este procedimiento se llama **método de Gauss**.

Además este método también es cómodo para sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas.

Por ejemplo

$$\begin{cases} x + 4y - z = 10 \\ \quad 2y + z = 5 \\ \quad\quad z = 1 \end{cases}$$

De forma cómoda puedes ver que la solución es $\mathbf{z=1, y=2, x=3}$

$$\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x + 5y = 19 \end{cases} \xrightarrow[\text{la primera multiplicada por } -2]{\text{cambio la fila 2 por la suma de ella con}}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 11 \\ -y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 11 - 3(3) = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 10 \\ 2x + 3y + z = 13 \\ x + 2y + z = 12 \end{cases} \xrightarrow[\text{la primera fila multiplicada por } -2]{\text{cambio la fila 2 por la suma de ella con}}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 10 \\ y - 5z = -7 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \xrightarrow[\text{la primera fila multiplicada por } -1]{\text{cambio la fila 3 por la suma de ella con}}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 10 \\ y - 5z = -7 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \xrightarrow[\text{la segunda fila multiplicada por } -1]{\text{cambio la fila 3 por la suma de ella con}}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 10 \\ y - 5z = -7 \\ 3z = 9 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 10 - 8 - 9 = -7 \\ y = -7 + 15 = 8 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -7 \\ y = 8 \\ z = 3 \end{cases}$$

Kart Friedrich Gauss (1777-1855)

El método de Gauss consiste en obtener un sistema equivalente al dado que sea escalonado:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p \\ \quad b_2y + c_2z = q \\ \quad\quad c_3z = r \end{cases}$$

Recuerda lo más importante

Ecuación de primer grado con dos incógnitas. $ax + by = c$

a y **b** son los **coeficientes**.
c es el **término independiente**.

Las soluciones de la ecuación son pares de números (x,y) que la verifican.

Hay infinitas soluciones.

Las soluciones, si las representamos, están alineadas

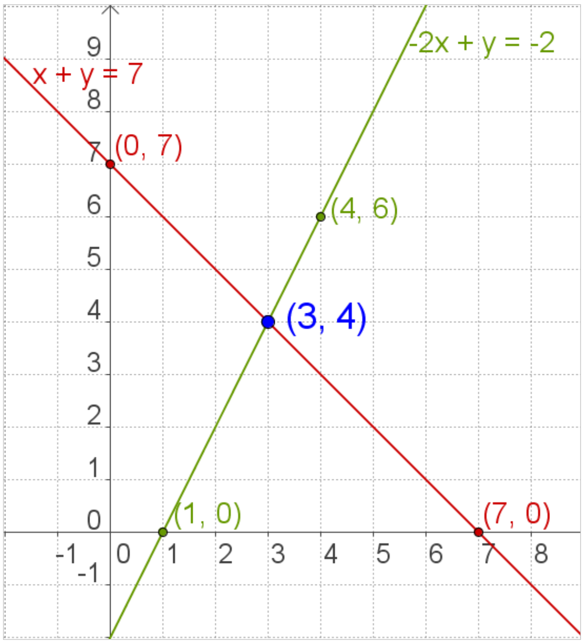
Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Viene dado por la expresión:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

a, **b**, **p** ,**q** son los coeficientes

c y **r** son los términos independientes



Cada una de las ecuaciones se representa mediante una recta, las coordenadas (x,y) del punto en que se cortan son la solución del sistema.

Métodos de solución.

- **Reducción**
- **Sustitución**
- **Igualación**

Sistema Compatible Determinado

El que tiene una única solución

Sistema Compatible Indeterminado

El que tiene infinitas soluciones

Sistema Incompatible

El que no tiene solución

Para resolver problemas

1) Identificar las incógnitas
2) Escribir el sistema
3) Resolver
4) Comprobar las soluciones
5) Dar la solución del problema

Autoevaluación

1. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya única solución sea: x=5 , y=-9

2. Halla el valor de c para qué el sistema tenga infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = c \end{cases}$$

3. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no tenga solución.

4. Escribe una solución de la ecuación: $-x + y = -5$

5. Resuelve por reducción: $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

6. Resuelve por sustitución: $\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$

7. Resuelve por igualación: $\begin{cases} x + 4y = 23 \\ x + 5y = 28 \end{cases}$

8. Encuentra dos números cuya diferencia sea 53 y su suma sea 319

9. El cuadrado de un número positivo más el doble de su opuesto es 960. ¿Cuál es el número?

10. Halla las dimensiones de un rectángulo de perímetro 140 cm si la base es 10 cm mayor que la altura.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 15 b) -18 c) 5 d) 19

2. a) $x = 1$ $y = 21$
b) $x = -6$ $y = -7$

3. a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

5. a) no b) si

6. a) Hay infinitas soluciones
b) $x = 5$ $y = 3$ c) No hay solución

7. a) $x = 3$ $y = 9$
b) $x = 5$ $y = 1$
c) $x = 5$ $y = 2$

8. a) $x = -3$ $y = -1/3$
b) $x = 9$ $y = -1$
c) $x = -1$ $y = -8$

9. a) $x = -1$ $y = -9$
b) $x = 4$ $y = 7$
c) $x = -8$ $y = 3$

10. 14 y 8

11. 97 y 46

12. 52 y 33

13. 50 chicos y 30 chicas

14. 138 y 68

15. 48 bien y 2 mal

16. 6 de 5€ y 9 de 20€

17. 52 y 33

18. El pantalón 20€ y el jersey 57€

19. Luisa tiene 8 y Miguel 24 años

20. 91

21. La base 30 y la altura 14 cm

22. Luisa tiene 52 y Raquel 13 años

23. 14 kg de 15€/kg con 11 kg de 9€/kg

24. 18 individuales y 76 dobles

25. el primero 24 y el segundo 28

26. 33 gallinas y 17 conejos

27. 125 y 25

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. $\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = 14 \end{cases}$

2. c=6

3. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 7 \end{cases}$

4. x=4 y=1

5. x=2 y=3

6. x=3 y=5

7. 186 y 133

8. 32

9. base=40 altura=30

No olvides enviar las actividades al tutor

5

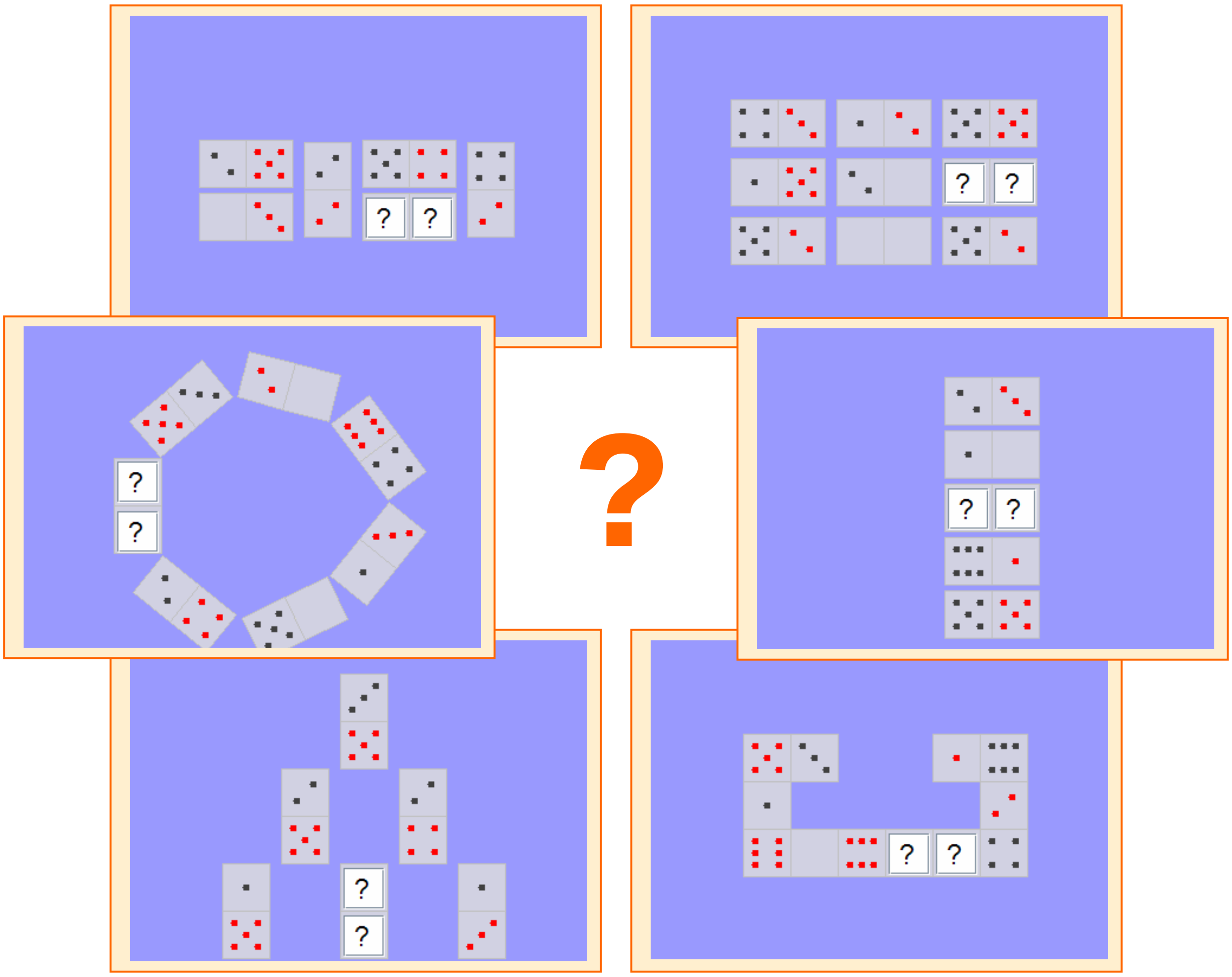
Progresiones

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer una sucesión de números.
- Reconocer y distinguir las progresiones aritméticas y geométricas.
- Calcular él término general de una progresión aritmética y geométrica.
- Hallar la suma de los términos de una progresión aritmética finita y geométrica finita o infinita.
- Hallar el producto de los términos de una progresión geométrica finita.
- Resolver problemas con la ayuda de las progresiones.
- Resolver problemas de interés compuesto.

Antes de empezar



Para empezar, te propongo un juego sencillo, se trata de averiguar la ficha de dominó que falta en cada caso.

1. Sucesiones

Definición.

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números reales:

$$\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots}$$

Cada elemento de la sucesión se llama **término** de la sucesión. Para designarlos se emplean subíndices.

Los términos de las sucesiones se pueden determinar a partir de cierto criterio, este criterio se denomina **regla de formación**.

Término general

El **término general** de una sucesión es el que ocupa un lugar cualquiera, **n**, de la misma, se escribe $\mathbf{a_n}$

- Hay sucesiones cuyo término general es una expresión algebraica, que nos permite saber cualquier término de la sucesión sabiendo el lugar que ocupa, **n**.
- En otras, cada término se obtiene a partir de los anteriores, se dice que están dadas en forma recurrente. Una **relación de recurrencia** es una expresión algebraica, que expresa el término **n** en función de los anteriores.

4, 7, 10, 13,…

Primer término: $a_1=4$
Segundo término: $a_2=7$
Tercer término: $a_3=10$
Cuarto término: $a_4=13$

Cada término se obtiene del anterior sumándole 3.

$a_2 = a_1 + 3 = 4 + 3 = 7$
$a_3 = a_2 + 3 = 7 + 3 = 10$
$a_4 = a_3 + 3 = 10 + 3 = 13$

4, 8, 12, 16,…

Cada término se obtiene multiplicando el lugar que ocupa por 4

$a_1 = 1\cdot 4 = 4$ $a_2 = 2\cdot 4 = 8$
$a_3 = 3\cdot 4 = 12$ $a_4 = 4\cdot 4 = 16$

EJERCICIOS resueltos

1. El primer término de una sucesión es 4, escribe los cuatro primeros términos de ella si: "Cada término es igual al anterior más el lugar que ocupa":

   Sol: $a_1 = 4 \quad a_2 = 4+2 = 6 \quad a_3 = 6+3 = 9 \quad a_4 = 9+4 = 13$

2. Escribe la regla de formación de la siguiente sucesión: 3, 8, 13, 18,...

   Sol: *"Cada término es igual al anterior más 5"*

3. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión formada por los cuadrados de los números naturales a partir del 1.

   Sol: $a_1 = 1 \quad a_2 = 2^2 = 4 \quad a_3 = 3^2 = 9 \quad a_4 = 4^2 = 16 \quad a_5 = 5^2 = 25$

4. Calcula los 4 primeros términos de la sucesión de término general: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

   Sol: $a_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \quad a_2 = \dfrac{2}{1+2} = \dfrac{2}{3} \quad a_3 = \dfrac{3}{1+3} = \dfrac{3}{4} \quad a_4 = \dfrac{4}{1+4} = \dfrac{4}{5}$

5. Escribe los 5 primeros términos de una sucesión cuya regla de formación es: *"Cada término es la suma de los dos anteriores"* $a_1 = 3$ y $a_2 = 7$

   Sol: $a_1 = 3 \quad a_2 = 7 \quad a_3 = 3+7 = 10 \quad a_4 = 7+10 = 17 \quad a_5 = 10+17 = 27$

6. Escribe el término general de estas sucesiones:

   a) 2, 3, 4, 5, 6, ... Sol: $a_n = 1+n$ b) 2, 4, 8, 16, 32, ... Sol: $a_n = 2^n$

2. Progresiones Aritméticas

Definición

Una **progresión aritmética** es una sucesión en que cada término (menos el primero) se obtiene sumando al anterior una cantidad fija **d**, llamada **diferencia** de la progresión.

- Si **d>0** los números cada vez son mayores, se dice que la progresión es **creciente**.
- Si **d<0** los números cada vez son menores, se dice que la progresión es **decreciente**

2, 4, 6, 8, … → d=2
d>0 CRECIENTE

7, 5, 3, 1, … → d=-2
d<0 DECRECIENTE

Para obtener la diferencia basta restar dos términos consecutivos.

Término general

En una progresión aritmética cada término es igual al anterior más la diferencia. Observa:

$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2\cdot d$
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2\cdot d + d = a_1 + 3\cdot d$
$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3\cdot d + d = a_1 + 4\cdot d$

y siguiendo así sucesivamente, se llega a:

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

El **término general** de una **progresión aritmética** es:

$$\boxed{\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}}$$

donde $\mathbf{a_1}$ es el primer término y **d** la diferencia.

3, 5, 7, 9, 11, …

$a_1=3 \quad d=2$

$\mathbf{a_n = 3 + (n-1)\cdot 2}$

Así por ejemplo:
$a_{10} = 3 + 9\cdot 2 = 21$
$a_{100} = 3 + 99\cdot 2 = 201$

Suma de n términos

En una progresión aritmética finita de n términos, la suma de términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de ellos**:**

$$a_1+a_n = a_2+a_{n-1} = a_3+a_{n-2} = \dots$$

A partir de esta propiedad se obtiene que la suma $S_n = a_1+a_2+\dots\dots+a_n$ de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$\boxed{S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n}$$

2, 4, 6, 8, 10, 12

$2+12=14$
$4+10=14$
$6+8=14$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2+12}{2}\cdot 6 = 42$$

EJERCICIOS resueltos

7. Determina la diferencia de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $1, 4, 7, 10, 13....$ Sol: $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$
$d = 13 - 10 = 10 - 7 = 7 - 4 = 4 - 1 = 3$

b) $8, 6, 4, 2, 0, ...$ Sol: $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$
$d = 0 - 2 = 2 - 4 = 4 - 6 = 6 - 8 = -2$

c) $2, 6, 10, 14, 18, ...$ Sol: $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$
$d = 18 - 14 = 14 - 10 = 10 - 6 = 6 - 2 = 4$

8. Escribe el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $4, 6, 8, 10, ...$ Sol: $a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 2$

b) $3, -1, -5, -9, ...$ Sol: $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)\cdot(-4) = -4n + 7$

c) $5, 8, 11, 14, ...$ Sol: $a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)\cdot 3 = 3n + 2$

9. Calcular la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética: $2, 4, 6, 8, 10, ...$

Sol:
$$a_{10} = a_1 + (10-1)d = 2 + 9\cdot 2 = 20$$
$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2+20}{2}\cdot 10 = 11\cdot 10 = 110$$

10. Calcular la suma de los 20 primeros términos de la progresión aritmética: $3, 7, 11, 15, 19, ...$

Sol:
$$a_{20} = a_1 + (20-1)d = 3 + 19\cdot 2 = 41$$
$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{3+41}{2}\cdot 20 = 22\cdot 20 = 440$$

11. El primer término de una progresión aritmética de diferencia 5 es 4 y el último término es 499.Halla la suma de todos ellos.

$a_1 = 4 \quad d = 5 \rightarrow 4, 9, 14, 19, ...$

Hay que calcular el número de términos

Sol: $a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 499 = 4 + (n-1)\cdot 5 = 5n - 1$

$5n = 500 \rightarrow n = 100$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{4+499}{2}\cdot 100 = \frac{503}{2}100 = 25150$$

3. Progresiones Geométricas

Definición

3, 6, 12, 24, 48, ...

razon=2

$$r=\frac{6}{3}=\frac{12}{6}=\frac{24}{12}=\frac{48}{24}=2$$

Una **progresión geométrica** es una sucesión en que cada término (menos el primero) se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija **r**, llamada **razón** de la progresión.

La razón se obtiene al hacer el cociente entre dos términos consecutivos:

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\ldots\frac{a_n}{a_{n-1}}=r}$$

Término General

1, 3, 9, 27, 81, ...

$r=3 \qquad a_1=1$

$$\mathbf{a_n = 3^{n-1}}$$

En una progresión geométrica cada término es igual al anterior por la razón. Observa:

$a_2 = a_1\cdot r \qquad a_3 = a_2\cdot r = a_1\cdot r^2$

$a_4 = a_3\cdot r = a_1\cdot r^2 = a_1\cdot r^3$

y siguiendo así sucesivamente, se llega a:

El **término general** de una **progresión geométrica** cuyo primer término es $\mathbf{a_1}$ y la razón es **r** es

$$\boxed{a_n = a_1\cdot r^{n-1}}$$

Suma de n términos

$1, 2, 4, 8, 16, 32 \qquad r=2 \;;\; n=6$

$$S=\frac{a_n\cdot r-1}{r-1}=\frac{32\cdot 2-1}{2-1}=\frac{63}{1}=63$$

$$S=\frac{a_1\cdot(r^n-1)}{r-1}=\frac{1\cdot(2^6-1)}{2-1}=\frac{63}{1}=63$$

La **suma** de los **n primeros términos** de una **progresión geométrica** de razón **r** es:

$$\boxed{S=\frac{a_n\cdot r-1}{r-1}} \text{ ó bien } \boxed{S=\frac{a_1\cdot(r^n-1)}{r-1}}$$

Suma de todos los términos

$16, 8, 4, 2, 1, \ldots\ldots; \qquad r=\frac{1}{2}$

$$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{16}{1-\frac{1}{2}}=\frac{16}{\frac{1}{2}}=32$$

La **suma** de los **infinitos términos** de una **progresión geométrica** de razón **r,** es:

$$\boxed{S=\frac{a_1}{1-r}}$$

Producto de n términos

1, 2, 4, 8, 16, 32

$1\cdot 32=32$

$2\cdot 16=32$

$4\cdot 8=32$

$$P=\sqrt{(1\cdot 32)^6}=\sqrt{2^{30}}=2^{15}$$

En una progresión geométrica el producto de los términos equidistantes de los extremos es igual al producto de ellos: $a_1\cdot a_n = a_2\cdot a_{n-1} = a_3\cdot a_{n-2} = \ldots$

A partir de esta propiedad se obtiene que el producto de los **n primeros términos** de una **progresión geométrica** es:

$$\boxed{P=\sqrt{(a_1\cdot a_n)^n}}$$

EJERCICIOS resueltos

12. Determina la razón de las siguientes progresiones geométricas:

a) 1, 2, 4, 8, 16.... Sol:
$$r=\frac{a_5}{a_4}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}$$
$$r=\frac{16}{8}=\frac{8}{4}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=2$$

b) 81, 27, 9, 3, 1, ... Sol:
$$r=\frac{a_5}{a_4}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}$$
$$r=\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=\frac{9}{27}=\frac{27}{81}=\frac{1}{3}$$

13. Escribe el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) 4, 12, 36, 108, ... Sol: $a_n=a_1\cdot r^{n-1}=4\cdot 3^{n-1}$

b) 8, 16, 32, 64, ... Sol: $a_n=a_1\cdot r^{n-1}=8\cdot 2^{n-1}=2^3\cdot 2^{n-1}=2^{n+2}$

14. Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16, ...

Sol: $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1}=2\rightarrow S=\frac{a_1\cdot(r^n-1)}{r-1}=\frac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=\frac{1024-1}{1}=1023$

15. Calcula la suma de los términos de una progresión geométrica finita de primer término 1, razón 3 y último término 243:

Sol: $a_1=1$; $a_n=243$; $r=3$ $\rightarrow S=\frac{a_n\cdot r-a_1}{r-1}\cdot n=\frac{243\cdot 3-1}{3-1}=\frac{728}{2}=364$

16. Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica: 8, 4, 2, 1, ...

Sol: $a_1=8$; $r=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\rightarrow S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{8}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{\frac{1}{2}}=16$

17. Calcula el producto de los 8 primeros términos de la progresión geométrica: $\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,\ldots$

Sol:
$$a_1=\frac{1}{8}\ ;\ r=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}=2\ ;\ a_8=\frac{1}{8}2^7=2^4=16$$
$$P=\sqrt{(a_1\cdot a_8)^8}=\sqrt{\left(\frac{1}{8}\cdot 16\right)^8}=\sqrt{2^8}=2^4=16$$

4. Aplicaciones

Interpolación

Interpolar significa colocar otros números entre dos dados. Dados dos números a y b,

- **Interpolar n medios diferenciales** entre a y b es encontrar x_1, x_2, ..., x_n números de forma que a, x_1, x_2, ... , x_n, b formen una progresión **aritmética**.
- **Interpolar n medios proporcionales** entre a y b es encontrar x_1, x_2, ...,x_n números de forma que a, x_1, x_2, ..., x_n, b formen una progresión **geométrica**.

Interpolar 4 medios diferenciales entre 4 y 44.

4, x_1, x_2, x_3, x_4, 44

Progresión aritmética

$44=4+(6-1)\cdot d \rightarrow 40=5d \rightarrow \mathbf{d=8}$

4, **12**, **20**, **28**, **36**, **44**

Interpolar 2 medios geométricos entre 3 y 24.

3, x_1, x_2, 44

Progresión geométrica

$24=3\cdot r^3 \rightarrow 8=r^3 \rightarrow \mathbf{r=2}$

3, **6**, **12**, **24**

Interés Compuesto

Si al invertir un capital durante un periodo de tiempo, t, a un rédito, r%, no se retiran los intereses al finalizar el periodo de inversión sino que se añaden al capital decimos que es un **interés compuesto**.

El capital final $\mathbf{C_f}$ obtenido al invertir un Capital **C**, al rédito **r %**, durante **t** años, a **interés compuesto** viene dado por la fórmula:

$$C_f = C_0 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

Si el tiempo viene dado en meses o días, basta sustituir r por el rédito mensual o diario y t por el nº de meses o días.

¿En cuánto se convierten 2000 € al 4% anual durante 5 años?

$$C_f = C_0 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

$$C_f = 1000 \cdot \left(1+\frac{4}{100}\right)^5 = 1216,65 \text{ €}$$

Resolución de problemas

Observa algunos ejemplos de problemas resueltos con progresiones.

EJEMPLO 1

Encuentra la fracción generatriz de $0,\widehat{2}$

✓ SOLUCIÓN

$$0,\widehat{2} = 0,2+0,02+0,002+\ldots = \frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\ldots$$

Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término 0,2 y razón 0,1.

$$S=\frac{0,2}{1-0,1}=\frac{0,2}{0,9}=\frac{2}{9}$$

EJEMPLO 2

Una persona da limosna durante 17 días, cada día da 1€ más que el anterior; el primer día dio 10€ y el último 26€, ¿cuánto ha dado en total?.

✓ SOLUCIÓN

Las cantidades dadas 10, 11, 12, ..., 26 forman una progresión aritmética de primer término 10 y diferencia 1.

El total es la suma de los 17 términos:

$$S=\frac{10+26}{2}\cdot 17 = 306 \text{ €}$$

EJERCICIOS resueltos

18. Interpola 3 medios aritméticos entre 4 y 29

$$5, x_1, x_2, x_3, 29$$

Sol: $29 = 5 + (5-1)\cdot d \rightarrow 24 = 4d \rightarrow d = 6$

$x_1 = 5 + 6 = 11 \quad x_2 = 11 + 6 = 17 \quad x_3 = 11 + 6 = 17$

19. Interpola 4 medios geométricos entre 1 y 243:

$$2, x_1, x_2, x_3, x_4, 486$$

Sol: $486 = 2\cdot r^5 \rightarrow 243 = 2\cdot r^5 \rightarrow r = 3$

$x_1 = 2\cdot 3 = 6 \quad x_2 = 6\cdot 3 = 18 \quad x_3 = 18\cdot 3 = 54 \quad x_4 = 54\cdot 3 = 162$

20. Calcular el capital obtenido invirtiendo 2000 € al 3 % de interés compuesto anual durante 5 años.

Sol: $C_f = C_0\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = 2000\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^5 = 2318,55\ €$

21. Un árbol de rápido crecimiento multiplica su altura por 1'2 cada año. Si al comenzar el año medía 0'75 m,¿qué altura tendrá dentro de 8 años?

Sol: $a_1 = 0'75\ ;\ a_2 = 0'75\cdot 1'2\ ;\ a_3 = 0'75\cdot 1'2^2 \ldots\ldots \rightarrow a_8 = 0'75\cdot 1'2^8 = 3'22\ \text{m}$

22. Lanzamos una pelota a lo largo de un pasillo. En cada bote que da avanza una distancia igual a la mitad de la distancia anterior. Si al octavo bote cae en un foso de tierra y se para ¿qué distancia habrá recorrido si antes del primer bote ha recorrido 2 m?

$$a_1 = 2\ ;\ a_2 = 1;\ a_3 = \frac{1}{2};\ a_4 = \frac{1}{4}, \ldots\ldots;\ a_8 = \frac{1}{64}$$

Sol: La distancia que ha recorrido es la suma de todas

$$S = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} = \frac{2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{2\left(\frac{1}{256}-1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{2\,\frac{(-255)}{256}}{-\frac{1}{2}} = \frac{2\cdot 255\cdot 2}{256} = \frac{255}{64} = 3'98\,\text{m}$$

Para practicar

1. Completa las sucesiones con los términos que faltan:

a) $3, 7, 11, 15, \_\_, \_\_, \ldots$

b) $3, 6, 12, 24, \_\_, \_\_, \ldots$

c) $32, 16, 8, 4, \_\_, \_\_, \ldots$

d) $5, 10, 17, 26, \_\_, \_\_, \ldots$

2. Calcula los 4 primeros términos de la sucesión de término general:

a) $a_n = n + 5$

b) $a_n = 2^{n-1}$

c) $a_n = \sqrt[n+1]{n+2}$

d) $a_n = 5n$

3. Calcula el término general de las sucesiones:

a) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

b) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

d) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

4. Halla el término 100 de la sucesión de término general:

a) $a_n = 3n + 2$

b) $a_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

5. Averigua la ley de recurrencia de cada una de las sucesiones:

a) $3, 7, 10, 17, 27, \ldots$

b) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$

c) $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$

d) $9, 3, 6, -3, 9, \ldots$

6. Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.

a) $4, 7, 10, 13, 16, \ldots$

b) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

c) $7, 11, 15, 19, 23, \ldots$

d) $3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

7. Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas.

a) $4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

b) $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$

c) $16, 8, 4, 2, 1, \ldots$

d) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, \dfrac{16}{81}, \ldots$

8. Calcula la diferencia de una progresión aritmética si se conocen:

a) $a_{10} = 30$ y $a_1 = -6$

b) $a_{30} = 95$ y $a_{20} = 45$

9. Calcula la razón de una progresión geométrica si se conoce

a) $a_9 = 80$ y $a_8 = 16$

b) $a_{10} = 40$ y $a_7 = 5$

10. Calcula el primer término de una progresión aritmética si se conoce:

a) $a_{20} = 34$ y $d = 7$

b) $a_{31} = 13$ y $d = 3$

11. Calcula el primer término de una progresión geométrica si se conoce:

a) $a_7 = 320$ y $r = 2$

b) $a_6 = 915$ y $r = 3$

12. Calcula el número de términos de una progresión aritmética finita si el primero es 100 el último 420 y la diferencia es 4.

13. Calcula la suma de los primeros 101 términos de la progresión: $1, 4, 7, 17, 20, \ldots.$

14. Calcula la suma de los múltiplos de 3 menores de 1000 y mayores que 100

15. Calcula la suma de los primeros 8 términos de la progresión: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots.$

16. Calcula el producto de los primeros 8 términos de la progresión: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots.$

17. Calcula la suma de los infinitos términos de la progresión: $16, 8, 4, 2, 1, \ldots.$

18. Calcula el producto de los primeros 10 términos de la progresión $16, 8, 4, 2, 1, \ldots.$

19. Depositamos 6000 € al 5 % de interés compuesto anual. ¿Cuánto dinero tendré después de 3 años?

20. Determina el capital que con un interés compuesto del 5% anual, produce 200 € en 4 años.

21. Halla el capital obtenido invirtiendo 100 € al 3 % de interés compuesto anual durante 4 años?

22. Interpola 6 términos entre 1 y 10 para que formen una progresión aritmética.

23. Interpola 3 términos entre 1 y 16 para que formen una progresión geométrica

24. En un examen la primera pregunta valía dos puntos y cada una de las siguientes valía tres puntos más que la anterior. Si en total hay 50 preguntas, ¿cuántos puntos vale el examen?

25. El número inicial de moscas de una población es de 50 y cada tres días el número de moscas se duplica, ¿cuántas moscas habrá a los 30 días?

26. Escribe la fracción generatriz de $1'\widehat{2}$, utilizando la suma de una progresión.

27. En una progresión geométrica el término sexto vale 64 y el cuarto es 16. Halla el término general.

28. Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, si el más pequeño mide 40º ¿cuál es la medida de los otros dos?

Para saber más

La sucesión de Fibonacci

Una de las sucesiones más conocidas es la **sucesión de Fibonacci**.

1,1,2,3,5,8,13,21,34,....

La sucesión es la solución al problema que se plantea en su obra ***Liber abaci***

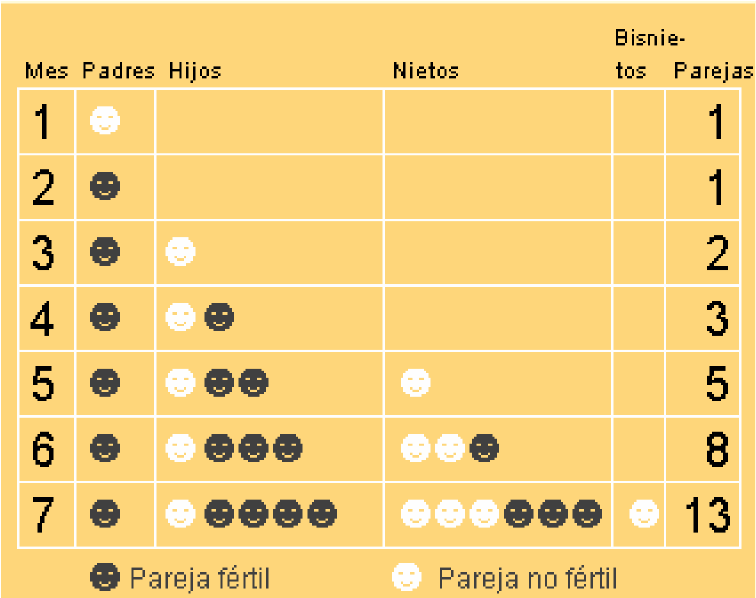
Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil. Cada vez engendra una pareja de conejos que, a su vez, tras ser fértiles engendran cada mes una pareja de conejos.¿Cuántas parejas habrá después de un número determinado de meses?

Fórmula de recurrencia:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

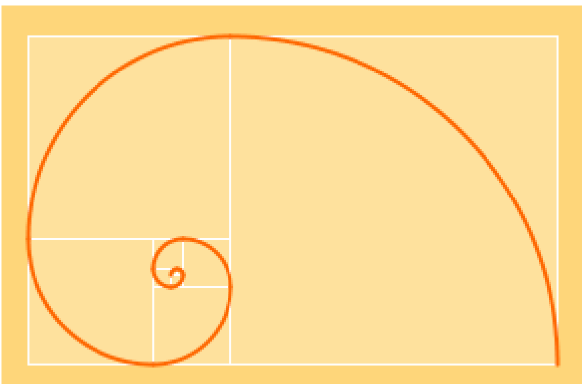
Término General:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$




Leonardo de Pisa (Fibonacci) 1170-1250

Espiral de Fibonacci



Número de oro:

Si dividimos cada número por el anterior la sucesión de cocientes se acerca al número de oro:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Recuerda lo más importante

Sucesión:
Es un conjunto de infinitos números dados de forma ordenada.

Término de una Sucesión:
Cada uno de los números que forman la sucesión..

Sucesión decreciente:
Es aquella en que cada término es menor que ela anterior.

Sucesión creciente:
Es aquella en que cada término es mayor que el anterior.

Progresión Aritmética
Es aquella sucesión en que cada término es igual al anterior más una cantidad constante llamada diferencia de la progresión.

Término general $a_n = a_1 + (n-1)d$

Términos equidistantes de los extremos

$$a_n + a_1 = a_{n-1} + a_2 = a_{n-2} + a_2 = \dots$$

Suma de n téminos $S = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$

Progresión Geométrica
Es aquella sucesión en que cada término es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante llamada razón de la progresión.

Término general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Suma de n términos $S = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$

$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

Suma de los infinitos términos

$$S = \frac{a_1}{1-r} \qquad -1 < r < 1$$

Términos equidistantes de los extremos $a_n \cdot a_1 = a_{n-1} \cdot a_2 = a_{n-2} \cdot a_2 = \dots$

Producto de n téminos $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

Interpolación
Dados números a y b, interpolar n medios (diferenciales ó geométricos) entre a y b es encontrar $x_1, x_2, \dots, x_n$ números de forma que $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$ formen una progresión (aritmética ó geométrica)

Interés Compuesto
El capital final C_f obtenido al invertir un Capital C, al rédito r %, durante t años, a interés compuesto viene dado por la fórmula: $C_f = C_0 \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^t$

Autoevaluación

1. Escribe el término 95 de la sucesión: $\frac{10}{3}, \frac{11}{4}, \frac{12}{5}, \frac{13}{6}, \ldots.$

2. Escribe el término general de la sucesión: $-4, -7, -10, -13, \ldots.$

3. Escribe el término general de la sucesión: $1, 2, 4, 8, \ldots.$

4. Escribe el término 6 de la sucesión: $1, 4, 16, 64, \ldots.$

5. Halla la suma de todos los términos de la progresión: $8, 4, 2, 1, \ldots.$

6. Halla la suma de los 100 primeros términos de la progresión: $1, 4, 7, 10, \ldots.$

7. Halla el producto de los 8 primeros términos de la progresión: $4096, 512, 64, 8, \ldots.$

8. Cuánto dinero me devolverá el banco si hago una imposición de 3000 € aplazo fijo durante 5 años al 3% de interés compuesto anual.

9. Calcula la suma de todos los múltiplos de 3 de tres cifras.

10. El padre de Juan decide guardar un euro el día que Juan cumple un año. Irá duplicando la cantidad en todos los cumpleaños de su hijo. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado el día que cumpla 13 años?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 19 y 23 b) 48 y 96
c) 2 y 1 d) 37 y 50

2. a) $6, 7, 8, 9, \ldots$ b) $1, 2, 4, 8, \ldots$
c) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{6}, \ldots$
d) $5, 10, 15, 20, \ldots$

3. a) $a_n = n$ b) $a_n = n^2$
c) $a_n = \frac{1}{n}$ d) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

4. a) $a_{100} = 302$ b) $a_n = \frac{201}{99}$
c) $a_n = \frac{1}{101}$

5. a) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ b) $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$
c) $a_{n+1} = a_n + 4$ d)
$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

6. a) $a_n = 3n + 1$ b) $a_n = 2n - 1$
c) $a_n = 4n + 3$ d) $a_n = n + 2$

7. a) $a_n = 2^{n+1}$ b) $a_n = 3^{n-1}$
c) $a_n = 2^{5-n}$ d) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

8. a) 4 b) 5

9. a) 5 b) 2

10. a) -99 b) -77

11. a) 5 b) 5

12. 81

13. 15100

14. 165150

15. 511

16. 16

17. 32

18. 1/32

19. 6945´75

20. 928´05

21. 112´55

22. $\frac{16}{7}, \frac{25}{7}, \frac{34}{7}, \frac{43}{7}, \frac{52}{7}, \frac{61}{7}$

23. 2, 4, 8

24. 3775

25. 16000

26. 11/9

27. $a_n = 2^n$

28. 60 y80

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 104/97
2. $a_n = -1 - 3n$
3. $a_n = 2^{n-1}$
4. 1024
5. 16
6. 14950
7. 4096
8. 3477’82
9. 165150
10. 8191

No olvides enviar las actividades al tutor

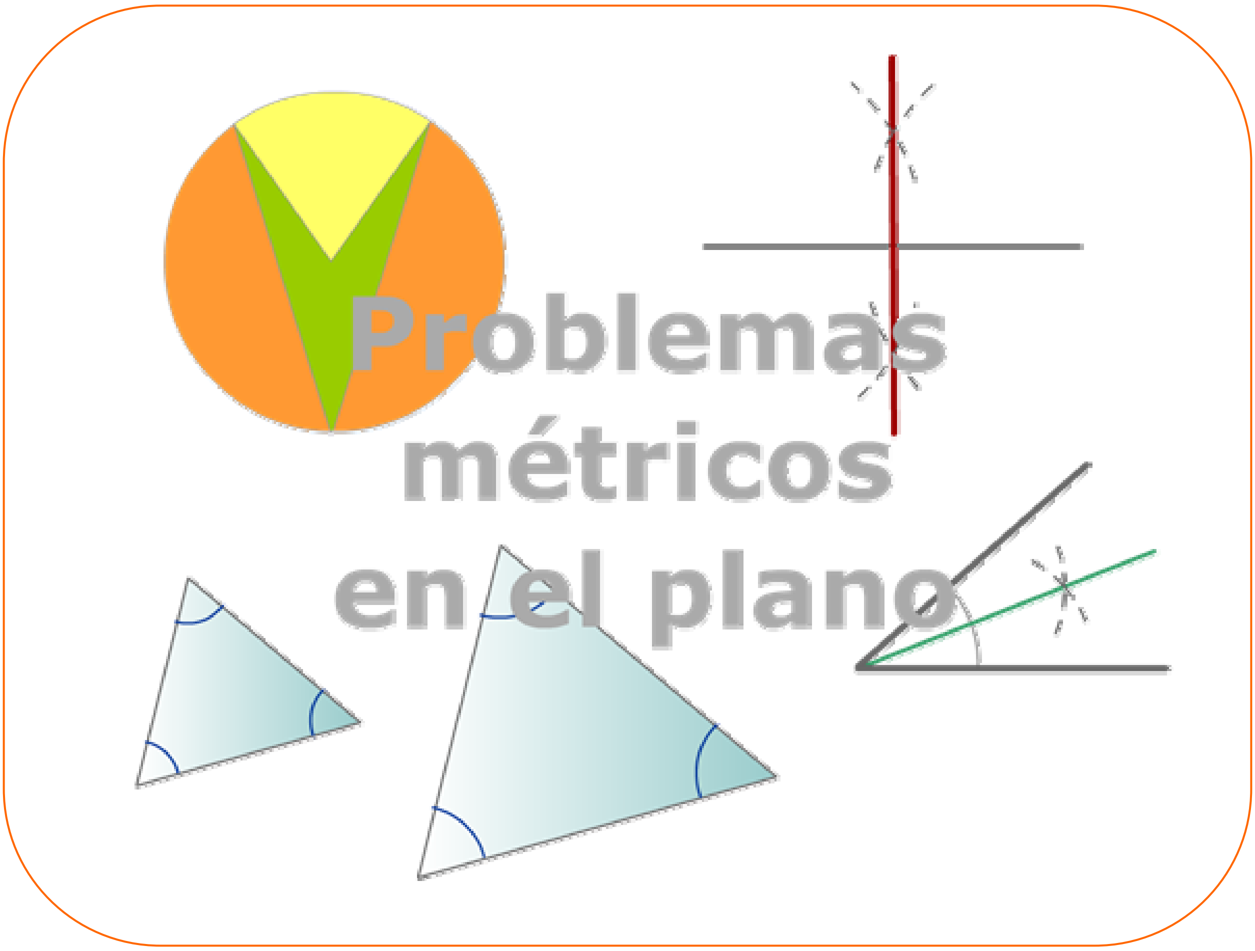
6 Figuras planas, propiedades métricas

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer los ángulos importantes en una circunferencia y sus relaciones.
- Averiguar cuándo dos triángulos son semejantes.
- Utilizar el teorema de Pitágoras para resolver algunos problemas.
- Identificar la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo como conjuntos de puntos.
- Calcular el área de recintos limitados por líneas rectas y por líneas curvas.

Antes de empezar



Recuerda una propiedad importante de los triángulos:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º.

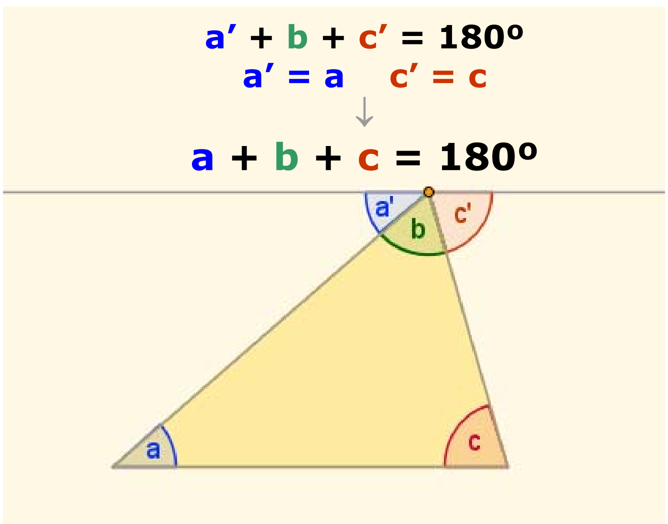
- ✓ Se traza una paralela a la base por el vértice opuesto.

  El ángulo a'=a, se dicen alternos internos. El ángulo c'=c por el mismo motivo.

  a' + b + c' =180º

  por tanto

  a + b + c = 180º

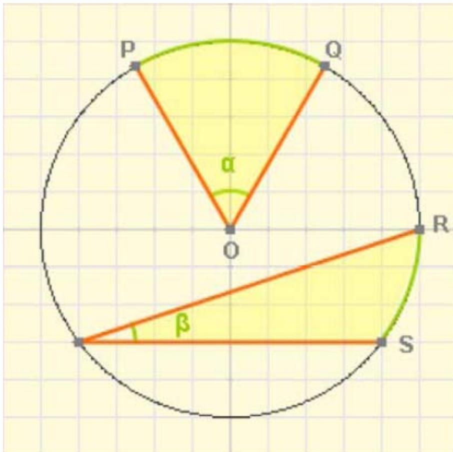


1. Ángulos en la circunferencia

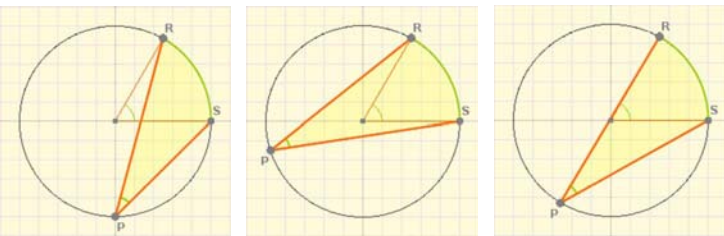
Ángulo central y ángulo inscrito

En la circunferencia de la escena de la derecha el ángulo α, que tiene su vértice en el centro de la circunferencia, se llama **ángulo central** y representa la medida angular del arco PQ.

El ángulo β, que tiene el vértice en la misma circunferencia, se llama **ángulo inscrito** y se dice que abarca el arco RS.

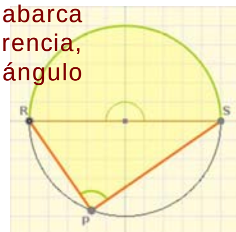


> El **ángulo inscrito** que abarca un arco de circunferencia determinado, es igual a la **mitad del ángulo central** que abarca el mismo arco.



Aunque se cambie la posición del vértice P el ángulo no varía. Los ángulos inscritos que abarcan el mismo arco de circunferencia son iguales.

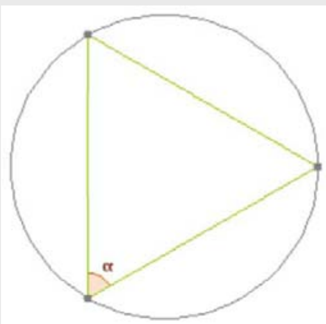
El ángulo central abarca una semicircunferencia, mide 180º, el ángulo inscrito es recto.



EJERCICIOS resueltos

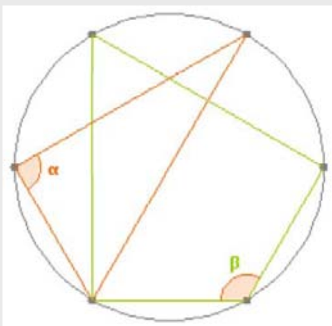
1. Calcula el valor del ángulo o los ángulos marcados en cada caso.

a) La circunferencia se ha dividido en 3 partes iguales



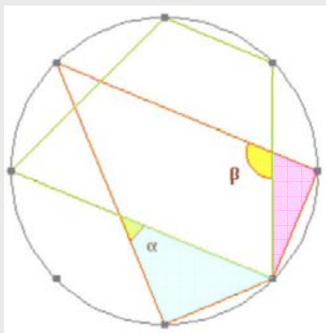
Sol: El ángulo α abarca 120º, su valor es la mitad, 60º.

a) La circunferencia se ha dividido en 6 partes iguales



Sol: El ángulo α abarca 180º, su valor es la mitad, 90º.
El ángulo β abarca 240º, cuatro divisiones de la circunferencia, su medida es 120º.

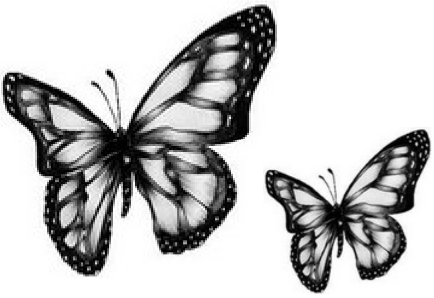
a) La circunferencia se ha dividido en 8 partes iguales



Sol: En el triángulo azul
B=90º, C=45º
α=180º-90º-45º=45º
En el triángulo rosa
B=22,5º y D=90º
β=90º+22,5º=112,5º

2. Semejanza

Figuras semejantes

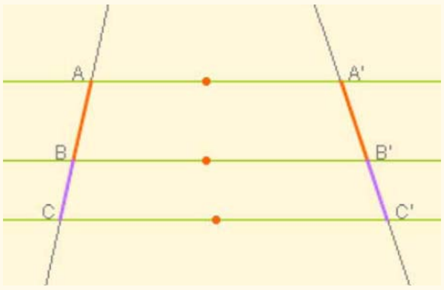


Observa a la izquierda la pareja de **figuras semejantes**, tienen la **misma forma** pero están representadas con **tamaños diferentes**, una puede considerarse una ampliación de la otra.

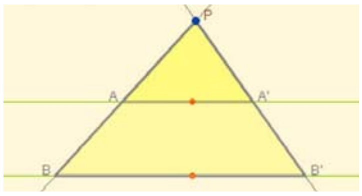
- Dos figuras planas se consideran semejantes si existe la misma proporción, llamada **razón de semejanza**, entre sus lados homólogos y además sus ángulos homólogos son iguales.

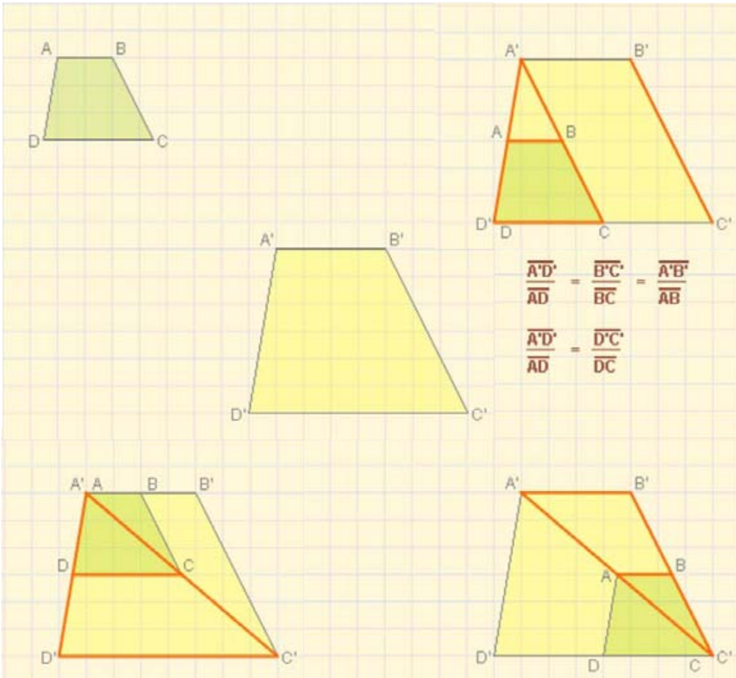
La semejanza está basada en el **Teorema de TALES**: dos rectas que cortan a varias paralelas determinan en estas segmentos proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$



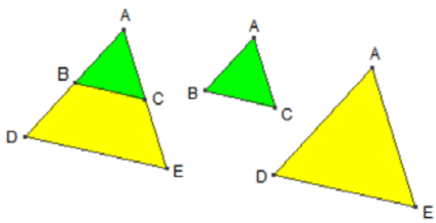
Triángulos en posición de **Tales**: los lados homólogos son proporcionales, los ángulos son iguales. Son **semejantes**.





Observa en la figura que los dos polígonos, verde y amarillo, tienen los ángulos iguales, y los lados proporcionales, son **semejantes**

Semejanza de triángulos



Dos triángulos son **semejantes** si se pueden poner en **posición de Tales**. Como hemos visto en la sección anterior, esto significa que sus **lados homólogos** guardan la misma proporción y que **sus ángulos** son **iguales**.

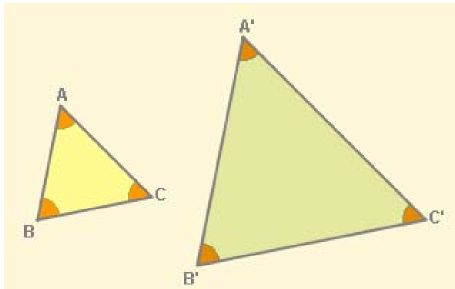
En el caso de los triángulos para que sean semejantes Bastará que se cumpla uno de los siguientes criterios:

Criterios de semejanza de triángulos

1) Si dos triángulos tienen los **ángulos iguales**, entonces son semejantes; bastará que tengan dos, el tercero es lo que falta hasta 180º.

2) Si dos triángulos tienen **un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales**, son semejantes.

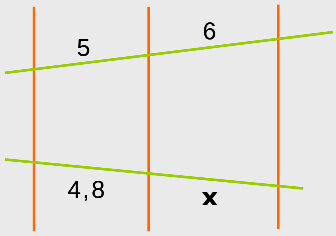
3) Si dos triángulos tienen sus tres **lados proporcionales**, entonces son semejantes.



EJERCICIOS resueltos

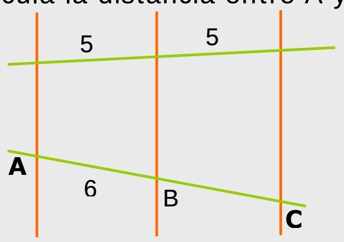
2. Las rectas de color naranja son paralelas

a) Calcula x



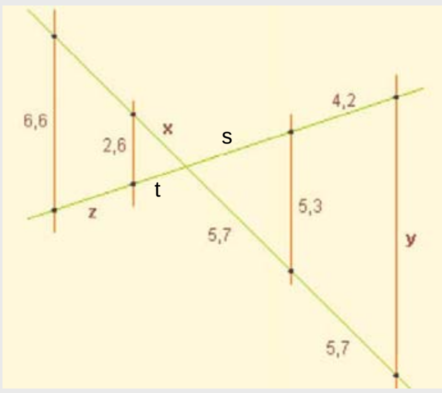
$$\frac{6}{5} = \frac{x}{4,8} \Rightarrow x = \frac{4,8 \cdot 6}{5} = 5,76$$

b) Calcula la distancia entre A y C.



Puesto que los segmentos homólogos son iguales $\overline{AB} = \overline{BC} = 6$, luego $\overline{AC} = 12$

3. Calcula x, y, z.



$$\frac{x}{5,7} = \frac{2,6}{5,3} \rightarrow x = \frac{5,7 \cdot 2,6}{5,3} = 2,8$$

$$\frac{5,7}{5,3} = \frac{2 \cdot 5,7}{y} \rightarrow y = 10,6$$

Para calcular z hay varias formas, por ejemplo: El segmento s mide 4,2 ya que debe guardar la proporción con los que miden 5,7.

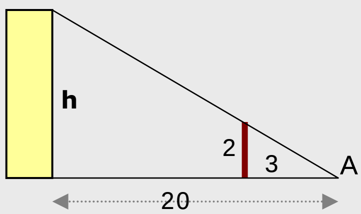
Se calcula t: $\frac{t}{2,6} = \frac{4,2}{5,3} \rightarrow t = 2,06$

Y conocido t: $\frac{2,06}{2,6} = \frac{2,06 + z}{6,6} \rightarrow z = 3,17$

4. Desde el punto A se ven alineados los extremos del poste marrón y del edificio amarillo, ¿cuál es la altura de éste?

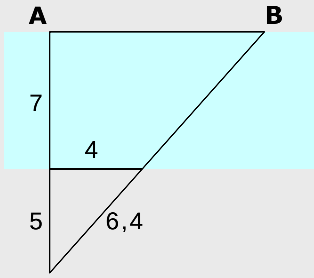
Como el edificio y el poste son paralelos según el teorema de Tales:

$$\frac{h}{2} = \frac{20}{3} \rightarrow h = \frac{20 \cdot 2}{3} = 13,3\text{m}$$



EJERCICIOS resueltos

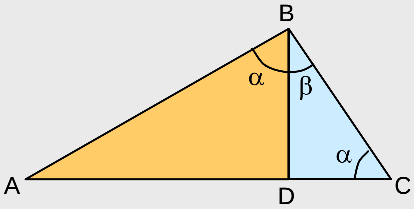
5. Calcula la distacia entre los puntos A y B situados al otro lado del río.



Por el Teorema de Tales: $\frac{7+5}{5}=\frac{AB}{4}$

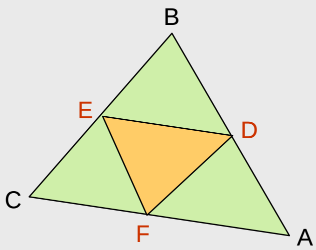
Luego $AB=\frac{48}{5}=9,6$

6. En un triángulo rectángulo ABC (B=90º) se traza la altura sobre el lado AC, formándose así los triángulos también rectángulos, BDA y BCD, ¿son semejantes también estos triángulos?, ¿qué criterio aplicas?



En efecto son semejantes ya que tienen los ángulos iguales (primer criterio).
1) Ambos tienen un ángulo D=90º
2) El ángulo α es igual en ambos ya que es 90º-β. En el triángulo naranja se ve a simple vista y en el azul recuerda que la suma de los tres debe ser 180º por lo que $\alpha + \beta = 90º$

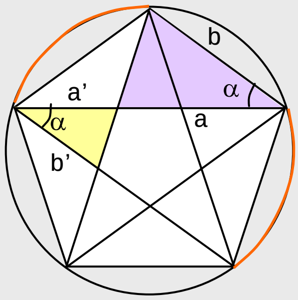
7. En un triángulo cualquiera ABC, se unen los puntos medios de los lados para formar otro triángulo DEF. ¿Son semejantes estos dos triángulos?, ¿qué criterio aplicas?.



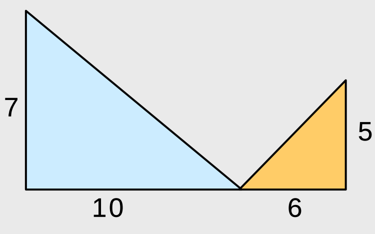
ABC y DEF son semejantes.
Observa que los triángulos ABC y DBE están en posición de Tales por lo que AC/DE=CB/EB=2 ya que E es el punto medio de BC.
Siguiendo el mismo razonamiento AB/EF=2 y BC/DF=2, por tanto los tres pares de lados guardan la misma proporción. (Criterio 3)

8. La figura era conocida en la antigüedad como "pentagrama pitagórico". En ella se pueden ver bastantes parejas de triángulos semejantes. Los de color amarillo y morado, ¿son semejantes?, ¿qué criterio aplicas?.

Son semejantes ya que los ángulos llamados α son iguales pues abarcan el mismo arco de circunferencia (360º/5). Además por el Teorema de Tales a/a' = b/b', por tanto los lados que forman el ángulo α son proporcionales. (Criterio 2º)



9. Los triángulos de la figura, ¿son semejantes?.



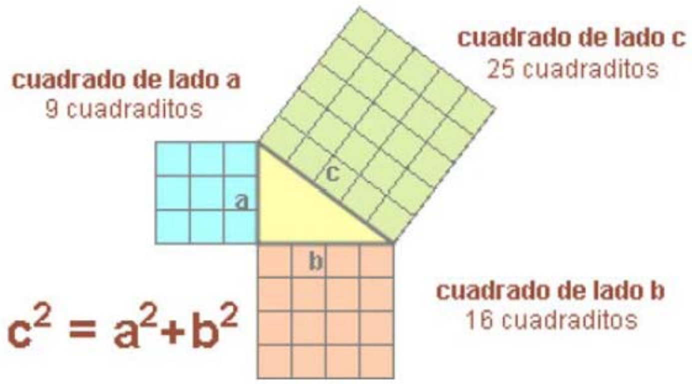
No son semejantes ya que los lados no son proporcionales,

$$\frac{10}{6} \neq \frac{7}{5}$$

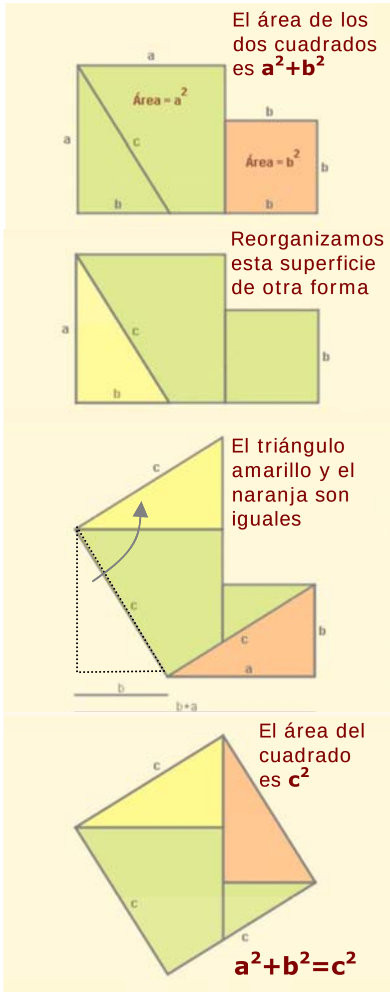
3. Triángulos rectángulos

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

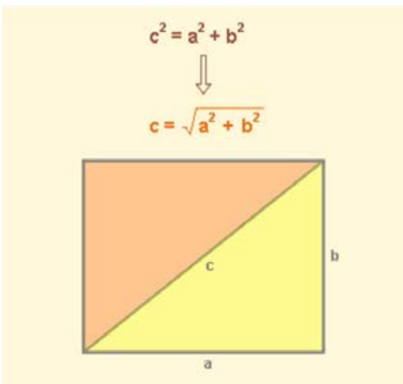


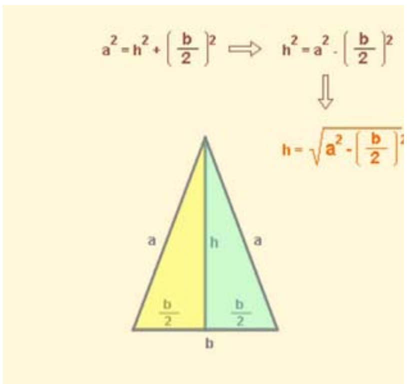
Observa la demostración de la derecha.



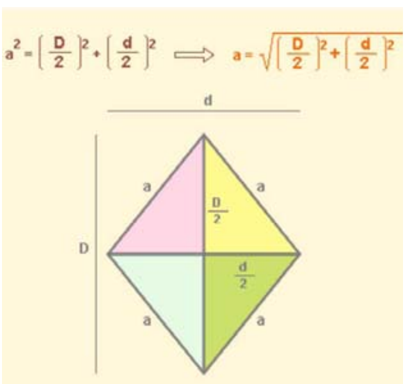
Aplicaciones del Teorema de Pitágoras

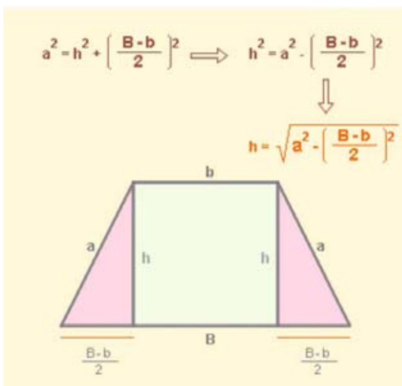
El **teorema de Pitágoras** es de gran utilidad en multitud de problemas en los que se presenta algún triángulo rectángulo. Aquí puedes ver algunos ejemplos.

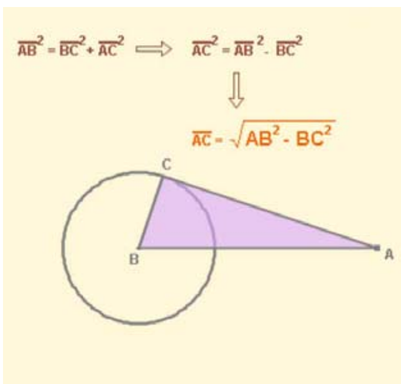




- Calcular la diagonal de un rectángulo.
- Calcular la altura en algunos triángulos.
- Calcular los lados de un rombo.
- Calcular la altura de un trapecio
- Calcular segmentos de tangente a una circunferencia.

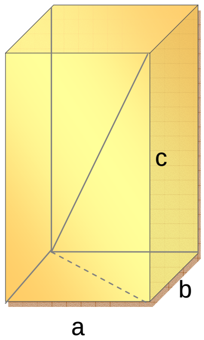






La diagonal de un ortoedro de aristas a, b y c es:

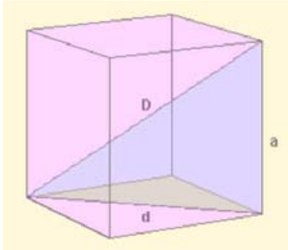
$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



El Teorema de Pitágoras en el espacio

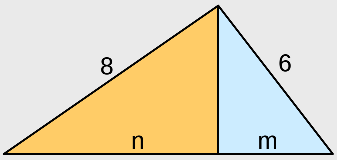
- Calcular la **diagonal de un cubo** de arista **a**

$$D^2=a^2+d^2$$
$$d^2=a^2+a^2=2a^2$$
$$D^2=3a^2 \quad \text{y} \quad D=a\sqrt{3}$$



EJERCICIOS resueltos

10. En el triángulo rectángulo de la figura se traza la altura sobre la hipotenusa dando lugar a los triángulo naranja y azul. Calcula el valor de **m** y de **n**.



La hipotenusa del triángulo inicial es $\sqrt{8^2+6^2} = 10$

En el triángulo naranja: $64=h^2+n^2$

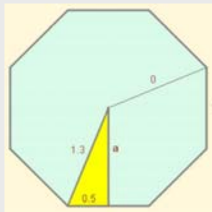
En el triángulo azul: $36=h^2+m^2$

restando ambas ecuaciones y como $m+n=10$, queda:

$28=n^2-(10-n)^2$; $\quad 28=n^2-100+20n-n^2 \quad 128=20n$

n=6,4 **m=3,6**

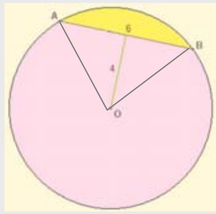
11. Calcula cuanto mide la apotema de un octógono regular de lado 1 dm y radio 1,3 dm.



En el triángulo rectángulo que determinan la apotema, el radio y la mitad del lado:

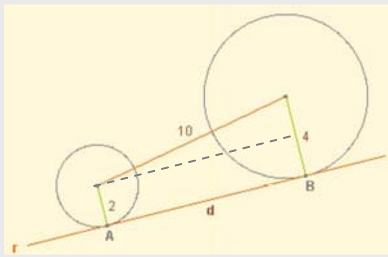
$a = \sqrt{1,3^2 - 0.5^2} = \sqrt{1,69 - 0,25} = \sqrt{1,44} = 1,2$

12. En una circunferencia se sabe la longitud de una cuerda AB, 6 cm, y la distancia de ésta al centro de la circunferencia, 4 cm. ¿Cuánto mide el radio?.



El triángulo AOB es isósceles (OA=OB=radio) y como la distancia del centro a la cuerda se toma sobre la perpendicular, la altura de este triángulo es 4 cm, $r = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$ cm

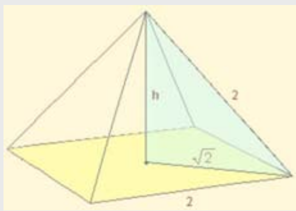
13. La recta r es tangente a las dos circunferencias en los puntos A y B. Halla la distancia que hay entre ambos puntos de tangencia.



Observa el triángulo rectángulo:

$d = \sqrt{10^2 - (4-2)^2} = \sqrt{96} = 9,8$

14. La pirámide de la figura es regular, su caras son triángulos equiláteros y su base un cuadrado de lado 2 m. Calcula su altura.



La diagonal de la base mide $\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

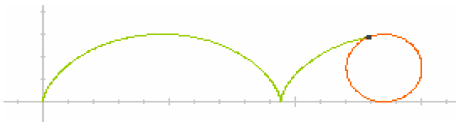
La altura es un cateto del triángulo azul:

$h = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$

4. Lugares geométricos

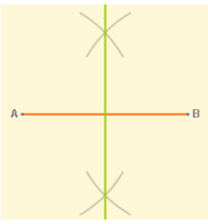
Definición y ejemplos

Un **lugar geométrico** en el plano es un **conjunto de puntos** que cumplen todos ellos una misma propiedad.



Observa la curva que describe un punto P al rodar la circunferencia sobre el eje OX, se llama **cicloide**.

- La **mediatriz** de un segmento

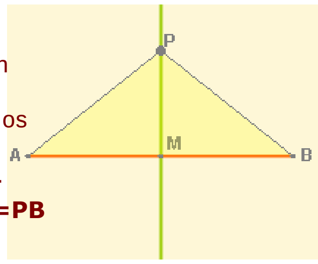


Es la perpendicular por el punto medio del segmento.

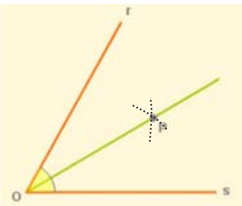
La **mediatriz** de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** de A y de B.

MA=MB
El ángulo en M es recto.
Los triángulos AMP y BMP son iguales.

PA=PB



- La **bisectriz** de un ángulo

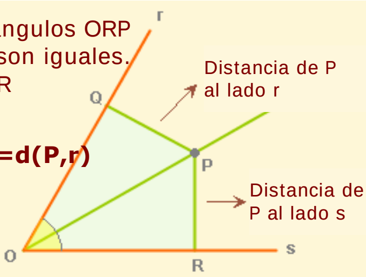


Es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.

La **bisectriz** de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** de los lados de dicho ángulo.

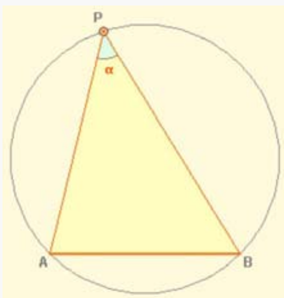
Los triángulos ORP y OQP son iguales.
PQ = PR

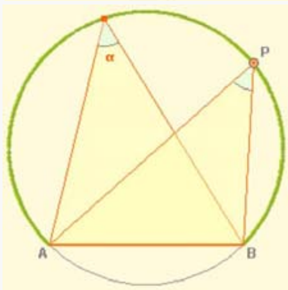
d(P,s)=d(P,r)



Un EJEMPLO interesante

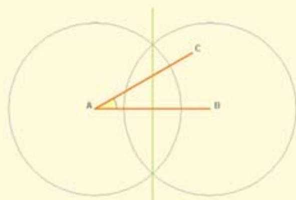
El **arco capaz** de un ángulo α sobre un segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los puntos del plano desde los que se ve el segmento $\overline{AB}$ desde un ángulo α.





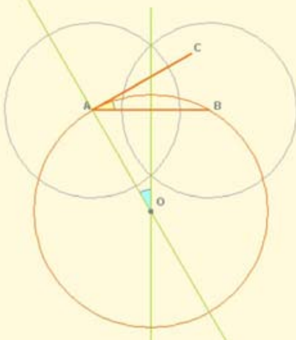
construcción

1) Elegido el ángulo, α, se dibuja la mediatriz del segmento AB.

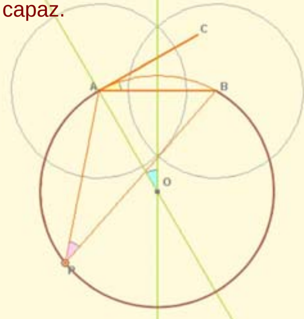


2) Desde A se traza la perpendicular a AC.
El ángulo azul es igual a α.

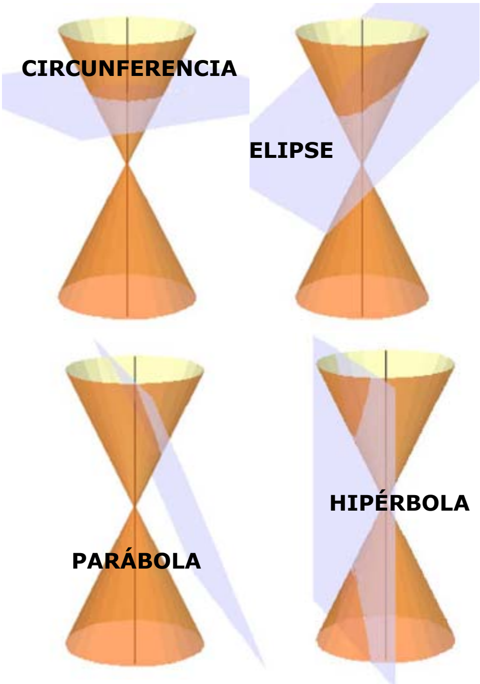
3) Se traza la circunferencia con centro en O y radio OA=OB.



4) El ángulo de vértice P es inscrito y mide la mitad del AOB, es decir α, con lo que tenemos dibujado el arco capaz.



cidead



Mas lugares geométricos: las cónicas

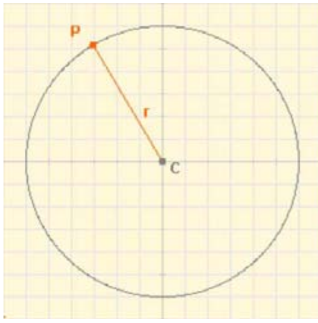
Las curvas cónicas, conocidas desde la antigüedad, pueden obtenerse seccionando un cono con un plano.

Las curvas cónicas son tres:

- Elipse (contiene a la circunferencia como caso particular)
- Hipérbola
- Parábola

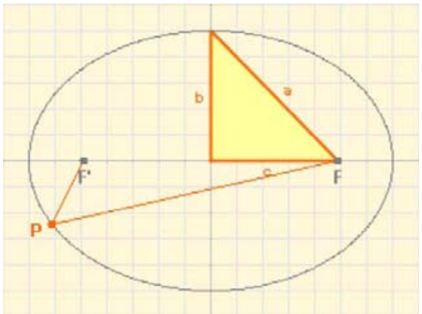
Circunferencia
Lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de uno fijo, el **centro**.

distancia(P,C)=radio



Observa el triángulo rectángulo:
a = semieje mayor
b = semieje menor
2c = distancia focal

$$a^2 = b^2 + c^2$$

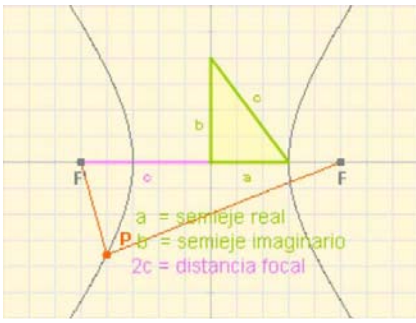


Elipse:
Lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos fijos, los **focos**, es constante

D(P,F)+d(P,F') = 2a

Observa el triángulo rectángulo:
a = semieje "real"
b = semieje "imaginario"
2c = distancia focal

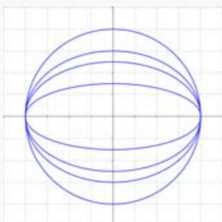
$$c^2 = a^2 + b^2$$



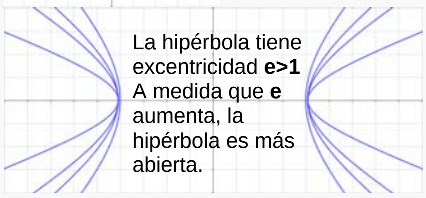
Hipérbola
Lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos fijos, los **focos**, es constante.

D(P,F) – D(P,F') = 2a

La excentricidad $e = \frac{c}{a}$



La elipse tiene excentricidad **e<1**
A medida que **e** disminuye, la elipse es menos achatada.
La circunferencia tiene **e=0**

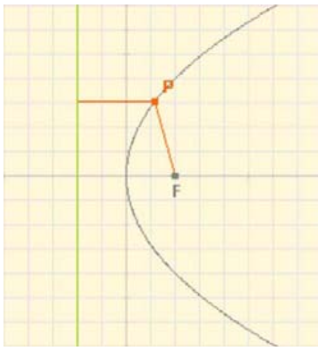


La hipérbola tiene excentricidad **e>1**
A medida que **e** aumenta, la hipérbola es más abierta.

e=0 : circunferencia
e<1 : elipse
e=1 : parábola
e>1 : hipérbola

Parábola
Lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto, el foco, y de una recta llamada directriz.

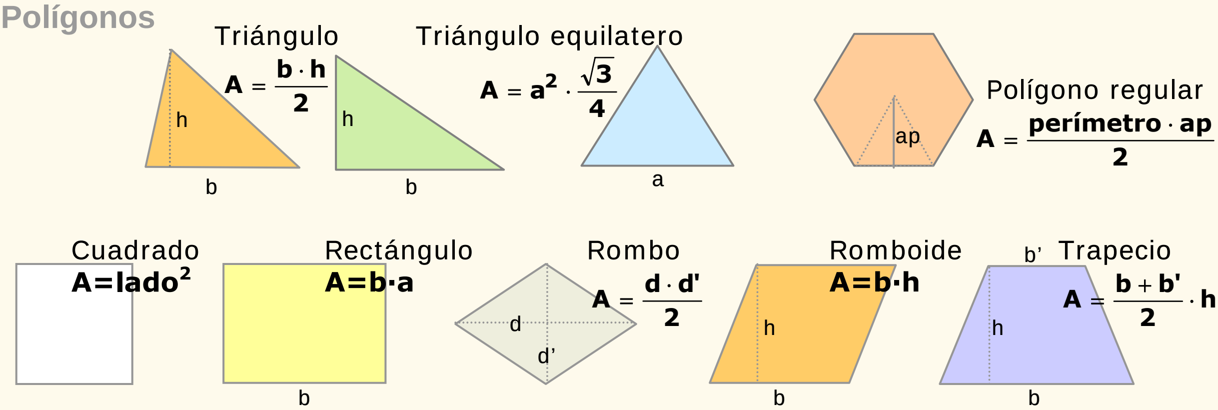
D(P,F) = D(P,r)



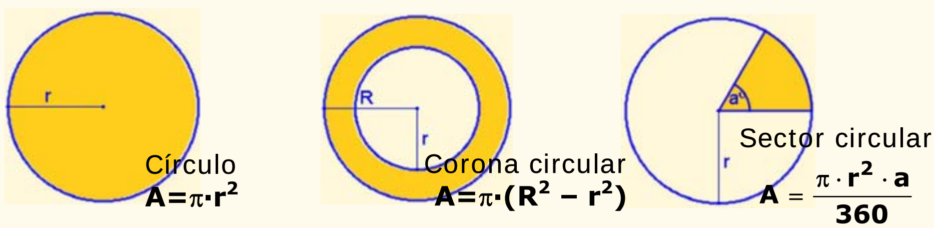
5. Áreas de figuras planas

Recuerda las áreas de figuras conocidas

Polígonos

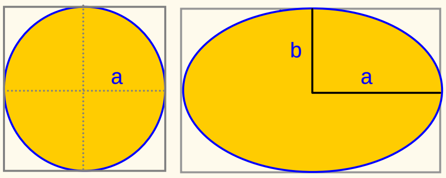


Figuras Curvas



La proporción entre el área del círculo y de la elipse es la misma que entre el área de la elipse y del rectángulo:

$$\frac{A_{CÍRC}}{A_{CUAD}} = \frac{\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4} \qquad \frac{A_{ELIPSE}}{A_{RECT}} = \frac{\pi ab}{4ab} = \frac{\pi}{4}$$



Recinto elíptico
$A=\pi \cdot a \cdot b$

EJERCICIOS resueltos

15. La figura de la derecha está compuesta por áreas de color blanco (cuadrados y triángulos), rojo (pentágonos) y negro. Calcula el área de cada color. Toda la figura es un cuadrado de 12 m de lado.

Una de las formas de afrontar el problema:

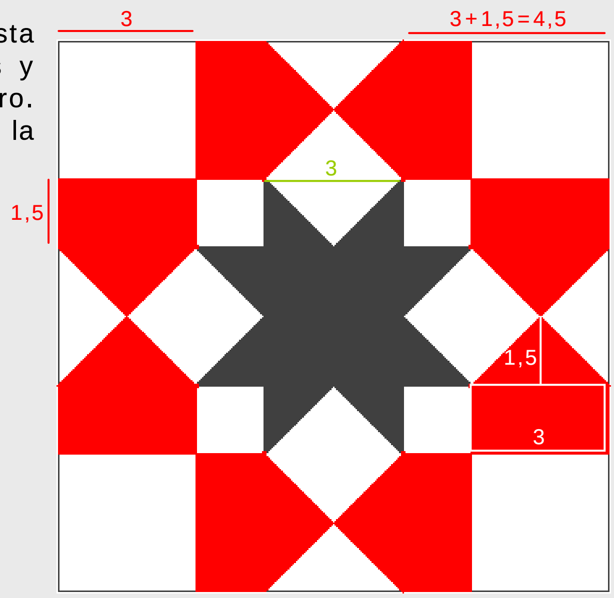
El área total es $12^2=144$ m^2

El área de color rojo es la de 8 pentágonos, cada uno de los cuales está formado por un rectángulo y un triángulo.
Área roja = $8 \cdot (3 \cdot 1,5+3 \cdot 1,5/2)= 54$ m^2

El área de la estrella de color negro es la de dos cuadrados de lado 3 (el central y las 8 puntas que componen otro).
Área negra = $2 \cdot 3^2 = 18$ m^2

El área de color blanco es la de 8 cuadrados de lado 3 m.
Área blanca = $8 \cdot 3^2 = 72$ m^2

Entre las tres suman $54+18+72 = 144$ m^2



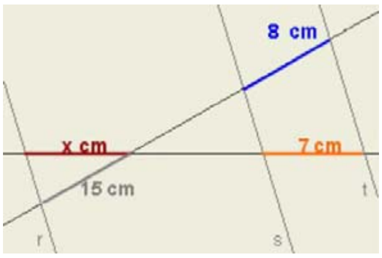
En el embaldosado del suelo frente a la puerta principal de la catedral de La Seo de Zaragoza

Para practicar

1. Las rectas r, s y t son paralelas, determina el valor de x en cada caso:

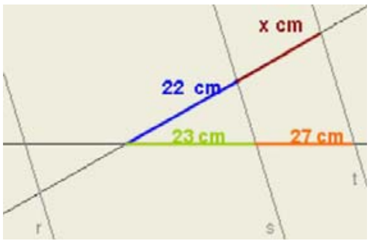
a)

b)

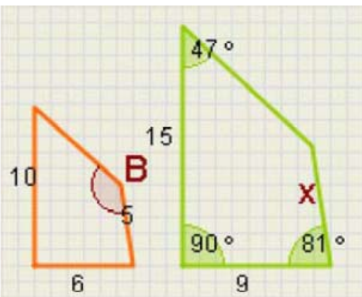


c)

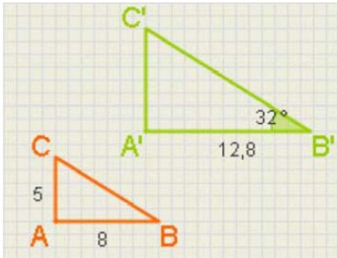
d)



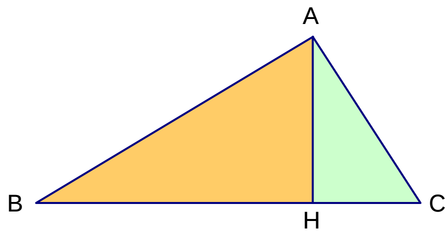
2. Los cuadriláteros de la figura son semejantes. Halla la longitud del lado x y el ángulo B.



3. Los triángulos de la figura son rectángulos y semejantes, calcula los elementos que faltan en cada uno.



4. Comprueba que en un triángulo rectángulo ABC, los triángulos que determina la altura sobre la hipotenusa y el mismo ABC son semejantes. Si los catetos miden 8 cm y 5 cm, calcula la altura.



5. Los lados de un triángulo miden:

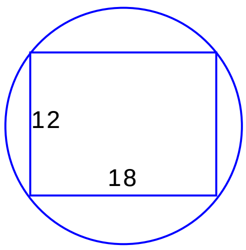
a) 157, 85 y 132

b) 75, 24 y 70

c) 117, 45 y 108

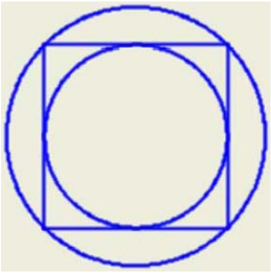
¿Es rectángulo?. En caso afirmativo, ¿cuánto mide la hipotenusa?

6. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia de la figura?.

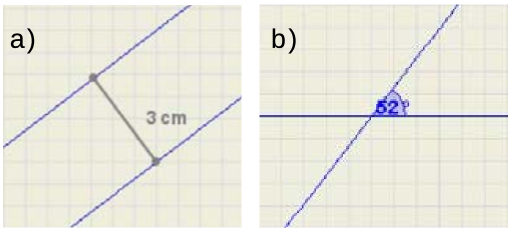


7. En un triángulo isósceles los lados iguales miden 12 cm y el lado desigual 8 cm, ¿cuánto mide la altura?

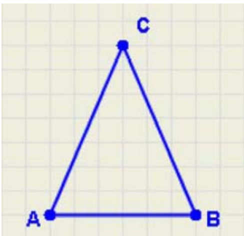
8. El radio de la circunferencia mayor mide 10 cm, ¿cuánto mide el radio de la menor?



9. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan las rectas de la figura:

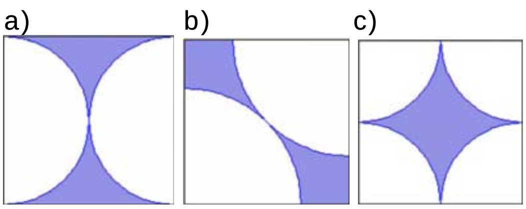


10. El triángulo de la figura es isósceles.Si se desplaza el vértice C de forma que el triángulo siga siendo isósceles, ¿qué lugar geométrico determina C?

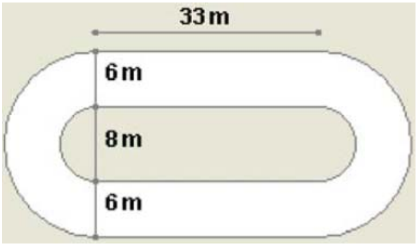


11. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos circunferencias concéntricas, de radios respectivos 8 y 12 cm.

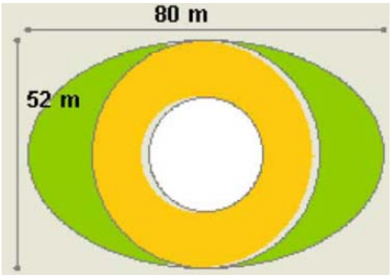
12. Se quiere construir un mural de 3 m de largo por 2,7 m de alto uniendo cuadrados de 30 cm de lado como el de la figura. ¿Qué superficie quedará de color azul?



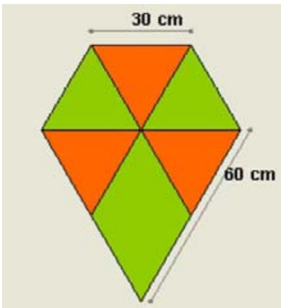
13. Un estadio tiene la forma y dimensiones del dibujo. ¿Qué superficie ocupan las pistas?



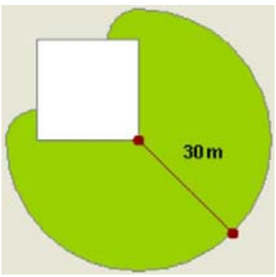
14. Una plaza tiene forma elíptica y las dimensiones de la figura. En el centro hay una fuente circular de 13 m de radio, rodeada de un paseo de tierra y en el resto hay césped. ¿Qué superficie ocupa el césped?, ¿y el paseo?.



15. Para construir una cometa se ha empleado tela de color verde y naranja como en la figura. ¿Qué cantidad de cada color?

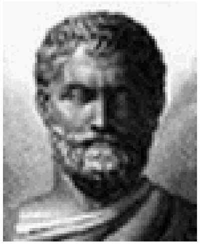


16. Una cabra está atada en la esquina de un corral cuadrado de 20 m de lado, con una cuerda de 30 m de largo, ¿cuál es la superficie sobre la que puede pastar?



Para saber más

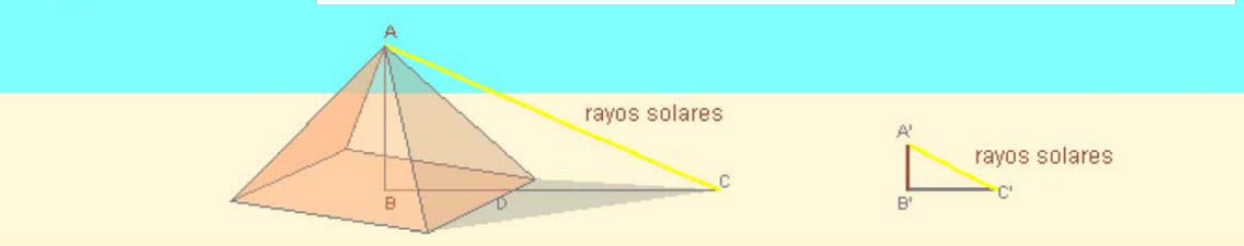
Tales y la gran pirámide



Tales de Mileto, que vivió entre los siglos VII y VI antes de nuestra era, está considerado como el primer matemático de la historia. En su juventud viajó a Egipto, donde aprendió algunas de las técnicas geométricas que los egipcios utilizaban, y se propuso calcular la altura de la gran pirámide de Gizeh. Algunos dicen que fue el propio faraón quien se lo pidió. Tales utilizó su famoso teorema, el que has estudiado en esta quincena, pero se encontró con algunas dificultades para la resolución del problema. Veamos cómo lo consiguió:

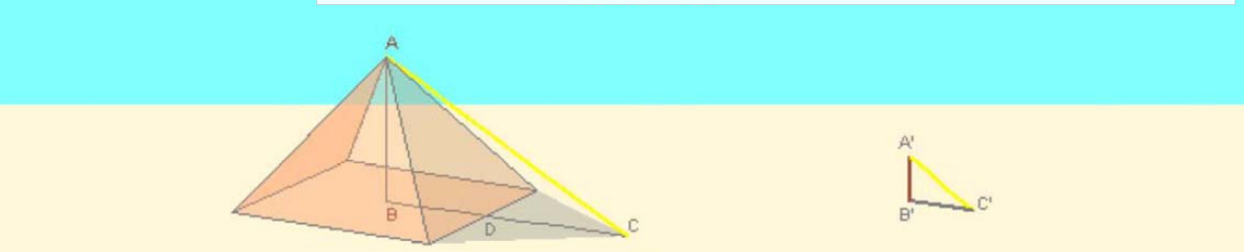
Tales clavó en la arena una estaca de longitud conocida y cuya sombra en cualquier momento del día podía medir fácilmente. El siguiente paso consistía en medir la sombra que la altura de la pirámide proyectaba.

De este modo se podía aplicar su teorema a los dos triángulos semejantes ABC y A´B´C´. Tales podía medir aproximadamente el segmento DC, puesto que es visible, pero no tenía forma de calcular BD, ya que este segmento queda dentro de la pirámide. Pero sabía que la orientación de la pirámide era norte-sur, con lo que esperó a mediodía, cuando el sol está al sur y entonces...



... el segmento BD es justo la mitad del cuadrado de la base de la pirámide, algo que podía calcular perfectamente, y el resto ya era fácil:

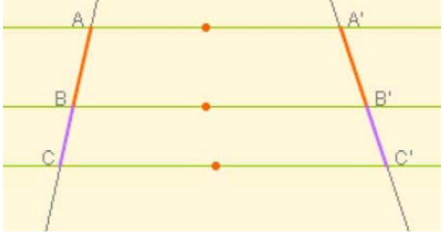
$$\frac{AB}{BD+DC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$ de donde no hay más que despejar AB.



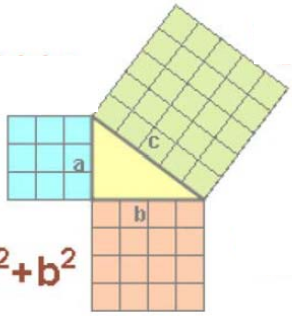
Recuerda lo más importante

Teorema de Tales

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$



Teorema de Pitágoras

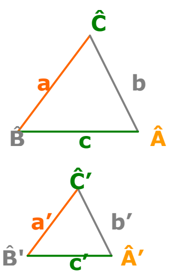


$$c^2 = a^2 + b^2$$

Semejanza

Dos figuras planas son **semejantes** si existe la misma proporción, llamada **razón de semejanza**, entre sus lados homólogos y además sus ángulos homólogos son iguales.

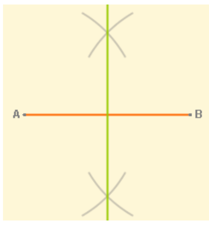
En el caso de los triángulos basta que se cumpla uno de los siguientes criterios:



1. Ángulos iguales (con dos basta)
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$
2. Un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
3. Lados proporcionales
   $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

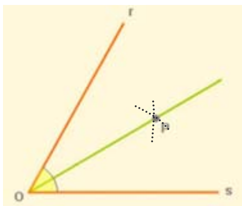
Lugares geométricos

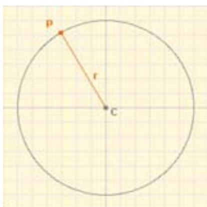
Un **lugar geométrico** en el plano es un **conjunto de puntos** que cumplen todos ellos una misma propiedad.



- La **mediatriz** de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** de A y de B.

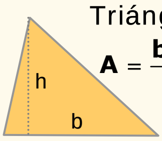
- La **bisectriz** de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de dicho ángulo.



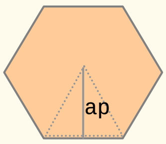


- La **circunferencia**, es el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de uno fijo, el centro.

Áreas de recintos planos, se descomponen en áreas de figuras conocidas.

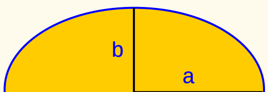


Triángulo
$A = \frac{b \cdot h}{2}$



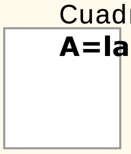
Polígono regular
$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{ap}}{2}$

Círculo
$A=\pi\cdot r^2$

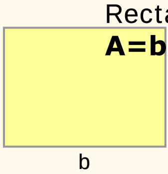


Recinto elíptico
$A=\pi\cdot a\cdot b$

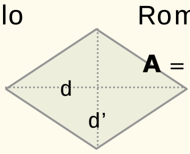
Cuadrado
$A=\text{lado}^2$



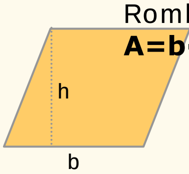
Rectángulo
$A=b\cdot a$



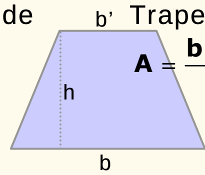
Rombo
$A = \frac{d \cdot d'}{2}$



Romboide
$A=b\cdot h$

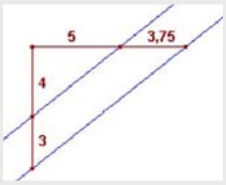


Trapecio
$A = \frac{b + b'}{2} \cdot h$



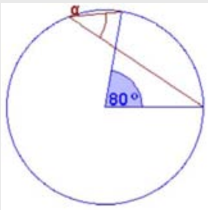
Autoevaluación

1)



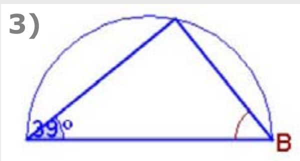
1. ¿Son paralelas las rectas de color azul de la figura?. Utiliza el Teorema de Tales para averiguarlo.

2)



2. ¿Cuánto mide el ángulo α?

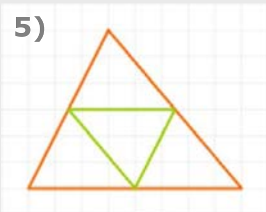
3)



3. ¿Cuánto mide el ángulo B del triángulo de la figura? .

4. Los lados de un rectángulo miden 6 y 3 cm; los de otro miden 9 y 4,5 cm. ¿Son semejantes?.

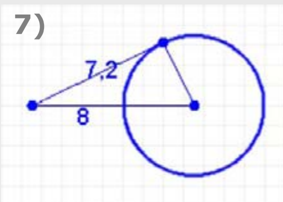
5)



5. Los lados del triángulo verde miden 8 cm, 6,7 cm y 7,8 cm; ¿cuánto mide el lado mayor del triángulo naranja?

6. Los lados iguales de un triángulo isósceles y rectángulo miden 14 cm, ¿cuánto mide el lado desigual?

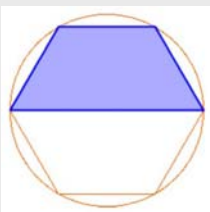
7)



7. Calcula el radio de la circunferencia de la figura.

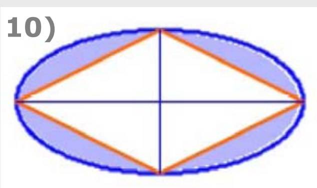
8. La suma de las distancias de un punto de una elipse a los focos es 10 cm, y el semieje menor mide 3 cm; ¿cuál es la distancia entre los focos?

9)



9. Calcula el área de la figura de color azul, inscrita en una circunferencia de radio 5 cm.

10)



10. Las diagonales del rombo de la figura miden 8 cm y 4 cm, calcula el área del recinto de color azul.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 7,5 b) 13,13
c) 15,05 d) 25,83

2. x=7,5 áng B=142º

3. Ángulos: A=90º, B=32º, C=58º
a=9,43 b'=8, a'=15,09

4. hipotenusa=9,43; altura h=4,24

5. a) si, hipotenusa=157
b) no
c) si, hipotenusa=117

6. La diagonal del rectángulo es el diámetro de la circunferencia, r=10,82

7. $h=\sqrt{128}=11,31$ cm

8. $r=\sqrt{50}=7,07$ cm

9. a) Otra recta paralela situada entre las dos , a una distancia de 1,5 cm de ambas.
b) Dos soluciones, las bisectrices de los dos ángulos que forman las rectas.

10. La mediatriz del lado AB

11. Otra circunferencia concéntrica de radio 10 cm.

12. Se necesitan 90 cuadrados
En cada caso el área azul es:
$90\cdot193,5=17415$ cm^2 = 1,7415 m^2

13. Dos rectángulos y una corona circular:
$2\cdot198 + 263,76 = 659,76$ m^2

14. Césped, recinto elíptico menos círculo: 1142,96 m^2
Paseo, corona circular: 1591,98 m^2

15. Se puede descomponer en triángulos equiláteros.
4 de tela verde: 3117,68 cm^2
3 de tela naranja: 2338,26 cm^2

16. Área: ¾ partes de un círculo de radio 30 m más ½ círculo de radio 10 m
2276,5 m^2

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. Si

2. 40º

3. 90º-39º = 51º

4. Sí

5. 16 cm

6. $14\cdot\sqrt{2}=19,8$ cm

7. 3,49 cm

8. 8 cm

9. 32,48 cm^2

10. 9,18 cm^2

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

7 Movimientos en el plano

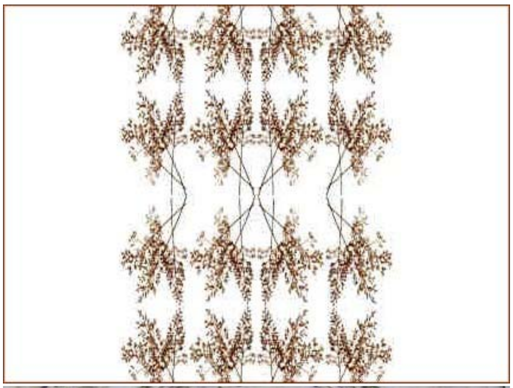
Objetivos

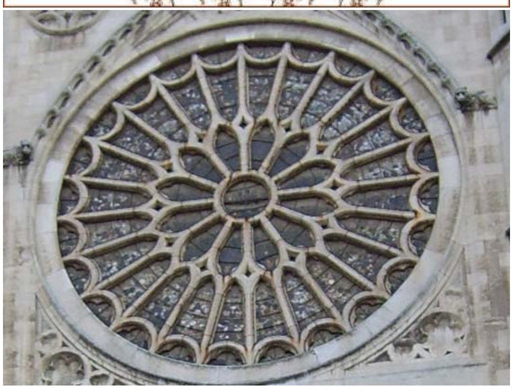
En esta quincena aprenderás a:

- Manejar el concepto de vector como elemento direccional del plano.
- Reconocer los movimientos principales en el plano: traslaciones, giros y simetrías.
- Aplicar uno o más movimientos a una figura geométrica.
- Reconocer movimientos geométricos en el arte, la naturaleza, etc..

Antes de empezar





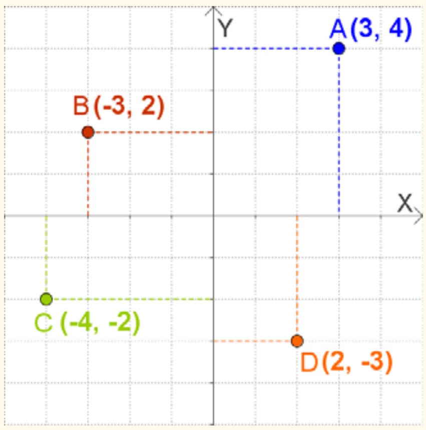



En la naturaleza, el arte, en muchos objetos cotidianos, encontrarás muestras de las formas geométricas que vas a estudiar aquí. Mira a tu alrededor y observa

Recuerda

En un sistema de ejes cartesianos cada punto se expresa mediante dos coordenadas (x,y).

La primera o abscisa indica la posición sobre el eje horizontal, positiva a la derecha del origen, negativa a la izquierda. La segunda u ordenada la posición sobre el eje vertical, positiva hacia arriba, negativa hacia abajo.



1. Vectores

Concepto de vector. Coordenadas

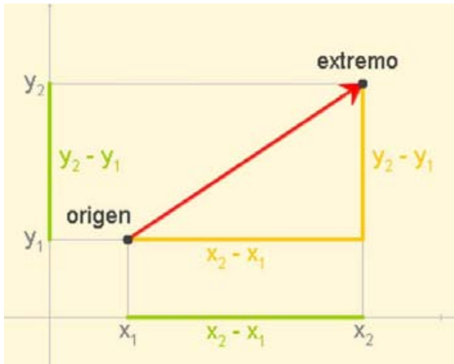
Un vector $\overrightarrow{AB}$ está determinado por dos puntos del plano, A(x_1,y_1) que es su **origen** y B(x_2,y_2) que es su **extremo**.

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ son las de B menos las de A:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 \,,\, y_2 - y_1).$$

Un vector tiene **módulo**, **dirección** y **sentido**:

- **Módulo**, es la distancia entre el origen y el extremo,
- **Dirección**, es la recta que pasa por origen y extremo o cualquier recta paralela a ella y
- **Sentido** es el que va desde el origen hacia el extremo y lo marca la flecha.

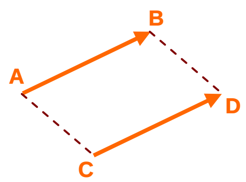


Para calcular el módulo basta utilizar el Teorema de Pitágoras:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vectores equipolentes

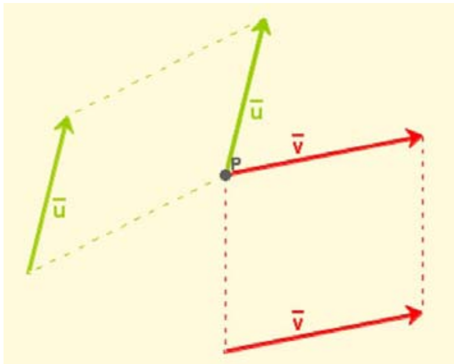
Dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ se llaman **equipolentes** si tienen el **mismo módulo**, la **misma dirección** y el **mismo sentido**.



Observa que parece que el vector $\overrightarrow{AB}$ se ha trasladado paralelamente a sí mismo hasta ocupar la posición del vector $\overrightarrow{CD}$.

ABCD es un paralelogramo.

- Dos vectores equipolentes son representantes del mismo vector libre.



La importancia de los vectores equipolentes reside en que se pueden trasladar a cualquier punto.

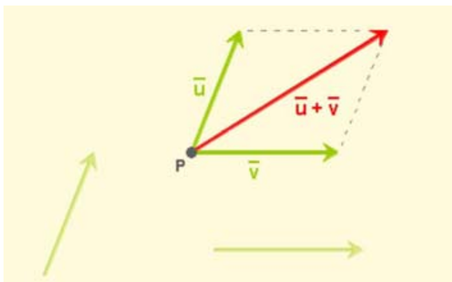
Suma de vectores

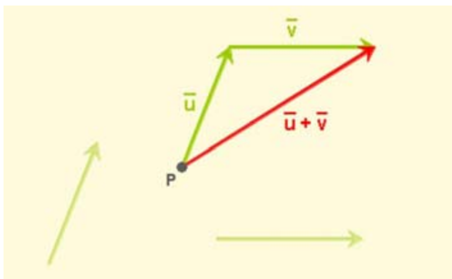
La suma de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es otro vector, $\vec{u}+\vec{v}$, que podemos construir de dos formas:

- Situando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con origen en el mismo punto. El vector $\vec{u}+\vec{v}$ queda entonces sobre la diagonal mayor del paralelogramo construido sobre los vectores sumandos.

- Haciendo coincidir el origen del vector $\vec{v}$ con el extremo de $\vec{u}$. El vector $\vec{u}+\vec{v}$ tiene como origen el origen de $\vec{u}$ y como extremo el de $\vec{v}$.

En coordenadas, la suma de $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es: $\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1,\ u_2+v_2)$

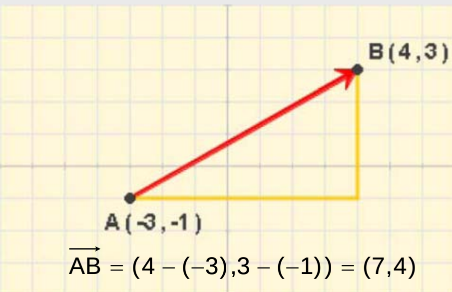




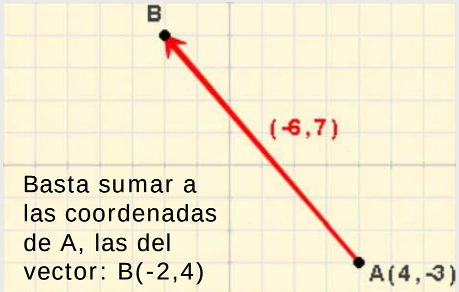
EJERCICIOS resueltos

1. Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son las de B menos las de A. Calcula:

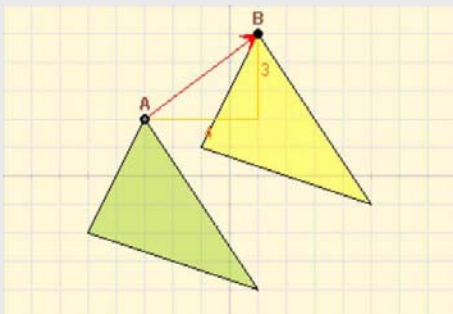
a) Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$



b) Las coordenadas del punto B.



2. Los triángulos amarillo y verde son iguales, ¿qué distancia hay entre los puntos homólogos, A(-3,2) y B(1,5)?

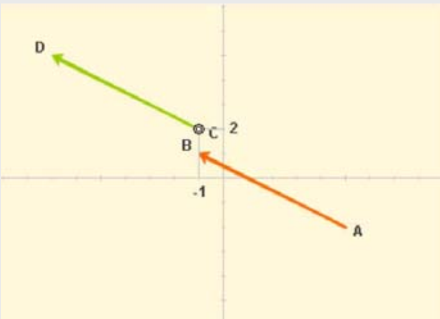


La distancia entre A y B es el módulo del vector $\overrightarrow{AB} = (4,3)$

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

3. Los vectores equipolentes tienen las mismas coordenadas, dados el punto A(5,-2) y el B(-1,1), ¿cuáles son las coordenadas del punto D?



El vector $\overrightarrow{AB} = (-1-5,1+2) = (-6,3)$

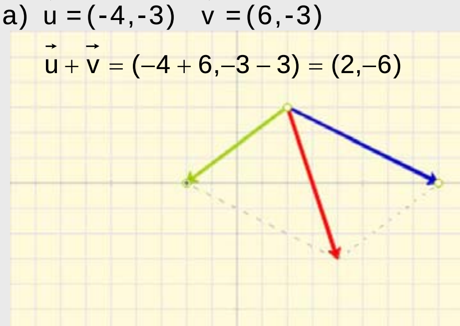
El vector $\overrightarrow{CD}$ tiene las mismas coordenadas.

Las del punto D son: (-1-6, 2+3)

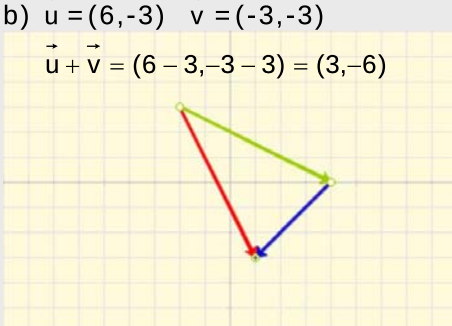
D(-7,5)

4. Suma en cada caso gráfica y analíticamente, los vectores verde $\vec{u}$, y azul $\vec{v}$.

a) $\vec{u} = (-4,-3)$ $\vec{v} = (6,-3)$



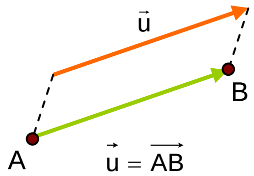
b) $\vec{u} = (6,-3)$ $\vec{v} = (-3,-3)$



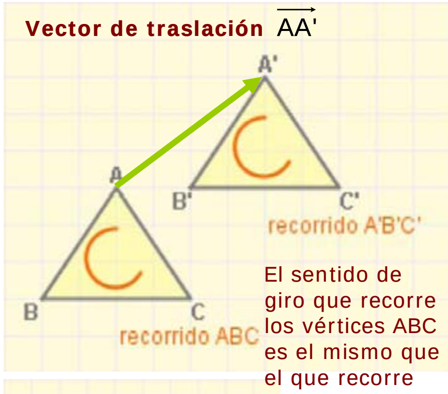
2. Traslaciones

Traslación según un vector

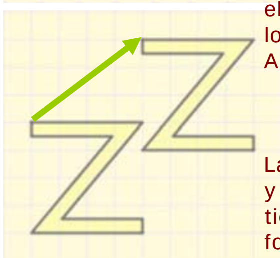
Una traslación de vector $\vec{u}$ es un movimiento que transforma cada punto **A** del plano, en otro punto **B** de manera que el vector $\overrightarrow{AB}$ es igual al vector $\vec{u}$



- Una traslación es un **movimiento directo**, es decir que conserva la orientación, e **isomorfo**, no cambia la forma de las figuras.



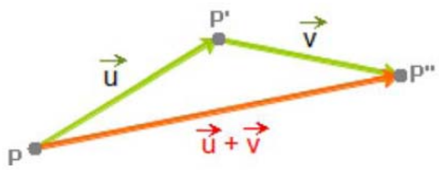
El sentido de giro que recorre los vértices ABC es el mismo que el que recorre los vértices A'B'C'.



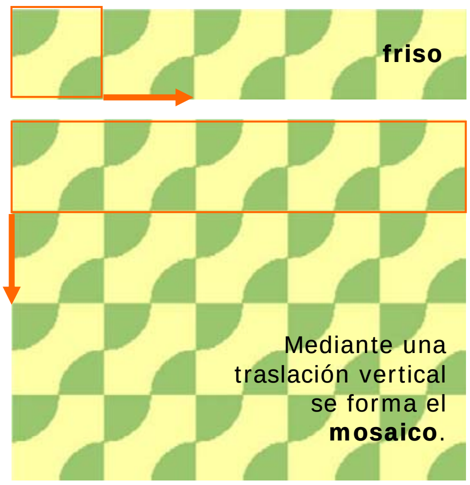
La figura original y la trasladada tienen la misma forma

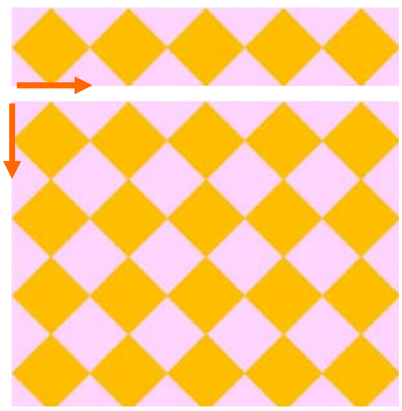
Composición de traslaciones

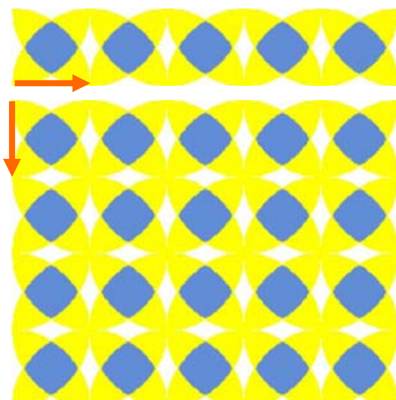
Dos traslaciones, de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se pueden componer para formar una traslación de vector $\vec{u}+\vec{v}$

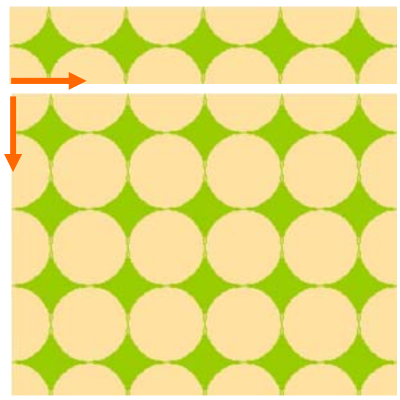


Mediante la composición de traslaciones es posible componer interesantes **frisos** o **cenefas**, que se pueden ampliar a **mosaicos**, como puedes apreciar en las imágenes.



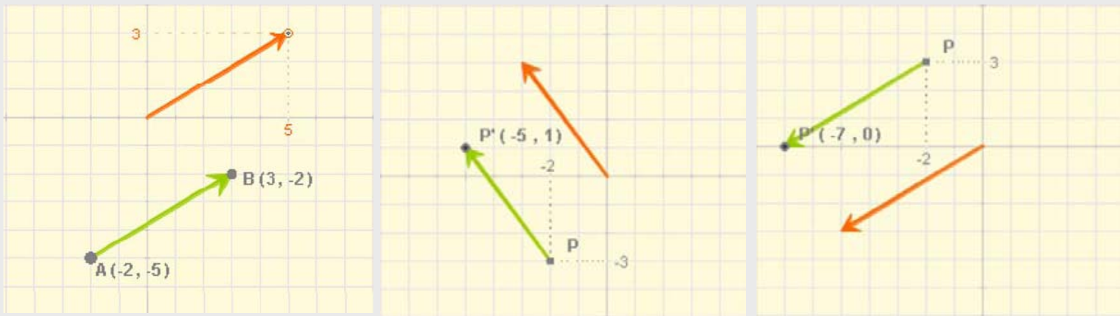






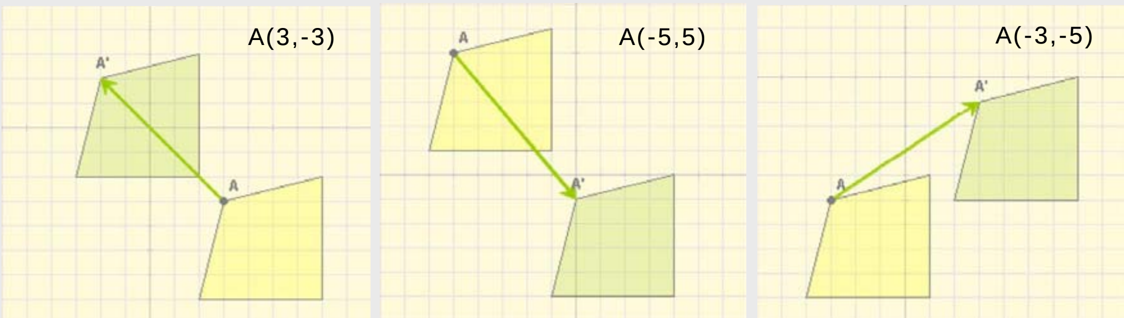
EJERCICIOS resueltos

1. Al trasladarse las coordenadas de un punto se ven incrementadas por las del vector de traslación. Compruébalo en los siguientes casos:



2. El cuadrilátero verde es el trasladado del amarillo en cada caso. Calcula las coordenadas del punto A.

a) $\vec{v} = (-5,5)$ A'(-2,2) b) $\vec{v} = (5,-6)$ A'(0,-1) c) $\vec{v} = (6,4)$ A'(3,-1)

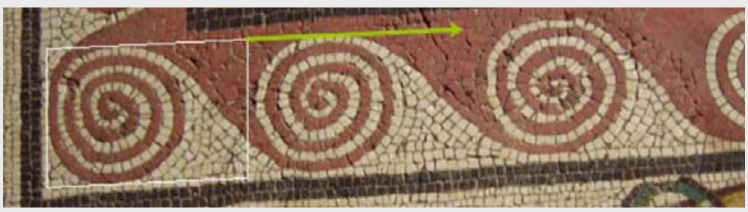


3. El arte muestra traslaciones como puedes apreciar en los ejemplos siguientes:

Motivo que puede apreciarse en muchas iglesias románicas, éste es de la iglesia de San Juan Bautista de Leon.

Figura presente en la ornamentación mudéjar, Catedral de la Seo de Zaragoza

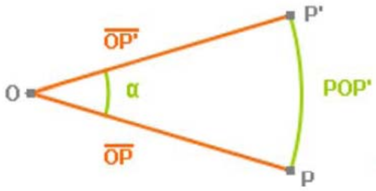
Mosaico romano



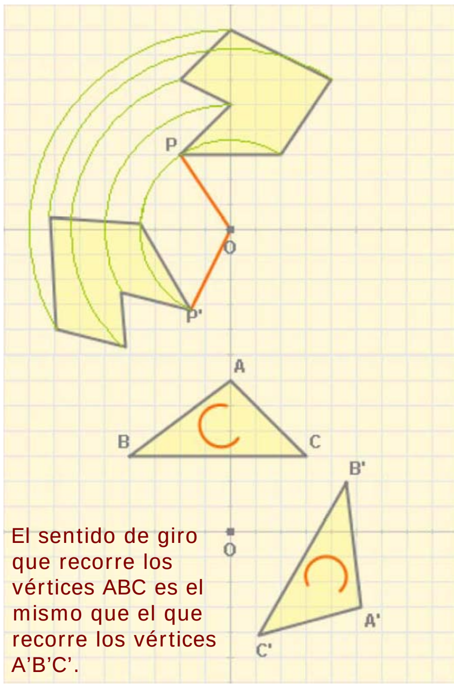
3. Giros

Giro de centro O y ángulo α

Un giro, de centro un punto **O** y amplitud un ángulo α, transforma cada punto **P** del plano en otro punto **P'** de modo que el ángulo **POP'** es igual a α y las distancias **OP** y **OP'** son iguales.

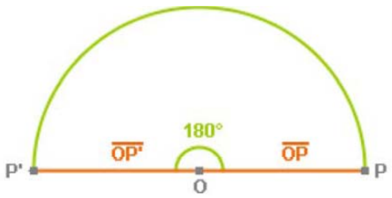


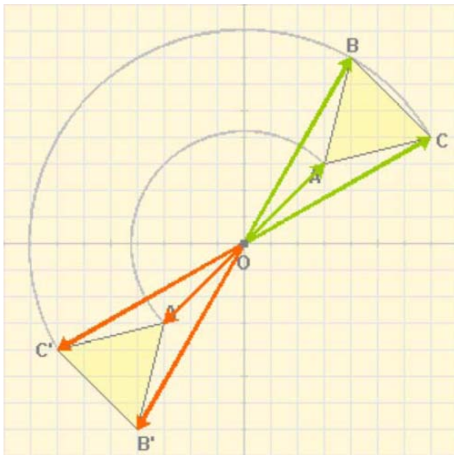
Debes tener en cuenta que un giro puede tener **orientación positiva** (contraria a las agujas del reloj) o **negativa**.



Simetría respecto a un punto

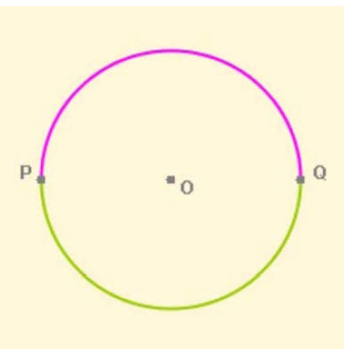
Una **simetría central**, o simetría respecto a un punto O, es un **giro** de centro O y amplitud 180º. Transforma pues, cada punto **P** en otro punto **P'** de modo que el ángulo **POP'** es igual a 180º y las distancias **OP** y **OP'** son iguales.

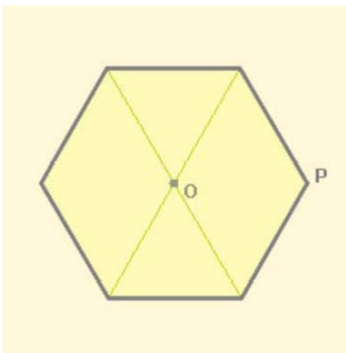


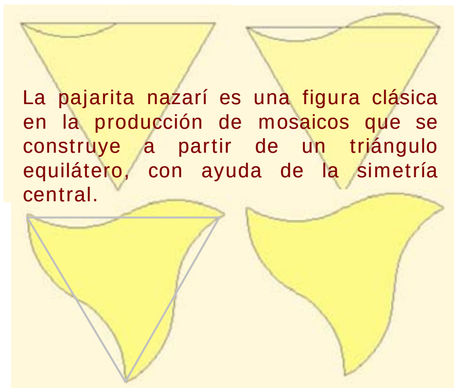


Si al aplicar a una figura una simetría de centro O la figura no varía, O se dice que es su **centro de simetría**.

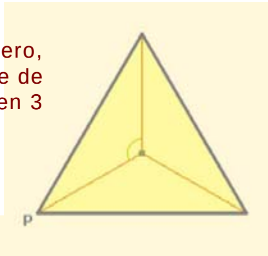
Ejemplos de figuras con centro de simetría:

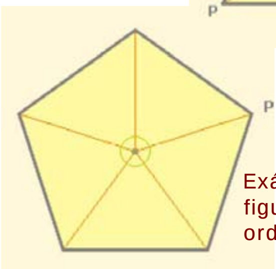






Triángulo equilátero, figura invariante de orden 3





Exágono regular, figura invariante de orden 6

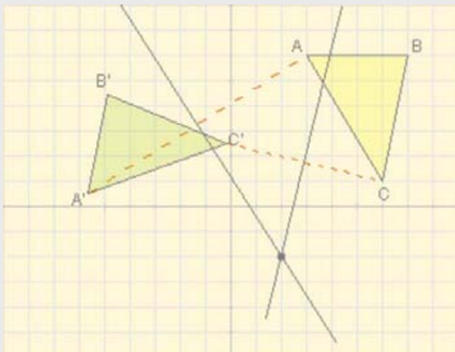
Figuras invariantes de orden n

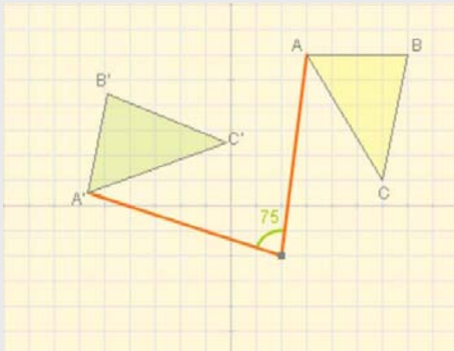
Si al girar una figura con centro en un punto O y según un ángulo menor que 360º, coincide con si misma, el punto **O** se dice que es **centro de giro** de la figura.

Si al aplicar a una figura un giro de 360º alrededor de su centro de giro se producen **n** coincidencias, dicho centro se dice de **orden n** y la figura **invariante de orden n**.

EJERCICIOS resueltos

5. ¿Cuál es el centro del giro que transforma el triángulo amarillo en el verde?



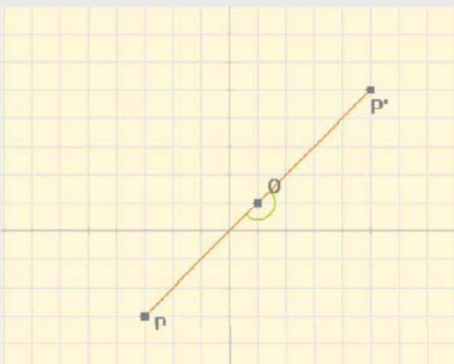


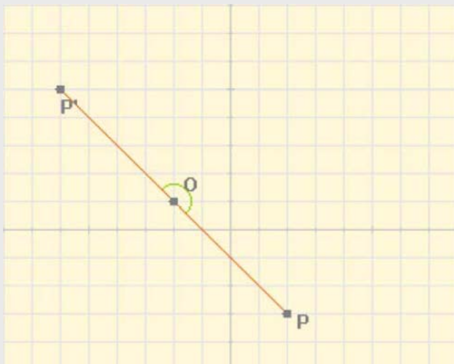
Se traza el segmento que une dos puntos homólogos, por ejemplo A y A', y dibujamos la mediatriz. Hacemos lo mismo con otros dos puntos, C y C' en la figura. El punto en el que se cortan las mediatrices es el centro de giro.
Con el transportador podemos medir el ángulo, en este ejemplo 75º.

6. ¿Cuáles son las coordenadas del punto P', simétrico del P en la simetría de centro el punto O?

a) O(1,1) P(-3,-3) → P'(5,5)

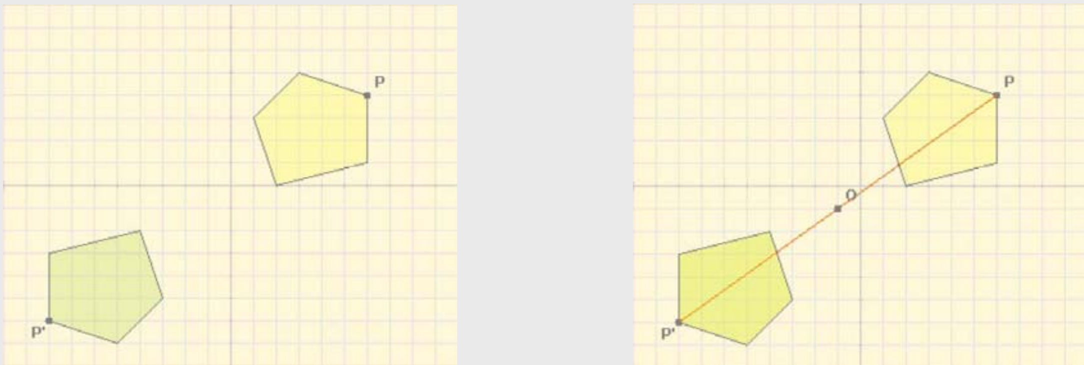
b) O(-2,1) P(2,-3) → P'(6,5)





EJERCICIOS resueltos

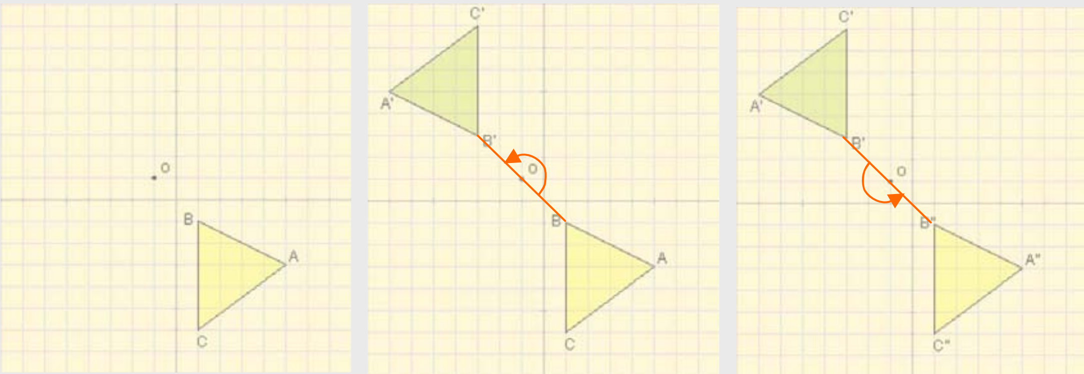
4. En la imagen se muestra un polígono (color amarillo) y su simétrico (color verde) respecto al punto O, ¿cuáles son las coordenadas de O?



El centro de simetría es el punto medio del segmento que une P(6,4) y P'(-8,-6), O(-1,-1), para calcularlas basta hacer la semisuma correspondiente (6-8)/2=-1, (4-6)/2=-1

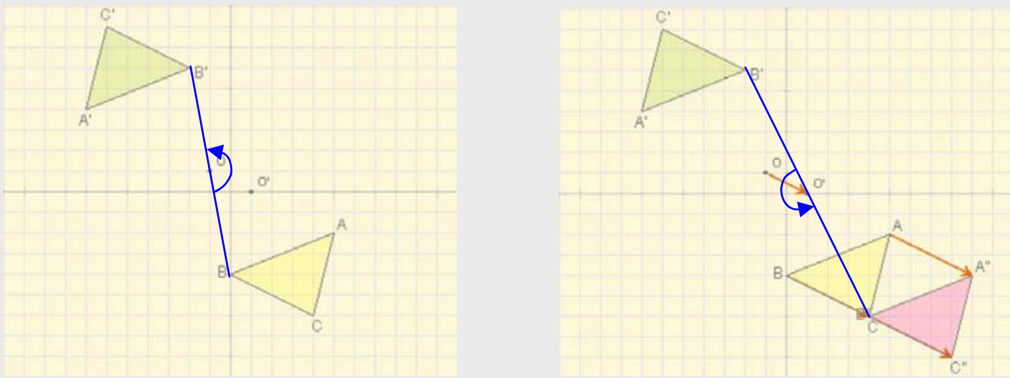
5. Al triángulo amarillo le aplicamos sucesivamente dos simetrías centrales respecto al mismo punto, O, ¿cuál es el resultado?

Al aplicarle la simetría de centro O resulta el triángulo verde, cuando a éste se le aplica de nuevo una simetría del mismo centro vuelve a la posición inicial.



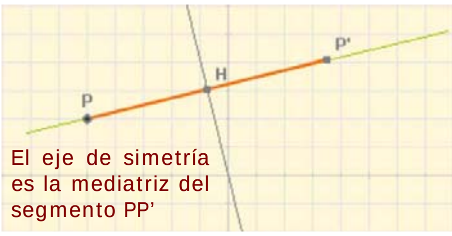
6. Se aplica al triángulo amarillo una simetría de centro O, y después otra de centro O', ¿cuál es el resultado?

Al aplicarle la simetría de centro O resulta el triángulo de color verde, a éste se aplica la simetría de centro O' resultando el de color rosa, lo mismo que si el triángulo inicial (amarillo) se traslada por el vector $2\cdot\overline{OO'}$

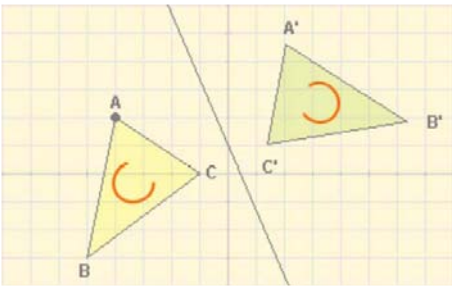


4. Simetrías

Simetría de eje e



El eje de simetría es la mediatriz del segmento PP'



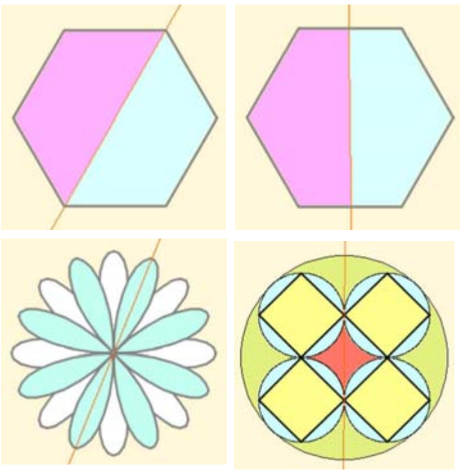
Una simetría respecto a un eje ***e*** es un movimiento que transforma cada punto **P** del plano en otro **P'** de modo que la recta ***e*** es mediatriz del segmento de extremos **P** y **P'**.

Según esta definición, debe cumplirse que:

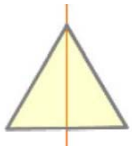
- La recta ***e*** debe ser perpendicular al segmento **PP'**
- La distancia de **P** a la recta ***e*** será igual que la distancia de **P'** a dicha recta

Una simetría axial es un **movimiento inverso**. Observa en la figura cómo se modifica el sentido de giro de los vértices del triángulo.

Figuras con eje de simetría

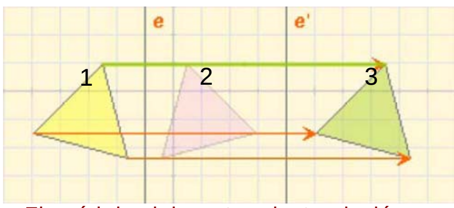

¿Cuántos ejes de simetría tienen?

Hay figuras que son **invariantes** (no se modifican) al aplicarles una simetría axial. En ese caso, el eje de la misma se llama **eje de simetría** de la figura.



Una figura puede tener varios ejes de simetría. Observa el hexágono de la izquierda y dos de sus seis ejes de simetría.

Composición de simetrías axiales



El módulo del vector de traslación es el doble de la distancia entre los ejes.

El ángulo de giro es el doble del ángulo que forman los ejes.

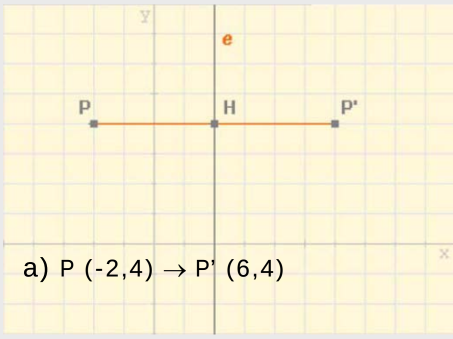
La aplicación consecutiva de dos simetrías axiales, de ejes ***e*** y ***e'***, da lugar a un nuevo movimiento que depende de la situación relativa de los ejes ***e*** y ***e'***:

- Si los ejes ***e*** y ***e'*** son paralelos, el resultado es una traslación.
- Si los ejes ***e*** y ***e'*** se cortan en un punto, la composición da lugar a un giro alrededor de dicho punto.

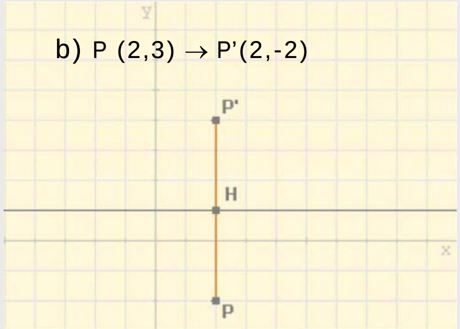
Como tanto una traslación como un giro son movimientos directos, el resultado de **componer dos simetrías axiales** es un **movimiento directo**.

EJERCICIOS resueltos

7. Calcula las coordenadas del punto P', simétrico del P respecto al eje de la figura.



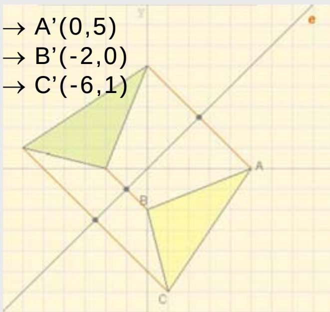
a) P (-2,4) → P' (6,4)



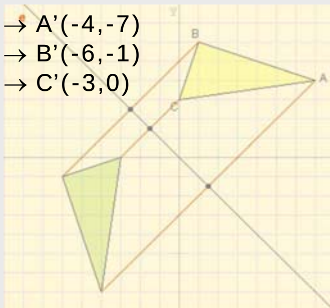
b) P (2,3) → P'(2,-2)

8. En cada caso dibuja el triángulo simétrico respecto del eje e, del de color amarillo e indica las coordenadas de los vértices del transformado.

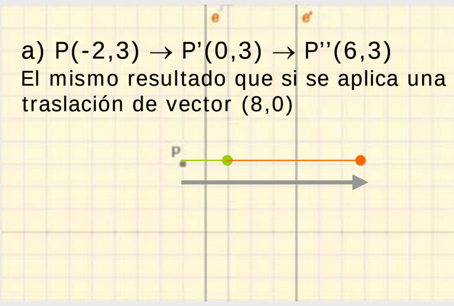
a) A(5,0) → A'(0,5)
B(0,-2) → B'(-2,0)
C(1,-6) → C'(-6,1)



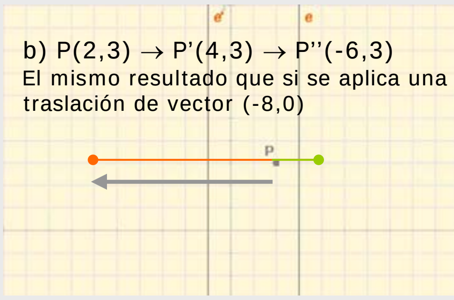
b) A(7,4) → A'(-4,-7)
B(1,6) → B'(-6,-1)
C(0,3) → C'(-3,0)



9. Calcula las coordenadas del punto que resulta al aplicarle a P primero una simetría de eje *e* y luego otra de eje *e'*.

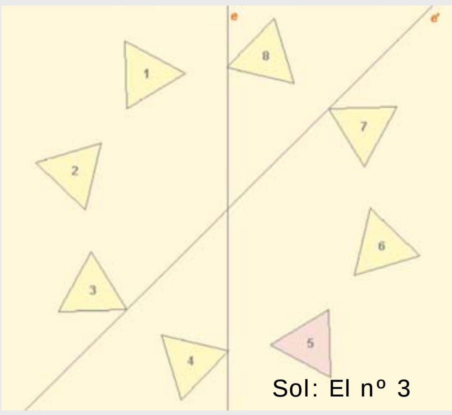


a) P(-2,3) → P'(0,3) → P''(6,3)
El mismo resultado que si se aplica una traslación de vector (8,0)

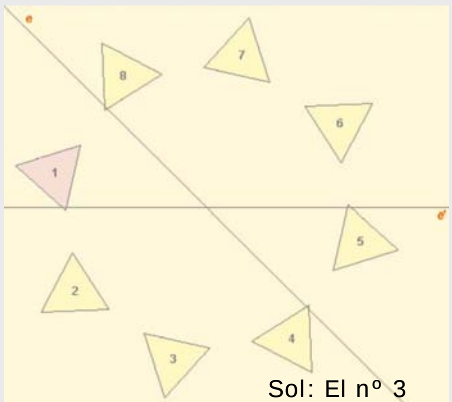


b) P(2,3) → P'(4,3) → P''(-6,3)
El mismo resultado que si se aplica una traslación de vector (-8,0)

10. ¿Cuál es el transformado del triángulo de color morado respecto a la composición de simetrías de ejes *e* y *e'*?



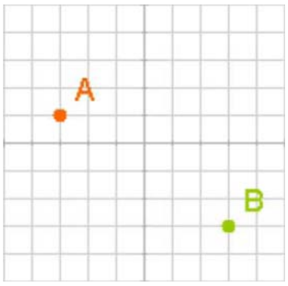
Sol: El nº 3



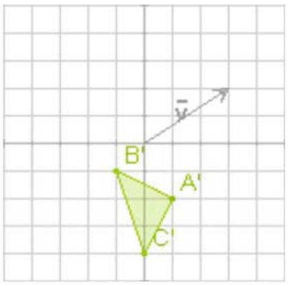
Sol: El nº 3

Para practicar

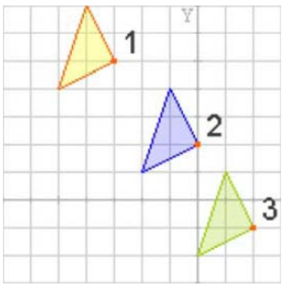
1. Determina las coordenadas y el módulo del vector de la traslación que transforma el punto A en el punto B



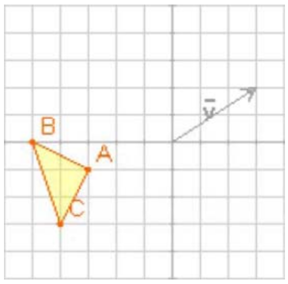
2. Halla el triángulo que ha dado lugar al de la figura, al aplicarle una traslación de vector (3,2).



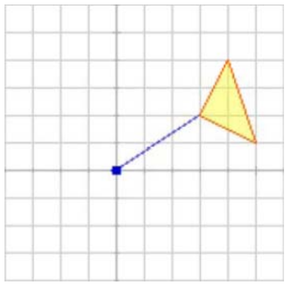
3. El triángulo de la figura se ha trasladado primero de la posición 1 a la 2, mediante una traslación de vector (3,-3), y luego a la 3 por una traslación de vector (2,-3). ¿Cuál es el vector de la traslación que pasa directamente de 1 a 3?.



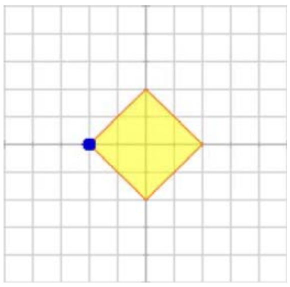
4. Calcula los vértices del triángulo que resulta al aplicar al de la figura una traslación de vector $\vec{v} = (3,2)$.



5. El triángulo ABC de la figura gira 90º en torno al origen de coordenadas, en qué triángulo se transforma?.



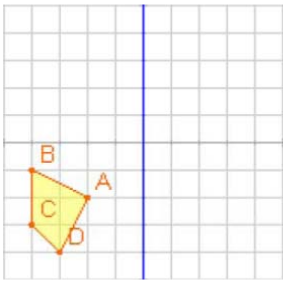
6. El cuadrado de la figura gira 45º en sentido contrario a las agujas del reloj, en torno al vértice señalado, ¿cuáles son los vértices del cuadrado transformado?.



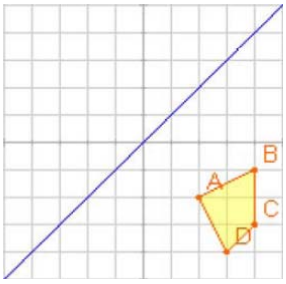
7. Halla la figura transformada del cuadrilátero ABCD por una simetría:

a) de eje el de ordenadas

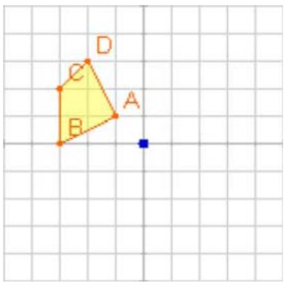
b) el de abscisas.



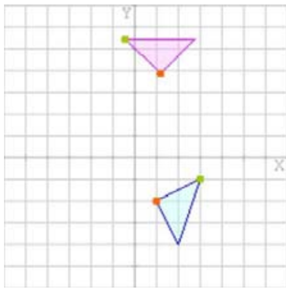
8. Halla la figura transformada del cuadrilátero ABCD por una simetría de eje el de la figura.



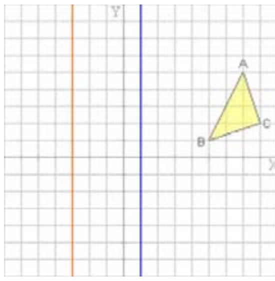
9. Halla la figura transformada del cuadrilátero ABCD por una simetría central, de centro el origen de coordenadas.



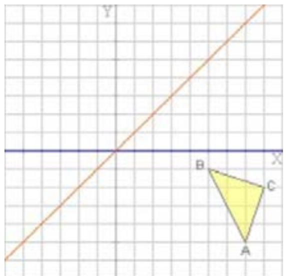
10. El triángulo azul se transforma en el morado tras un giro de centro O, dibújalo y calcula el centro de giro.



11. Halla la figura transformada del triángulo ABC por una composición de simetrías, primero la de eje azul y luego la de eje rojo.



12. Halla la figura transformada del triángulo ABC por una composición de simetrías, primero la de eje azul y luego la de eje rojo.

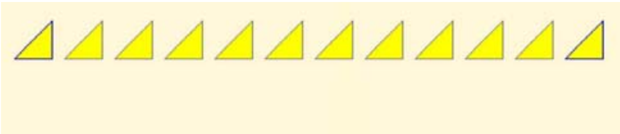


Para saber más

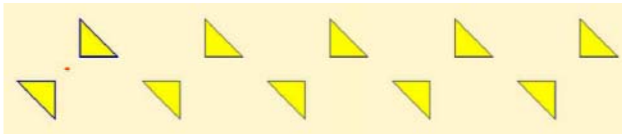
Los siete tipos distintos de frisos

Aunque pueden construirse infinitos tipos de frisos mediante traslaciones, en realidad todos ellos pueden clasificarse en sólo **siete tipos distintos** según qué movimientos existan en el motivo que se traslada infinitamente.

✓ **Tipo 1** El motivo que se traslada no presenta ningún movimiento.

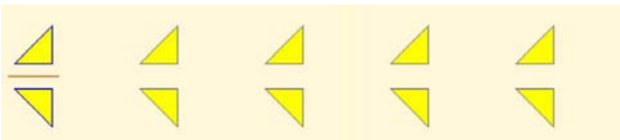



✓ **Tipo 2** El motivo que se traslada presenta una simetría central.

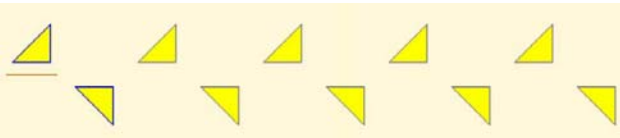



✓ **Tipo 3** El motivo que se traslada presenta una simetría axial.

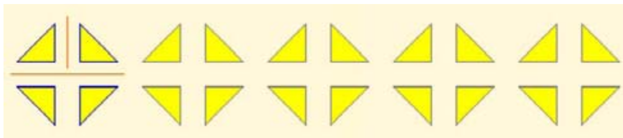

✓ **Tipo 4** El motivo que se traslada presenta una simetría axial horizontal.




✓ **Tipo 5** El motivo que se traslada presenta una simetría axial y una traslación.




✓ **Tipo 6** El motivo que se traslada presenta una simetría axial vertical y otra horizontal.

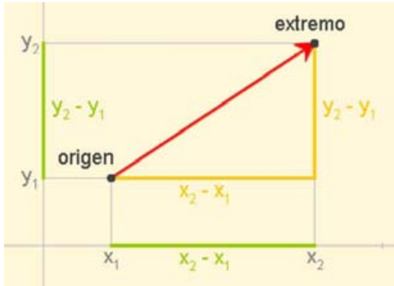



✓ **Tipo 7** El motivo que se traslada presenta una traslación seguida de una simetría horizontal quedando como resultado una simetría axial vertical.

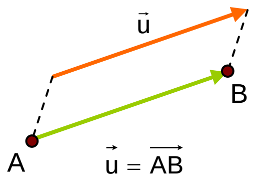

Fotografías de rejas de balcones en la C/Manifestación de Zaragoza, donde se pueden encontrar ejemplos de estos siete tipos.

Recuerda lo más importante

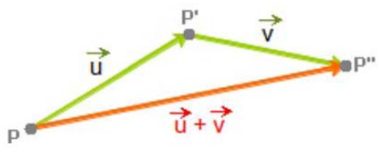
Un vector tiene **MÓDULO** que es la distancia entre el origen y el extremo, **DIRECCIÓN** que es la recta que pasa por origen y el extremo o cualquier recta paralela a ella, y **SENTIDO** que es el que va desde el origen hacia el extremo y lo marca la flecha.



Traslaciones



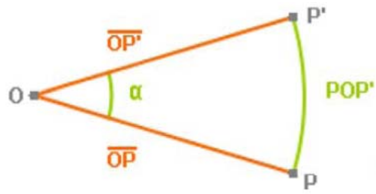
✓ Una traslación de vector $\vec{u}$ es un movimiento que transforma cada punto **A** del plano, en otro punto **B** de manera que el vector $\overrightarrow{AB}$ es igual al vector $\vec{u}$



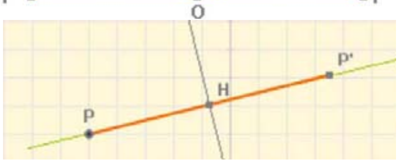
Giros

✓ Un **giro**, de centro un punto **O** y amplitud un ángulo α, transforma cada punto **P** del plano en otro punto **P’** de modo que el ángulo **POP'** es igual a α y las distancias **OP** y **OP'** son iguales.

✓ Si al girar una figura con centro en un punto O y según un ángulo menor que 360º, coincide con si misma, el punto **O** se dice que es **centro de giro** de la figura.



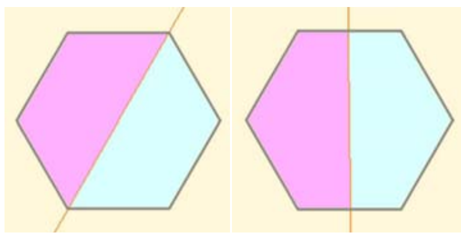
Simetrías



✓ Una **simetría central**, o simetría respecto a un punto O, es un **giro** de centro O y amplitud 180º. Transforma pues, cada punto **P** en otro punto **P'** de modo que el ángulo **POP'** es igual a 180º y las distancias **OP** y **OP'** son iguales.

✓ Una **simetría axial** respecto a un eje ***e*** es un movimiento que transforma cada punto **P** del plano en otro **P'** de modo que la recta ***e*** es mediatriz del segmento de extremos **P** y **P'**.

Figuras con eje de simetría

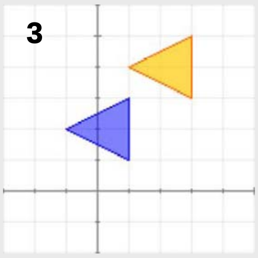


Autoevaluación

1. Dados los puntos A(-2,2) y B(3,-4), escribe las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$

2. Qué punto se obtiene al trasladar el punto P(-1,4) mediante el vector $\vec{v}=(4,-1)$

3



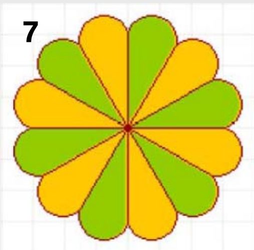
3. Halla las coordenadas del vector de la traslación que transforma el triángulo azul en el naranja.

4. El punto B(4,2) es el resultado de trasladar el punto A(-4,6) mediante una traslación de vector $\vec{v}$. ¿Qué distancia hay entre A y B?.

5. ¿Qué punto resulta al girar P(4,1) alrededor del origen de coordenadas, un ángulo de 90º en sentido contrario a las agujas del reloj?

6. ¿Cuál es el centro de la simetría que transforma el punto P(4,-2) en el P'(-2,0)?.

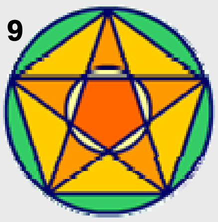
7



7. La figura de la izquierda tiene centro de simetría, ¿Cuál es el menor ángulo que ha de girar para quedar invariante?

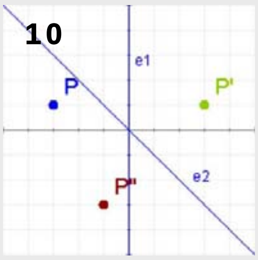
8. ¿Cuáles son las coordenadas del punto simétrico del P(4,-2) en la simetría de eje la bisectriz del primer cuadrante?

9



9. ¿Cuántos ejes de simetría tiene la figura de la izquierda?

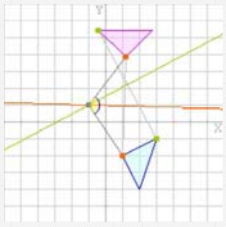
10



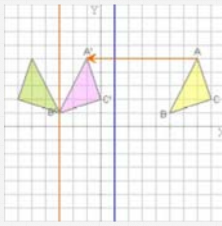
10. Al aplicar al punto P primero una simetría de eje e1 y luego una simetría de eje e2, resulta el punto P''. ¿Cuál es el ángulo del giro que transforma directamente P en P''

Soluciones de los ejercicios para practicar

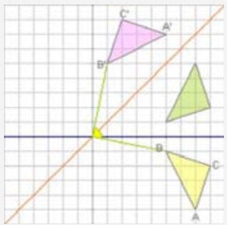
1. (6,-4), módulo= $\sqrt{52}$ = 7,4
2. A(-2,-4) B(-4,-3) C(-3,-6)
3. $\vec{v}$ =(5,-6)
4. A'(0,1) B'(-2,2) C'(-1,-1)
5. A'(-2,3) B'(-4,4) C'(-1,5)
6. Por el T. de Pitágoras el lado del cuadrado mide $\sqrt{8}$ =2,82
   Vértices: (0,82, 2,82) (-2, 2,82) (-2, 0) (0,82, 0)
7. a) A'(2,-2) B'(4,-1) C'(4,-3) D'(3,-4)
   b) A'(-2,2) B'(-4,1) C'(-4,3) D'(-3,4)
8. A'(-2,2) B'(-1,4) C'(-3,4) D'(-4,3)
9. A'(1,-1) B'(3,0) C'(3,-2) D'(2,-3)
10. Centro (-1,0)



11. A'(-1,5)
    B'(-3,1)
    C'(0,2)



12. Equivale a un giro de 90º en sentido positivo.



Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. (5,-6)
2. P'(3,3)
3. (2,2)
4. |$\vec{v}$|=10
5. (-1,4)
6. (1,-1)
7. 60º
8. (-2,4)
9. 5
10. 90º

No olvides enviar las actividades al tutor

8

Cuerpos geométricos

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Distinguir las clases de cuerpos geométricos.
- Construirlos a partir de su desarrollo plano.
- Calcular sus áreas y volúmenes.
- Localizar un punto sobre la Tierra.
- Calcular la hora en cada país.
- Cómo se hacen los distintos tipos de mapas y las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos.

Antes de empezar

Recuerda

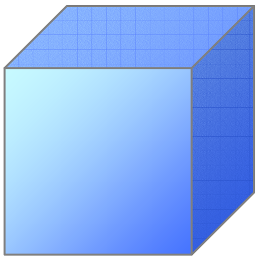
Un **poliedro** es un cuerpo cerrado limitado por polígonos.

Cada uno de ellos recibe el nombre de **cara.** Los lados de las caras son las **aristas** del poliedro y los extremos de las aristas son los **vértices** del poliedro.

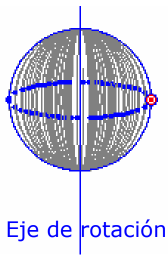
En todo poliedro simple (sin huecos) se cumple **la relación de** Euler:

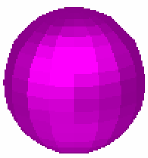
El número de caras de un poliedro (C) es igual al número de aristas (A) menos el de vértices (V) más 2.

$$C = A - V + 2$$



C=6 V=8 A=12
A-V+2=12–8+2=6=C





Un **cuerpo de revolución** es cualquier figura geométrica construida al hacer girar una figura plana alrededor de un eje contenido en el mismo plano.

1. Poliedros regulares

Definiciones

Diremos que un **poliedro** es **regular** cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- Sus caras son polígonos regulares iguales.
- En cada vértice concurren el mismo número de caras.

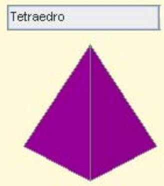
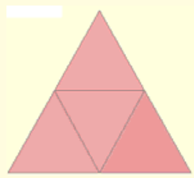
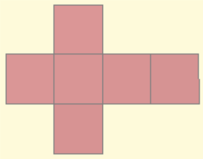
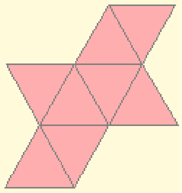
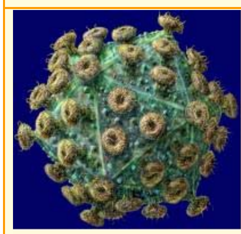
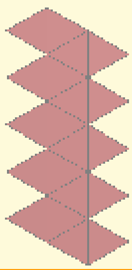
Sólo hay cinco poliedros regulares (llamados también **Sólidos Platónicos**):

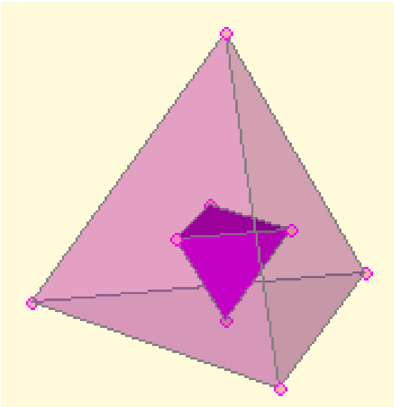
- **Tetraedro**: 4 caras (triángulos equiláteros)
- **Hexaedro o cubo**: 6 caras (cuadrados)
- **Octaedro**: 8 caras (triángulos equiláteros)
- **Dodecaedro**: 12 caras (pentágonos regulares)
- **Icosaedro**: 20 caras (triángulos equiláteros)

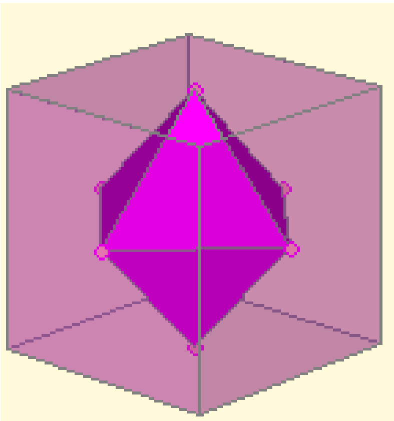
Desarrollos

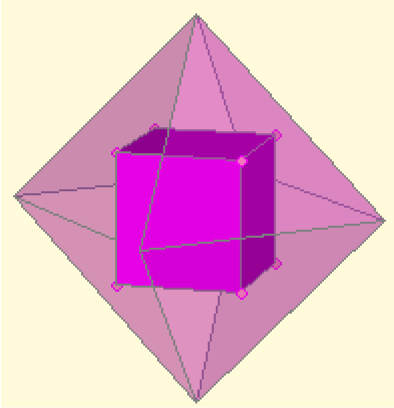
Se dice que un cuerpo geométrico es **desarrollable** cuando puede ser construido a partir de una figura plana formada por todas las caras del cuerpo.

Todos los poliedros regulares son desarrollables y en este apartado te mostramos las figuras que permiten su construcción.

Característica...s		Desarrollo
 Empaquetamiento de bolas en forma de tetraedro.	 Caras: 4 triángulos equiláteros Aristas: 6 Vértices: 4	
 Cristales cúbicos de pirita (Sulfuro de hierro FeS_2)	 Caras: 6 cuadrados Aristas: 12 Vértices: 8	
 Cristales octaédricos de fluorita (Fluoruro de Calcio CaF_2)	 Caras: 8 triángulos equiláteros Aristas: 12 Vértices: 6	
 Instituto de la Construcción Eduardo Torroja (Madrid)	 Caras: 12 pentágonos regulares Aristas: 30 Vértices: 20	
 Estructura icosaédrica de un virus	 Caras: 20 triángulos equiláteros Aristas: 30 Vértices: 12	







Poliedros duales

Se dice que dos poliedros son **duales** si el número de vértices del primero coincide con el número de caras del segundo y viceversa. Además ambos deben tener el mismo número de aristas.

Si dos poliedros son duales puede construirse uno a partir del otro uniendo con segmentos los centros de cada dos caras contiguas del primero.

En las imágenes se muestra que el cubo y el octaedro son duales, el dodecaedro y el icosaedro también y que el tetraedro es dual consigo mismo.

Tetraedro: nº de vértices = 4 = nº de caras.

Nº de caras del cubo = 6 = nº de vértices del octaedro

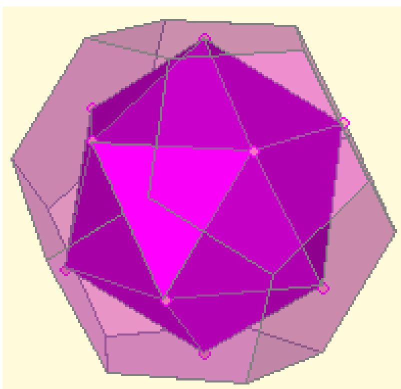
Nº de caras del octaedro = 8 = nº de vértices del cubo

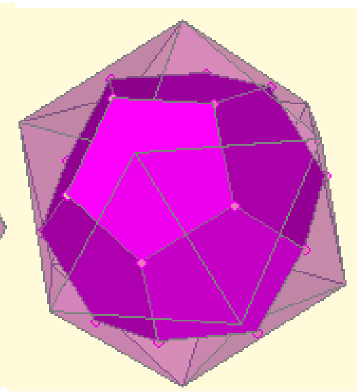
Nº de aristas del cubo = 12 = nº de aristas del octaedro.

Nº de caras del dodecaedro = 12 = nº de vértices del icosaedro

Nº de caras del icosaedro = 20 = nº de vértices del dodecaedro

Nº de aristas del dodecaedro = 30 = nº de aristas del icosaedro.



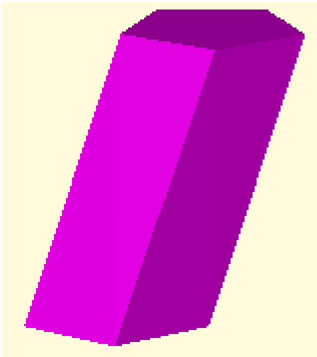


2. Otros poliedros

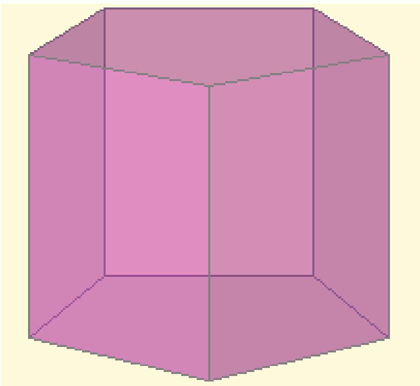
Prismas

Un **prisma** es un poliedro con dos caras paralelas formadas por polígonos iguales cuyos lados se unen mediante paralelogramos. Las caras paralelas son las ***bases*** y los paralelogramos son los ***lados***.

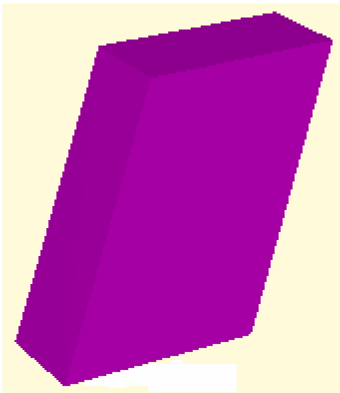
- Si los lados son rectángulos es un **prisma recto**, en caso contrario es un **prisma oblicuo**.
- Si las bases son paralelogramos es un **paralelepípedo** y si las bases y los lados son rectángulos es un **ortoedro**.
- Si las bases de un prisma recto son polígonos regulares decimos que es un **prisma regular**.



Prisma oblicuo

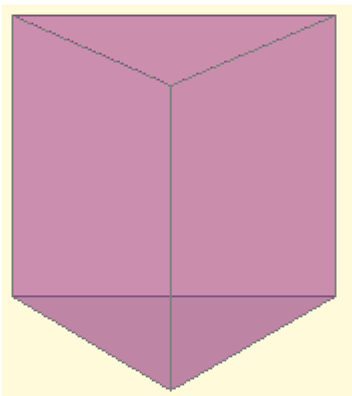


Prisma regular pentagonal

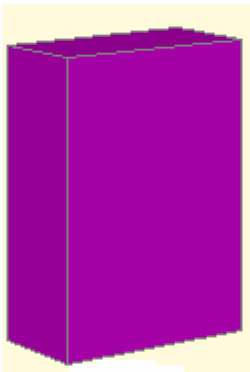


Prisma oblicuo

Paralelepípedo



Prisma regular triangular



Prisma recto

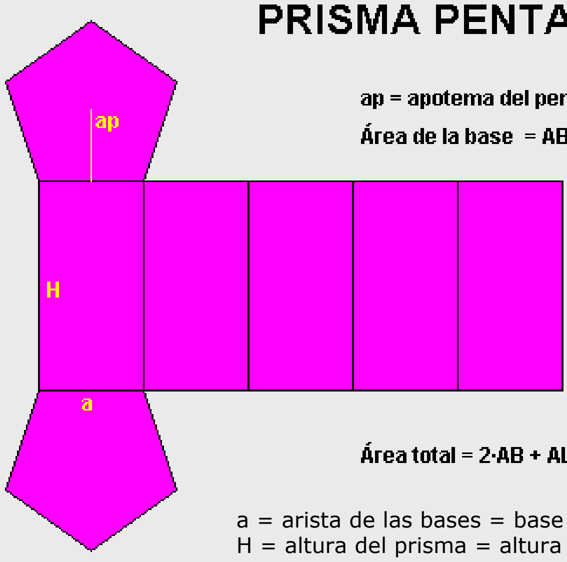
Ortoedro

Desarrollos, áreas y volúmenes de prismas regulares

Los prismas son cuerpos desarrollables. En particular, los prismas regulares tienen un desarrollo muy sencillo, formado por tantos rectángulos iguales como lados tenga y dos polígonos regulares que forman las bases. Esto facilita el cálculo de sus áreas y volúmenes.

1. Desarrollo y área de un prisma regular pentagonal:

PRISMA PENTAGONAL



ap = apotema del pentágono   p = perímetro = $5 \cdot a$

Área de la base $= AB = \dfrac{p \cdot ap}{2} = \dfrac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$

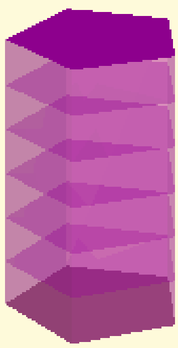
Área de un lado $= a \cdot H$

Área lateral $= AL = 5 \cdot a \cdot H$

Área total $= 2 \cdot AB + AL = 5 \cdot a \cdot ap + 5 \cdot a \cdot H = 5 \cdot a \cdot (ap + H)$

a = arista de las bases = base de los rectángulos laterales
H = altura del prisma = altura de los rectángulos laterales

2. Volumen de un prisma pentagonal regular:



Observa el prisma de la izquierda.

Podemos considerar que está formado por una serie apilada de prismas del mismo tipo cuya altura es la unidad.

El volumen de cada uno de estos pequeños prismas es igual al área de la base, A, luego el volumen del prisma grande será:

$$V = A \cdot H$$

siendo H la altura del prisma.

PRISMA PENTAGONAL

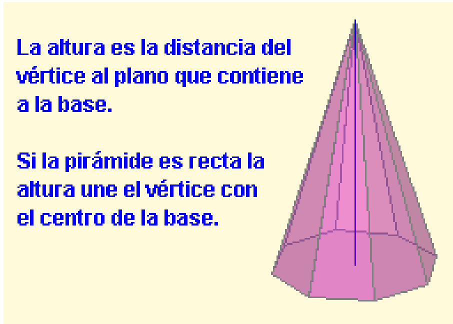
$$V = \frac{p \cdot ap}{2} \cdot H = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} \cdot H$$

Pirámides

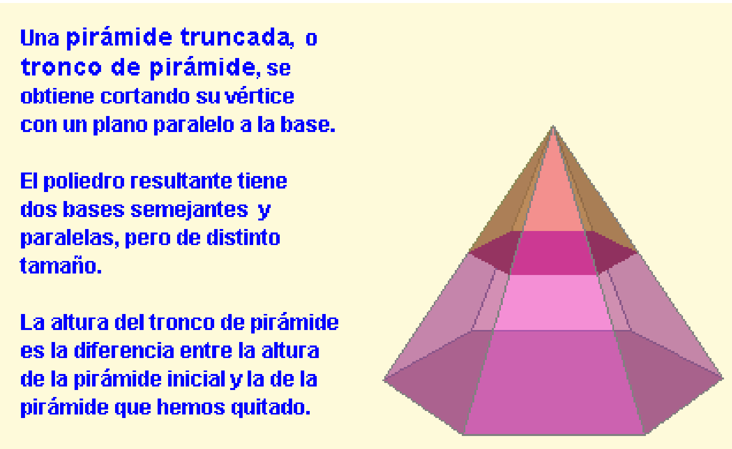
Una **pirámide** es un poliedro con una cara formada por un polígono cualquiera sobre cuyos lados se levantan triángulos que se unen en un punto común. El polígono es la ***base*** de la pirámide, los triángulos son los ***lados*** y el punto común es el ***vértice***.

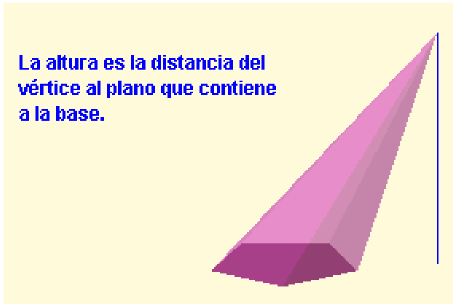
Si el vértice se proyecta verticalmente sobre el centro de la base es una **pirámide recta**, en caso contrario es una **pirámide oblicua**.

Si la base de una pirámide recta es un polígono regular decimos que es una **pirámide regular**. En ese caso los lados son triángulos isósceles y todos iguales. *El tetraedro es un caso particular de pirámide*.



Pirámide octogonal recta



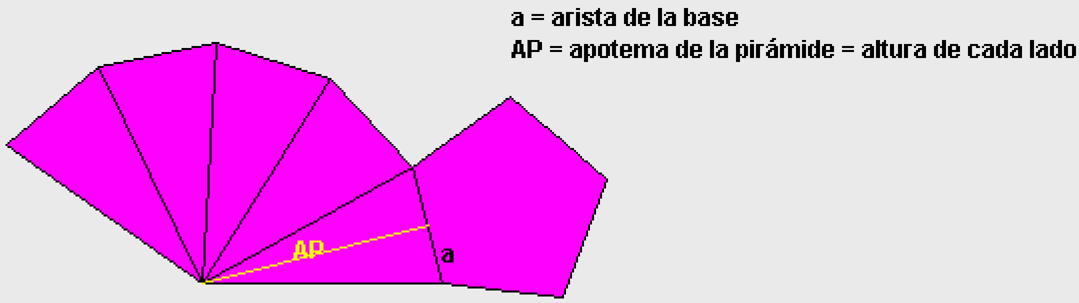


Pirámide pentagonal oblicua

Desarrollos, áreas y volúmenes de pirámides regulares

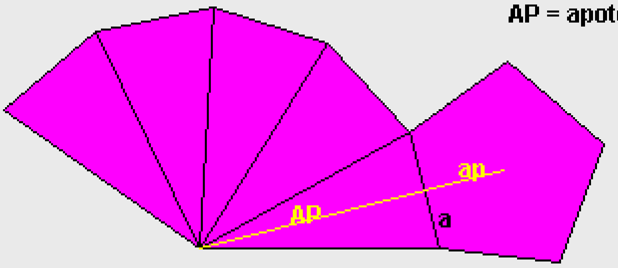
Las pirámides son cuerpos desarrollables. En particular, las pirámides regulares tienen un desarrollo muy sencillo, formado por tantos triángulos isósceles iguales como lados tenga y un polígonos regular que forma la base. Al igual que en los prismas esto facilita el cálculo de sus áreas y volúmenes.

3. Desarrollo de una pirámide regular pentagonal:



4. Área de una pirámide regular pentagonal:

a = arista de la base
AP = apotema de la pirámide = altura de cada lado



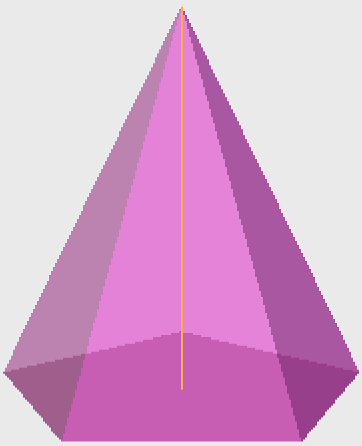
$$\text{Área de la base} = AB = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$$

$$\text{Área de un lado} = \frac{a \cdot AP}{2}$$

$$\text{ÁREA TOTAL} = AB + AL = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} + 5 \cdot \frac{a \cdot AP}{2} = \frac{5 \cdot a}{2} \cdot (ap + AP)$$

$$\text{Área lateral} = AL = 5 \cdot \frac{a \cdot AP}{2}$$

5. Volumen de una pirámide regular pentagonal:



El volumen de cualquier pirámide es siempre igual a la tercera parte del volumen de un prisma que tenga la misma base y la misma altura, es decir,

$$V = \frac{1}{3} AB \cdot H$$

siendo, AB el área de la base y H la altura de la pirámide

PIRÁMIDE PENTAGONAL

$$\text{Área de la base} = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$$

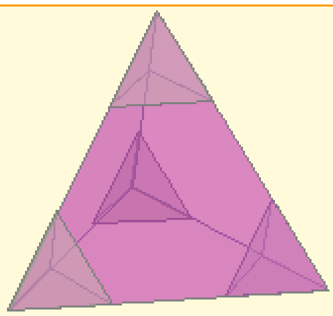
$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} \cdot H = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{6} \cdot H$$

Poliedros semirregulares

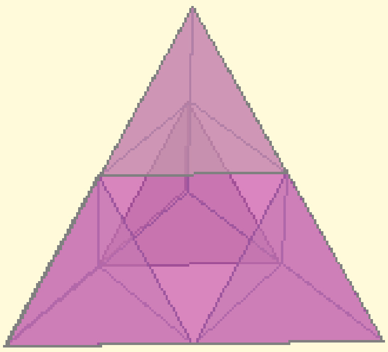
Un **poliedro semirregular** es un poliedro cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos, de forma que en cada vértice concurren los mismos polígonos (en número y en tipo).

Se pueden obtener con cierta facilidad poliedros semirregulares a partir de los poliedros regulares mediante la técnica del truncamiento.

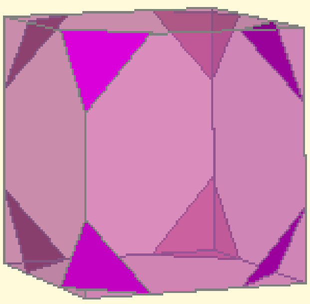
Truncar un poliedro consiste en suprimir uno de sus vértices mediante la aplicación de un corte plano.



Tetraedro truncado
Poliedro semirregular con 4 hexágonos regulares y 4 triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen 2 hexágonos y 1 triángulo.



Tetraedro truncado
Octaedro regular.



Cubo truncado
Poliedro semirregular con 8 triángulos equiláteros y 6 octógonos regulares. En cada vértice confluyen 2 octógonos y 1 triángulo.

Cubo truncado
Cuboctaedro. Formado por 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen 2 cuadrados y 2 triángulos.

Octaedro truncado
Poliedro semirregular con 8 hexágonos regulares y 6 cuadrados. En cada vértice confluyen 2 hexágonos y 1 cuadrado.

Octaedro truncado
Cuboctaedro. Formado por 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen 2 cuadrados y 2 triángulos.

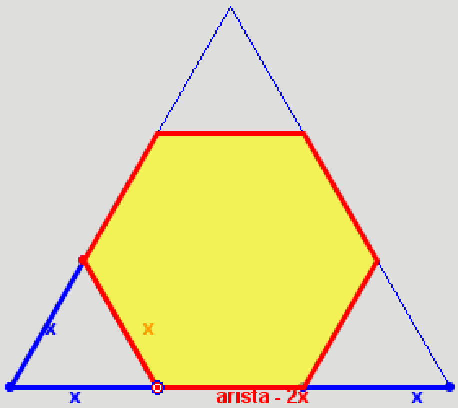
Dodecaedro truncado
Poliedro semirregular con 12 decágonos regulares y 20 triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen 2 decágonos y 1 triángulo.

Dodecaedro truncado
Poliedro semirregular con 12 pentágonos y 20 triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen 2 pentágonos y 2 triángulos.

Icosaedro truncado
Poliedro semirregular con 12 pentágonos regulares y 20 hexágonos regulares. En cada vértice confluyen 2 hexágonos y 1 pentágono.

EJERCICIOS resueltos

6. Determinar la longitud de la arista de un tetraedro, de un octaedro o de un icosaedro que hay que truncar a partir de un vértice para obtener un poliedro semirregular.



El triángulo adjunto representa una cara de un tetraedro, octaedro o icosaedro regular.
Moviendo el punto rojo se simula el truncamiento de los vértices.

La figura resultante es un hexágono, que debe ser regular para que el poliedro que buscamos sea semirregular.

Esto se consigue cuando

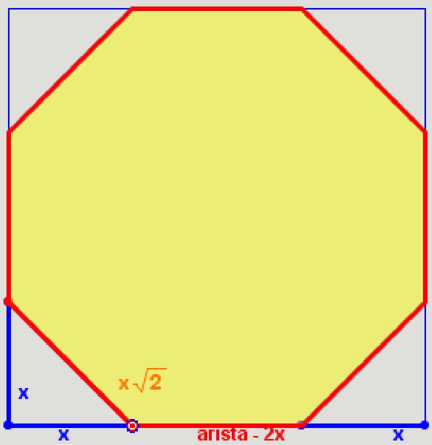
$$x = \text{arista} - 2x$$

o sea, cuando

$$\text{arista} = 3x$$

Luego el corte debe producirse a una distancia del vértice de un tercio del total de la arista.

7. Determinar la longitud de la arista de un cubo que hay que truncar a partir de un vértice para obtener un poliedro semirregular.



El cuadrado adjunto representa una cara de un cubo.
Moviendo el punto rojo se simula el truncamiento de los vértices.

Al truncar observamos que la figura resultante es un octógono, que debe ser regular para que el poliedro que buscamos sea semirregular.

Esto se consigue cuando

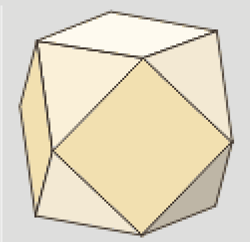
$$x\sqrt{2} = \text{arista} - 2x$$

o sea, cuando

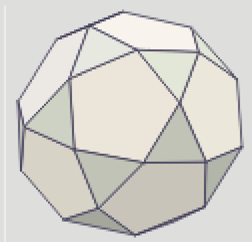
$$x = \frac{\text{arista}}{2+\sqrt{2}}$$

8. Analiza la dualidad de poliedros regulares cuando se truncan por la mitad de la arista.

El cubo y el octaedro son duales.
En ambos casos se obtiene un
CUBOCTAEDRO



El dodecaedro y el icosaedro son duales.
En ambos casos se obtiene un
ICOSIDODECAEDRO

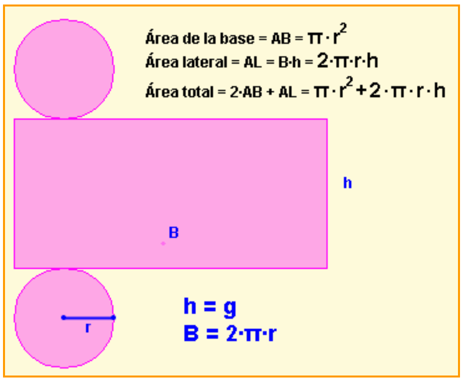


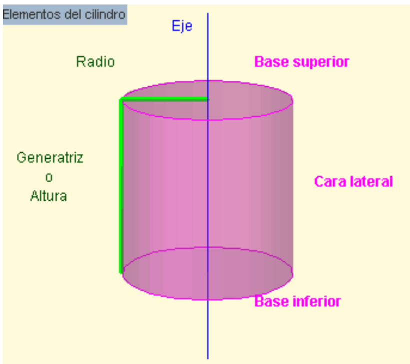
3. Cuerpos de revolución

Cilindros

Un **cilindro** es un cuerpo generado por un segmento (***generatriz***) al girar alrededor de una recta paralela al mismo (***eje***). El cilindro es un cuerpo desarrollable.

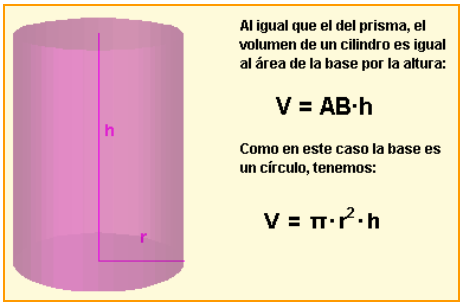
Un cilindro tiene 3 caras: dos de ellas son círculos paralelos e iguales (***bases***) y la otra es una cara curva (***cara lateral***) que desarrollada se transforma en un rectángulo.





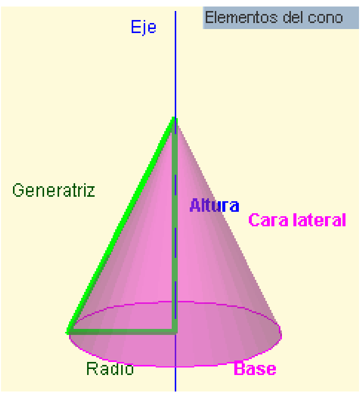
El ***radio*** del cilindro es el radio de cualquiera de sus bases y la ***altura*** del cilindro es la longitud de la generatriz.

La cara lateral desarrollada es un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia que rodea la base y cuya altura es la generatriz.



Conos

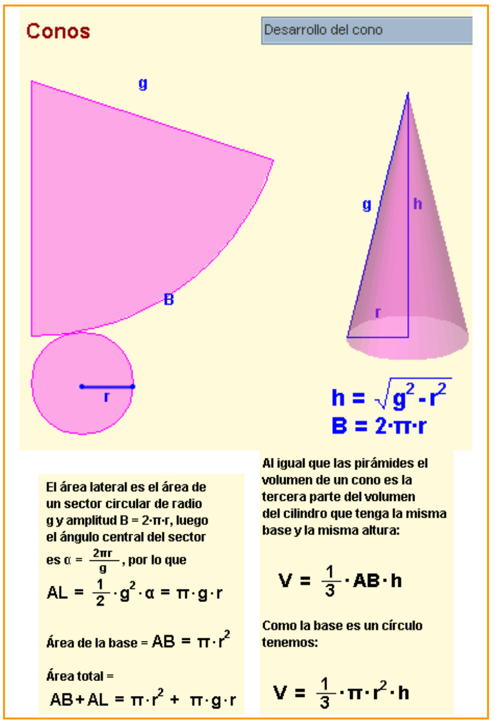
Un **cono** es un cuerpo generado por un segmento (***generatriz***) al girar alrededor de una recta sobre la que se apoya uno de sus extremos (***eje***). El cono es un cuerpo desarrollable.

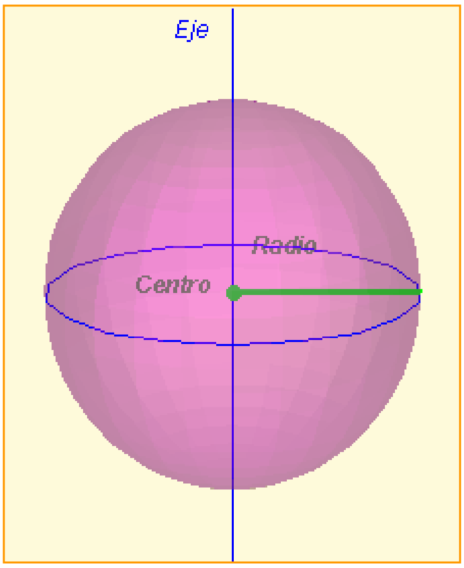


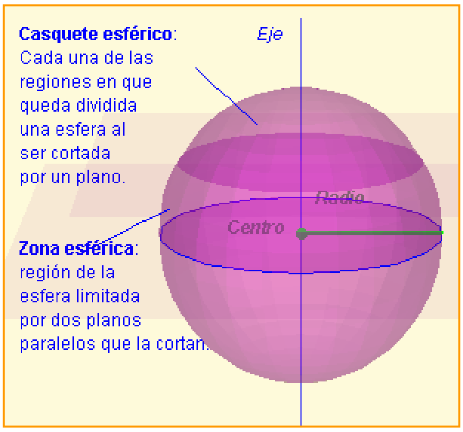
Un cono tiene 2 caras: un círculo (***base***) y una cara curva (***cara lateral***) que desarrollada se transforma en un sector circular.

El punto de apoyo de la generatriz sobre el eje es el ***vértice*** del cono. El ***radio*** del cono es el radio de su base y la ***altura*** del cono es la distancia del vértice al centro de la base.

La cara lateral desarrollada es un sector circular cuyo radio es la generatriz y cuya amplitud es la longitud de la circunferencia de la base.







Esferas

Una **esfera** es un cuerpo generado por un círculo al girar alrededor de cualquiera de sus diámetros.

El ***radio*** de una esfera es el mismo que el radio del círculo que la engendra y coincide con la distancia del centro de la esfera a cualquiera de los puntos de su superficie. Esta propiedad caracteriza a la esfera: *la esfera es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de un punto fijo, llamado centro*.

Las esferas no son desarrollables. Por ese motivo la elaboración de mapas es un problema importante. Analizaremos este problema con más detalle en el último capítulo.

- **Área de la esfera**

El área de una esfera de radio r es igual al área lateral del cilindro que la circunscribe.

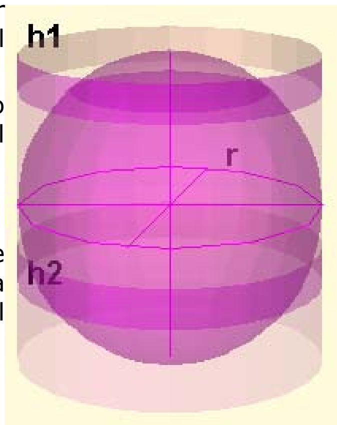
Como el radio de ese cilindro también es r y su altura 2r, el área de la esfera es:

$$\mathbf{A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2r = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Además el área de un casquete esférico o de una zona esférica también es igual al área lateral del cilindro que la contiene.

Área del casquete$=2\cdot\pi\cdot r\cdot h1$

Área de la zona$=2\cdot\pi\cdot r\cdot h2$



- **Volumen de la esfera**

$$\mathbf{V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$

El volumen del cilindro circunscrito es:

$$\mathbf{V_{CI} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2 \cdot \pi \cdot r^3}$$

Por tanto el volumen de la esfera equivale a los dos tercios del volumen del cilindro circunscrito.

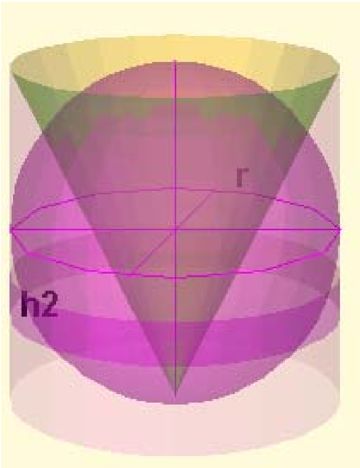
Como el volumen de un cono del mismo radio y altura es la tercera parte del volumen del cilindro:

$$\mathbf{V_E + V_{CO} = V_{CI}}$$

La misma relación vale para el volumen de una zona esférica:

El volumen de una zona esférica es igual al volumen del cilindro que la rodea menos el volumen del tronco de cono que queda en su interior.

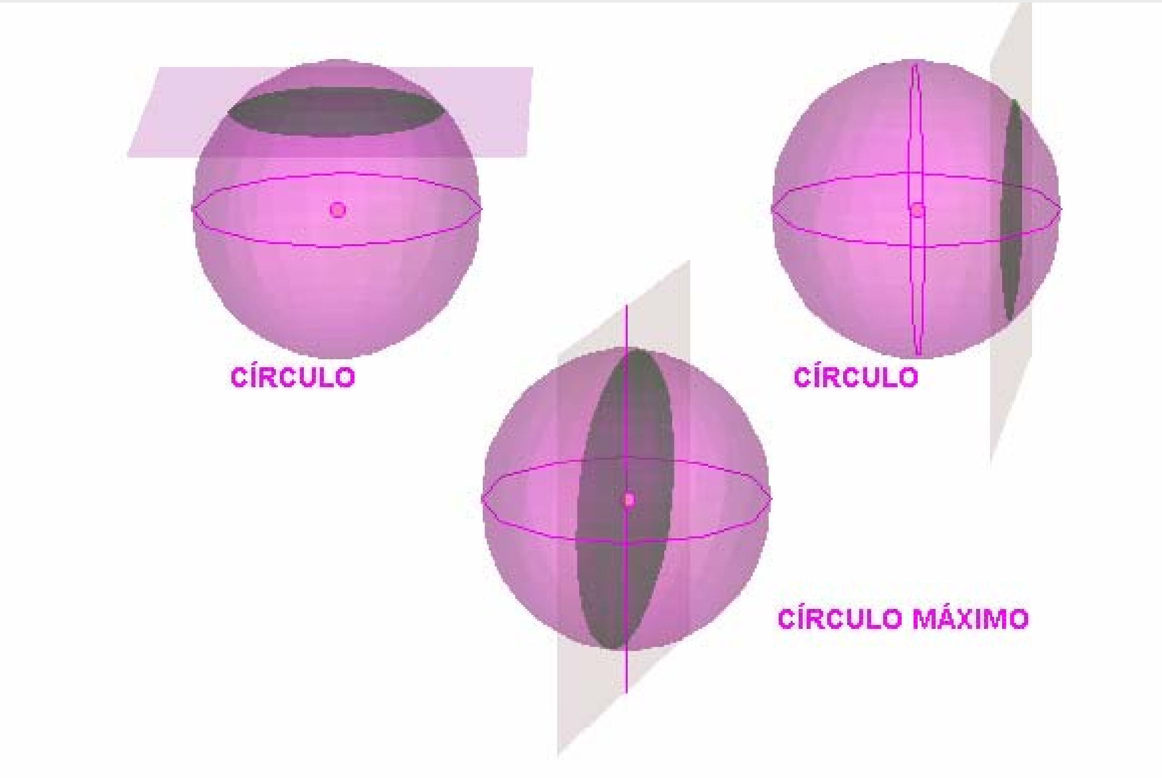
$$V_{ZE} = \pi \cdot r^2 \cdot h2 - V_{TCO}$$

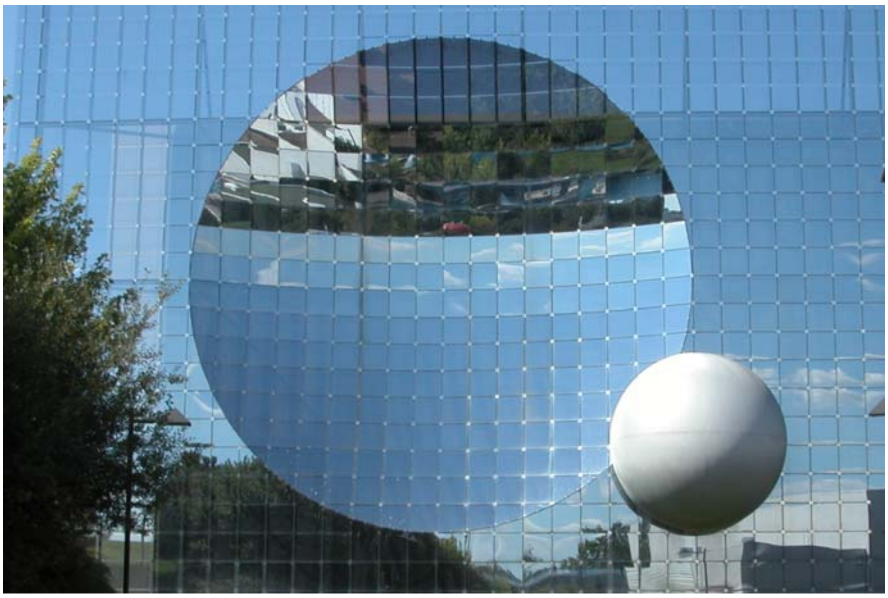


Círculos en la esfera

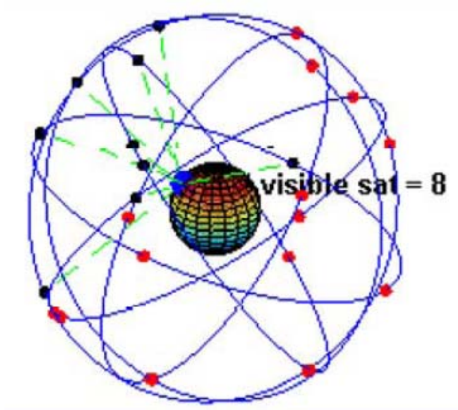
Cuando un plano corta a una esfera la intersección de ambas figuras produce siempre un círculo. Si ese círculo contiene al centro de la esfera se dice que es un CÍRCULO MÁXIMO.

Las circunferencias que limitan a los círculos máximos tienen la propiedad de que son caminos más cortos entre dos puntos cualesquiera de la superficie de la esfera.





4. La esfera terrestre



En la imagen puedes ver una reperesentación del conjunto de satélites que utiliza el Sistema de Posicionamiento Global (GPS) para localizar con precisión personas, objetos vehículos.

Coordenadas geográficas

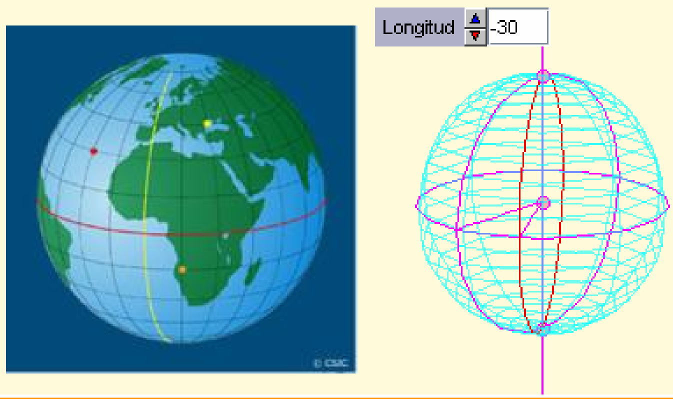
La Tierra tiene una forma casi esférica. Gira sobre una línea llamada **eje**. Los puntos en los que el eje corta a la superficie de la Tierra son los **polos geográficos**.

Los planos que contienen al eje cortan a la Tierra en círculos máximos cuyos bordes son circunferencias llamadas **meridianos**.

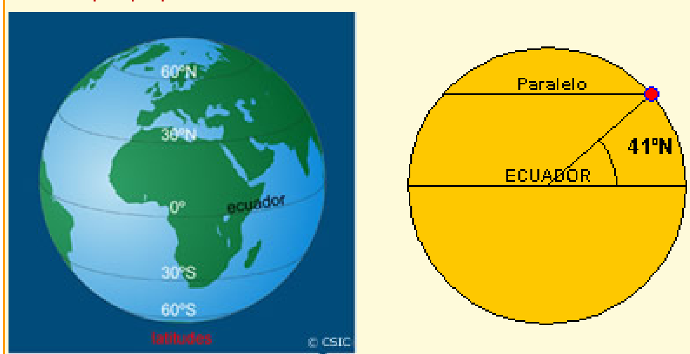
El plano perpendicular al eje que pasa por el centro de la Tierra la corta en un círculo máximo cuyo borde es el **Ecuador**. Los planos paralelos al plano del Ecuador cortan a la Tierra en círculos que ya no son máximos. Sus bordes son los **paralelos**.

- **Longitud y latitud**

Por cada punto de la Tierra pasa un meridiano y sólo uno. Su distancia angular con respecto a un meridiano de referencia (Meridiano 0 o de Greenwich) se denomina **longitud**. Viene medida en grados y hay que indicar si es Este (°E) u Oeste (°O). La longitud varía entre 0° y 180°. Como ejemplo, Valladolid tiene una longitud de 5°O.

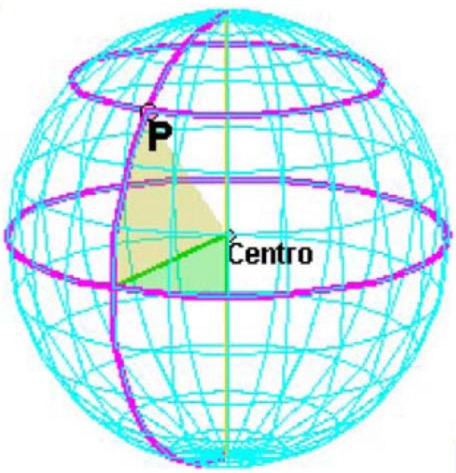


Por cada punto de la Tierra pasa un paralelo y sólo uno. Su distancia angular con respecto al Ecuador se denomina **latitud**. Viene medida en grados y hay que indicar si es Norte o Sur.
La latitud mínima se alcanza en cualquier punto del Ecuador y es de 0°.
La latitud máxima se alcanza en los polos 90°N y 90°S.
Como ejemplo, Valladolid tiene una latitud de 41°N.



La pareja de números (longitud, latitud) forman lo que se llama coordenadas geográficas de un lugar.
Estas coordenadas determinan de forma precisa la posición sobre la Tierra de un población, un barco, un avión, un coche e incluso un teléfono móvil.

Polo norte



Polo sur

LONGITUD: **30° O**
LATITUD: **45° N**

EJERCICIOS resueltos

9. Aunque ahora se usa una definición más precisa, el metro es, aproximadamente, la *diezmillonésima parte del cuadrante de un meridiano cualquiera*. Esto significa que todos los círculos máximos sobre la Tierra miden, aproximadamente, 40.000.000 de metros (en particular, todos los meridianos y el Ecuador). A partir de este dato calcula la longitud del radio de la Tierra, su superficie y su volumen.

SOLUCIÓN:

40.000.000 m = 40.000 km. Como la longitud de una circunferencia es $2\pi r$, tenemos que

$$r = \frac{40000}{2\pi} \approx 6366 \text{ km}$$

El área de su superficie (usando la fórmula del área de una esfera) es:

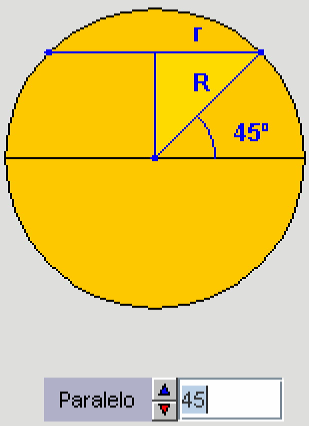
$$A = 4\cdot\pi\cdot r^2 = 4\cdot 3{,}14\cdot 6366^2 \approx 509.000.000 \text{ km}^2$$

Y su volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 6366^3}{3} \approx 1{,}08\cdot 10^{12} \text{ km}^3 \approx \text{un billón de km}^3$$

10. Salvo el Ecuador, los paralelos no son círculos máximos y calcular su longitud requiere el uso de unas herramientas que no verás hasta el curso que viene. Sin embargo, en algunos casos concretos y con ayuda de nuestro viejo amigo, el Teorema de Pitágoras, podemos hacerlo. Calcula la longitud del paralelo de 45ºN.

SOLUCIÓN: R = radio de la Tierra = 6366 km



La horizontal superior representa el diámetro del paralelo 45ºN

El complementario de 45º es 45º, luego el triángulo rectángulo de la figura tiene los dos catetos iguales y uno de ellos es el radio del paralelo 45º:

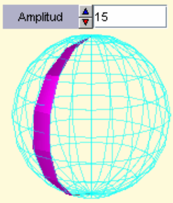
$$r^2 + r^2 = R^2, \Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{6366}{\sqrt{2}} \approx 4501 \text{ km}$$

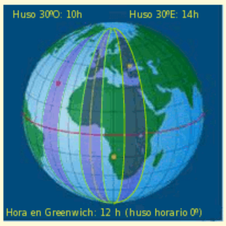
La longitud del paralelo 45º es pues:

$$long = 2\cdot\pi\cdot r = 2\cdot 3{,}14\cdot 4501 \approx 28281 \text{ km}$$

Husos horarios

Un huso esférico es la región de la superficie de la esfera limitada por dos círculos máximos.
En el caso de la Tierra llamamos HUSO HORARIO a un huso esférico limitado por dos meridianos.





Un **día** es el tiempo que tarda la Tierra en girar sobre sí misma. Así, en cualquier punto es ***mediodía*** cuando el Sol pasa por el meridiano del lugar. Esto hace que incluso localidades cercanas tengan horas distintas.

Para evitar este problema se ha dividido la Tierra en 24 zonas que tienen la misma hora. Esas zonas se establecen así: Centrado en el meridiano 0º se forma un ***huso esférico*** de 15º (360º:24h=15º). En todos los puntos de este huso será mediodía cuando el Sol pase por el meridiano 0º. A partir de él con giros de 15º se forman los otros 23 **husos horarios**. El Sol tarda una hora en cruzar cada huso.

EJERCICIOS resueltos

11. Tenemos una esfera de 9 cm de radio. Calcula la superficie de un huso esférico sobre esa esfera de 59º de amplitud.

SOLUCIÓN:

La superficie de la esfera es $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 9^2 = 1017{,}87\ cm^2$

La superficie de un huso esférico de 1º de amplitud es $\frac{A}{360}$

Por tanto, la superficie de nuestro huso es de $\frac{A}{360} \cdot 59 = 166{,}81\ cm^2$

12. La ciudad A tiene una longitud de 123ºO y la ciudad B de 23ºE. Calcula la hora que es en la ciudad B cuando en la ciudad A son las 10 horas.

SOLUCIÓN:

Dividimos las longitudes por la amplitud de un huso horario (15º). Si el resto es menor de 7º 30' el cociente es la diferencia de husos horarios de cada ciudad con el meridiano 0º. Si el resto es mayor entonces hay que sumar una unidad al cociente:

$123^\circ = 15^\circ \cdot 8 + 3^\circ$ luego la ciudad A está 8 husos horarios al Oeste del merid. de Greenwich.

$23^\circ = 15^\circ \cdot 1 + 8^\circ$ luego la ciudad B está 2 husos horarios al Este del merid. de Greenwich.

Por tanto, la diferencia horaria entre A y B es de 10 horas,

luego en B son las 20 horas.

5. Mapas

Proyecciones de la esfera sobre un plano

Un mapa es una representación de la esfera terrestre sobre un plano.

Como sabemos que la esfera no es una superficie desarrollable llegamos a la conclusión de que los mapas no pueden ser más que representaciones aproximadas de la realidad y nunca exactas.

En este apartado vamos a analizar algunas de las técnicas empleadas para construir mapas. Todas ellas consisten en proyectar los puntos de la esfera sobre un plano y todas ellas tienen ventajas e inconvenientes.

Veremos en cada caso cuáles son estas ventajas e inconvenientes y describiremos su construcción.

En la actualidad se suelen emplear técnicas más complejas para reducir en lo posible los inconvenientes. Estas técnicas suelen mezclar varias de las descritas aquí pero, a pesar de todo, no consiguen suprimir completamente los errores.

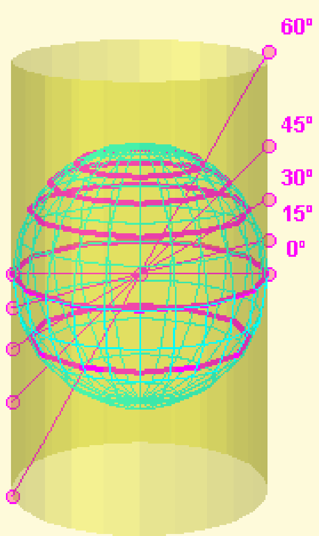
Proyección de Mercator

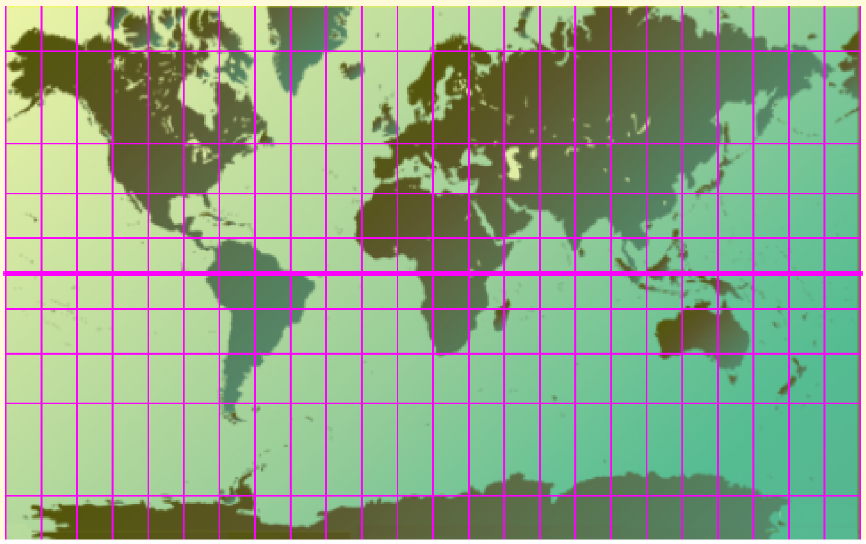
Proyección cilíndrica desde el centro de la Tierra, inventada por Gerardus Mercator en 1569.

Características: Los meridianos se representan mediante rectas verticales separados por distancias iguales. Los paralelos se representan mediante rectas horizontales más separadas a medida que nos alejamos del Ecuador.

Ventajas: Mantiene la forma real de los continentes y facilita el establecimiento de rumbos constantes de navegación.

Inconvenientes: Disminuye su precisión a medida que nos alejamos del Ecuador, lo que hace que la superficie de los países de Europa y América del Norte parezca mucho mayor de lo que es en realidad.





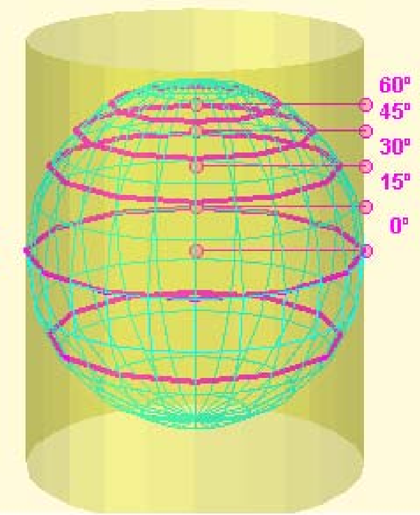
Proyección de Gall-Peters

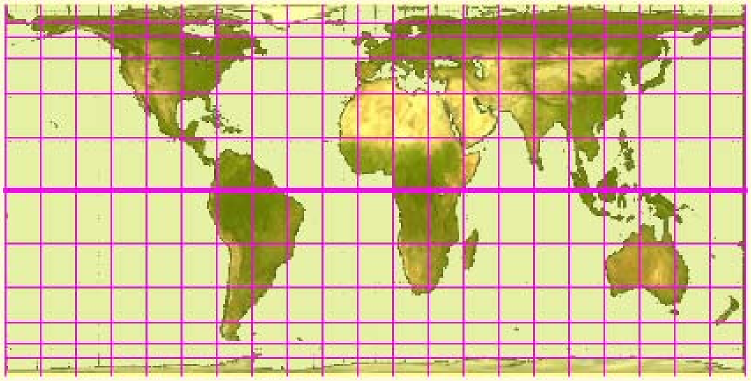
Proyección cilíndrica desde el infinito.

Características: Los meridianos se representan mediante rectas verticales separados por distancias iguales. Los paralelos se representan mediante rectas horizontales más juntas a medida que nos alejamos del Ecuador.

Ventajas: Este tipo de proyección conserva las áreas, es decir, la superficie de los continentes tal como se ve en el mapa es la correcta de acuerdo a la escala del mapa.

Inconvenientes: A diferencia de la proyección de Mercator, en este caso no se mantiene la forma correcta de los continentes. Para mantener las áreas, las zonas cercanas al Ecuador se ven más estrechas y largas de lo habitual y las zonas cercanas a los polos se ven más anchas y achatadas.





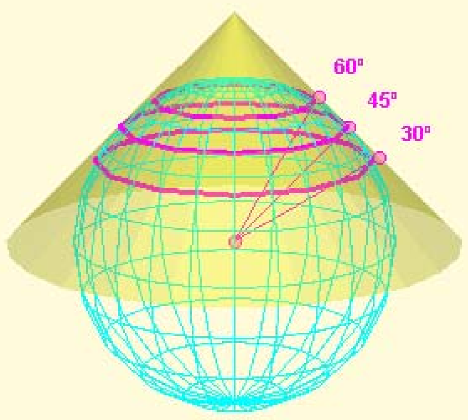
Proyección Cónica

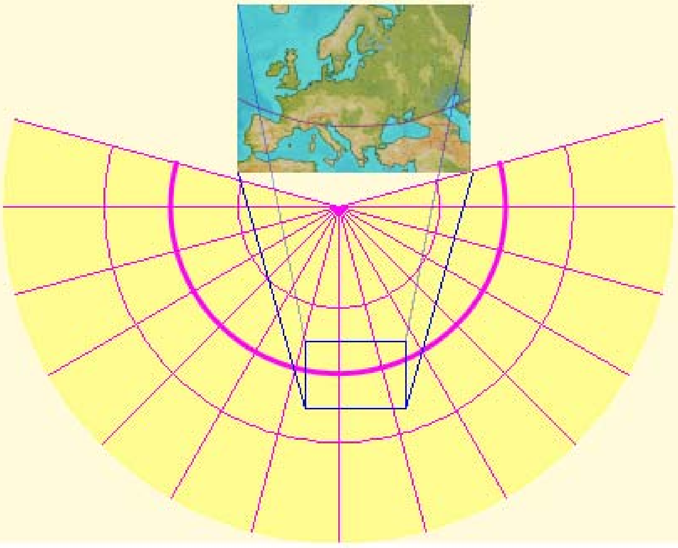
Proyección sobre un cono tangente a la esfera a lo largo de un paralelo.

Características: El mapa aparece en el desarrollo del cono. Los meridianos se representan mediante generatrices del cono separados por distancias angulares iguales. Los paralelos se representan mediante arcos de circunferencia perpendiculares a los meridianos.

Ventajas: Es muy adecuado para representar mapas zonales. Es muy preciso cerca del paralelo de tangencia.

Inconvenientes: Al igual que en los casos anteriores las distorsiones aumentan al alejarnos del paralelo de tangencia.





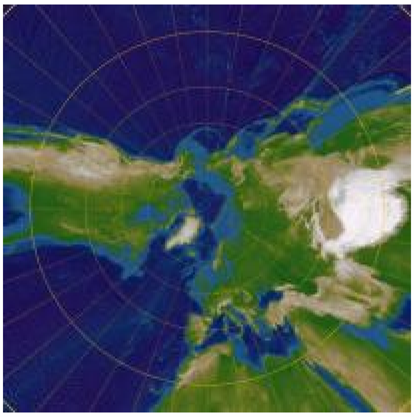
Proyección Azimutal

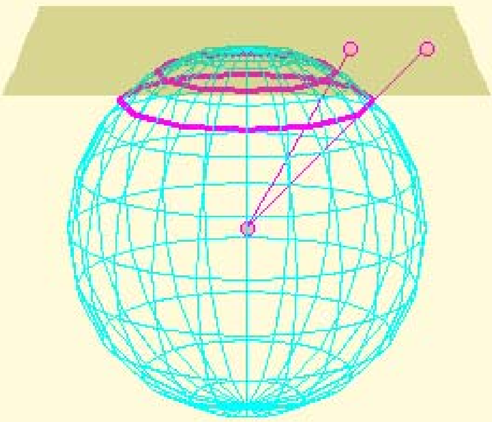
Proyección sobre un plano tangente a la esfera en uno de los polos.

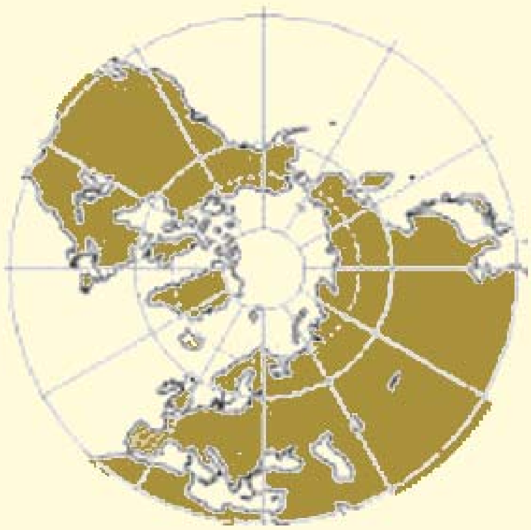
Características: El mapa es circualr. Los meridianos se representan como radios del círculo separados por distancias angulares iguales. Los paralelos son circunferencias concéntricas más separados a medida que nos alejamos del polo.

Ventajas: Es muy adecuado para representar mapas polares. Es muy preciso cerca del polo.

Inconvenientes: Las distorsiones aumentan al alejarnos del polo.







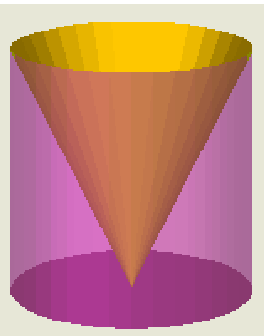
Para practicar

1. Calcula el área total del tetraedro truncado sabiendo que su arista mide 12 cm.

2. Calcula el área total de un prisma recto sabiendo que sus bases son rombos de diagonales D=26cm y d=14cm y su altura de h=26cm.

3. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide cuadrangular regular sabiendo que el lado de la base mayor es B=26cm. El lado de la base menor es b=14cm y la arista lateral es a=13cm.

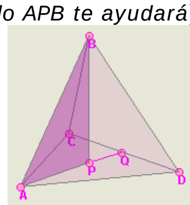
4. Calcula el área total del recipiente de la figura izquierda sabiendo que el radio de la base es r=7cm y la altura es h=13cm.



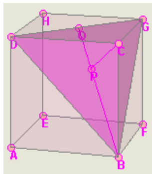
5. ¿Cuántos litros de pintura se necesitan para pintar la pared exterior de un observatorio astronómico (figura arriba derecha) sabiendo que tiene un radio de 5m, que la altura del cilindro es de 9m y que con cada litro se pueden pintar 10 metros cuadrados?

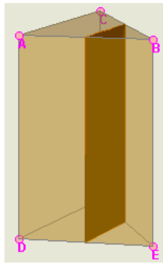
6. Una bola de navidad de 3cm de radio se quiere cubrir parcialmente con pan de oro de forma que la franja cubierta tenga una amplitud de 60º desde el centro de la bola. Calcula la superficie de la bola que se pintará.

7. Calcula el volumen del tetraedro regular de la figura sabiendo que su arista AB=10cm. (*El triángulo APB te ayudará*)



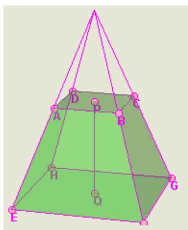
8. El cubo de la figura tiene 10 cm de arista. Calcula el volumen del tetraedro de vértices BCDG y comprueba que es la sexta parte del volumen del cubo.

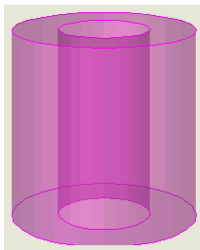




9. Calcula el volumen de los dos prismas en que queda dividido el prisma regular triangular de la figura al ser cortado por un plano perpendicular a las bases que pasa por los puntos medios de las aristas. AD=20m y AC=15m.

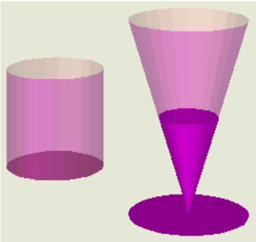
10. Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular sabiendo que la arista de la base mayor es EF=20cm, la arista de la base menor es AB=8cm y la altura del tronco es PQ=15cm.



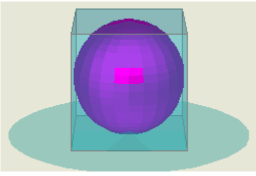


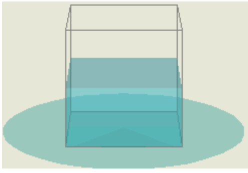
11. Calcula el volumen de la pieza de arriba sabiendo que el diámetro de la circunferencia exterior es de 10cm, el diámetro de la circunferencia interior es de 5 cm y la altura es de 10 cm.

12. Las figuras representan un vaso cilíndrico de 6cm de diámetro y 8 cm de altura y una copa con forma de tronco de cono con 7cm de diámetro mayor, 5 cm de diámetro menor y 8 cm de generatriz. ¿Cuál tiene más capacidad?

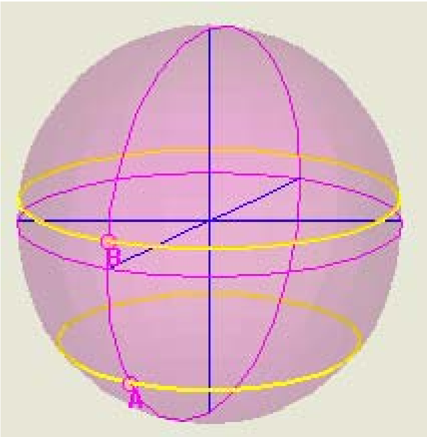


13. Un recipiente cúbico de 10 cm de arista está lleno de agua. Se introduce en él con cuidado una bola de cristal de 5 cm de radio y luego se saca con cuidado. Calcula el volumen del agua que se ha derramado y la altura a la que queda el agua cuando se saca la bola.

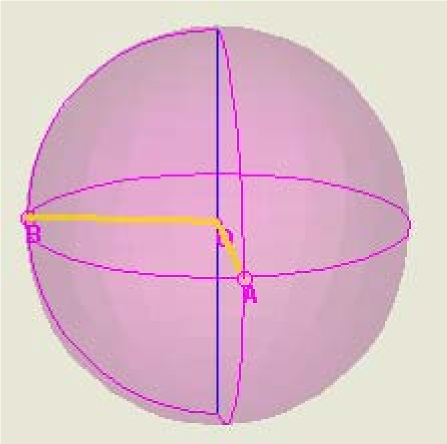




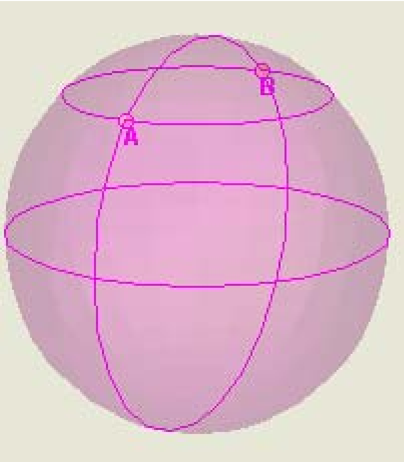
14. Calcula la distancia entre dos puntos de la Tierra, A y B, situados en el mismo meridiano, si la latitud de A es de 38º 5′ S y la de B es de 7º 28′ N.



15. El punto A se encuentra en el meridiano 7ºE y el punto B en el meridiano 94ºO. Si en A son las 23 horas, ¿qué hora es en B?



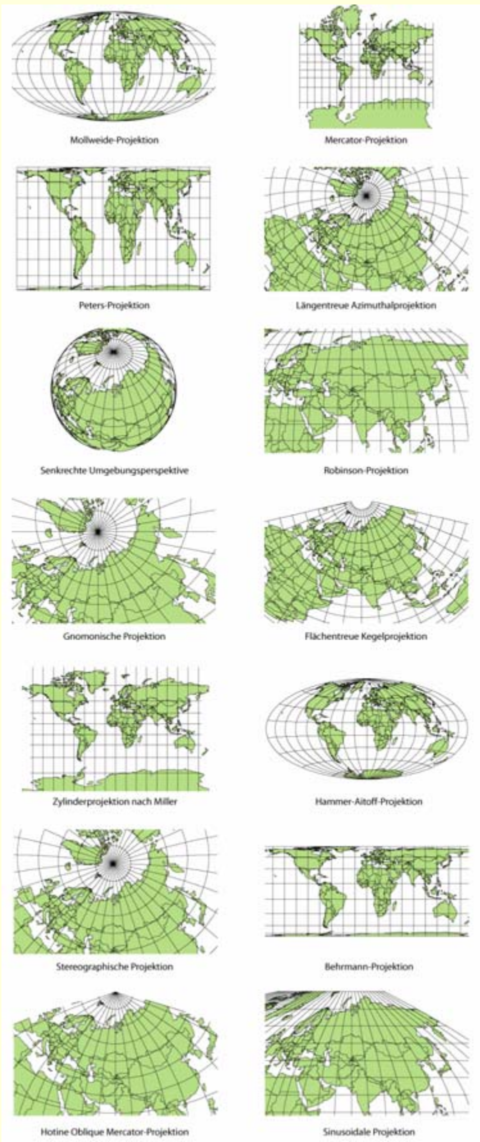
16. Los puntos A y B se encuentran sobre el paralelo 45ºN y sus longitudes se diferencian en 180º. Un avión tiene que ir desde A hasta B ¿qué ruta es más corta: siguiendo el paralelo o siguiendo el meridiano por el Polo Norte?



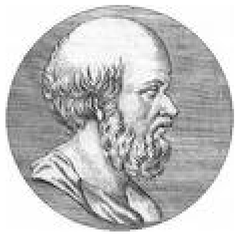
Para saber más

Otros tipos de mapa

Como hemos visto hay diferentes tipos de mapas basados en proyecciones distintas de la esfera sobre diferentes tipos de superficie. Aquí te mostramos algunos otros tipos:



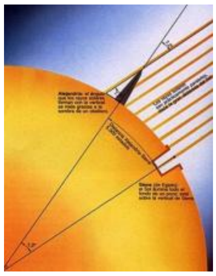
La medida de la Tierra



El tamaño aproximado de nuestro planeta se conoce desde antiguo.

En el siglo III a C. Eratóstenes calculó el radio de la Tierra con una precisión muy buena.

Sabía que las ciudades egipcias de Siena y Alejandría estaban en el mismo meridiano y que el día del solsticio de verano la luz del Sol llegaba al fondo de un pozo en Siena y, el mismo día, en Alejandría los obeliscos proyectaban sombra con un ángulo de 7º.



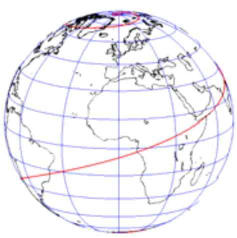
En el dibujo puedes ver que el ángulo de la sombra coincide con la diferencia de latitud entre las dos ciudades.

Eratóstenes contrató a un hombre para que midiera la distancia entre ambas ciudades que resultó ser de unos 800 km.

Si 7º de meridiano tienen una longitud de 800 km, el meridiano entero de 360º medirá 800/7·360 = 41143 km, de donde el radio de la Tierra sería:

$$R = 41143/(2\pi) = 6548 \text{ km}.$$

¡Una excelente aproximación para la época! El radio medio real es de unos 6400 km.



Geodésicas y loxodromas.

Una **geodésica** es una línea que une dos puntos de una superficie por el camino más corto. Sobre la Tierra las geodésicas son los círculos máximos. Una **loxodroma** es una trayectoria sobre la Tierra que corta a todos los meridianos con un ángulo constante. Son muy usadas en la navegación aérea y marítima. En la imagen puedes ver una loxodroma de 72º.

Recuerda lo más importante

Poliedros

<u>Regulares</u>: sus caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice concurre el mismo nº de caras.
<u>Semirregulares</u>: las caras son polígonos regulares de tipos diferentes y con el mismo nº y tipo de caras en cada vértice.
<u>Prismas</u>: las bases son polígonos regulares iguales y los lados son paralelogramos.
<u>Pirámides</u>: la base es un polígono regular y los lados son triángulos concurrentes en un vértice común.
Todos son desarrollables.

Cuerpos de revolución

<u>Cilindro</u>: generado por un rectángulo al girar sobre uno de sus lados.
<u>Cono</u>: generado por un triángulo rectángulo al girar sobre uno de sus catetos.
El cilindro y el cono son desarrollables.
<u>Esfera</u>: generada por una circunferencia al girar sobre uno de sus diámetros.
La esfera no es desarrollable.

Áreas y volúmenes

	A. lat.	A. total	Volumen
Prismas	p·h	B+p·h	B·h
Pirámides	(p·a)/2	B+(pa)/2	(B·h)/3
Cilindros	$2\pi rh$	$2\pi r^2+2\pi rh$	$\pi r^2 h$
Conos	πgr	$\pi r^2+\pi gr$	$(\pi r^2 h)/3$
Esferas		$4\pi R^2$	$(4\pi R^3)/3$

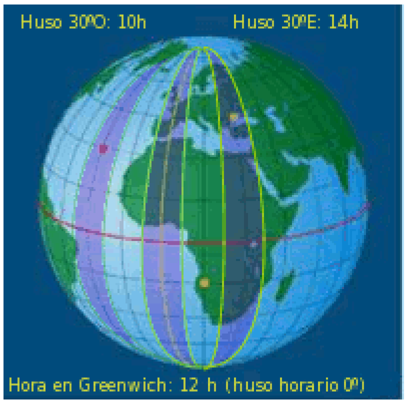
p = perímetro de la base,
B = área de la base,
h = altura, a = apotema (pirámide),
r = radio de la base (conos y cilindros),
R = radio (esfera), g = generatriz (cono)

<u>Poliedros</u>:

El área de un poliedro es siempre igual a la suma de las áreas de los polígonos que forman sus caras. El volumen se calcula descomponiendo el poliedro en prismas y/o pirámides y sumando sus volúmenes.

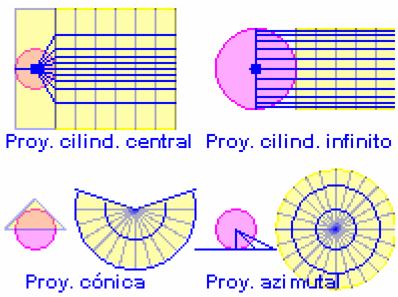
La esfera terrestre

<u>Meridianos</u>: círculos máximos que pasan por los polos. Se numeran de 0º a 180º Este y Oeste a partir del ***Meridiano de Greenwich***. El meridiano de un lugar es su **longitud**.
<u>Paralelos</u>: círculos perpendiculares al eje de la Tierra. Se numeran de 0º a 90º Norte y Sur a partir del ***Ecuador***. El paralelo de un lugar es su **latitud**.
<u>Husos horarios</u>: la Tiera se divide en 24 husos geográficos de 15º de amplitud con una hora de diferencia entre ellos.



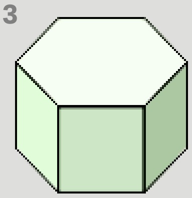
Mapas

Un mapa es una representación de la esfera terrestre sobre un plano, obtenida mediante alguna forma de proyección. Las más habituales son las siguientes:

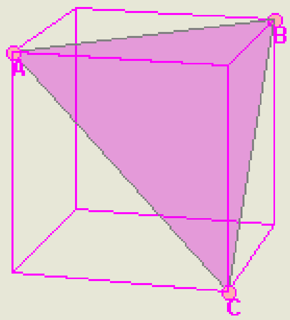


Autoevaluación

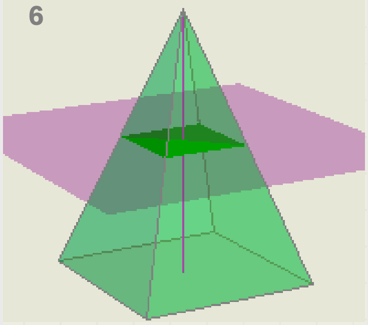
3



4



6



10

a) Mapa de Mercator
1) Los paralelos son círculos y los meridianos radios.

b) Mapa de Gall-Peters
2) Los meridianos y paralelos son rectas perpendiculares y los paralelos están más separados cuanto más lejos del Ecuador.

c) Mapa azimutal
3) Los paralelos son arcos de circunferencia y los meridianos son rectas convergentes.

d) Mapa cónico
4) Los meridianos y paralelos son rectas perpendiculares y los paralelos están más juntos cuanto más lejos del Ecuador.

1. Indica qué poliedro se obtiene al truncar las aristas de un dodecaedro por la mitad e indica el número de caras aristas y vértices que tiene.

2. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 cm y 16 cm. Averigua qué cono tiene mayor área total: el que se obtiene haciendo girar el triángulo alrededor del primer cateto o el que se obtiene al girar sobre el segundo.

3. Calcula el área total del poliedro semirregular de la imagen sabiendo que su arista es a. (Expresa el resultado en función de a)

4. Calcula el área del triángulo de la figura sabiendo que la arista del cubo es a. (Expresa el resultado en función de a)

5. La "zona tropical" de la Tierra está situada, aproximadamente, entre los paralelos 30º N y 30º S. ¿Qué porcentaje de la superficie de la Tierra está situada en la zona tropical?

6. Una pirámide de base cuadrada se corta con un plano paralelo a la base por la mitad de la altura de la pirámide, obteniendo una pirámide más pequeña y un tronco de pirámide ¿Cuántas veces es más grande el volumen del tronco con respecto al volumen de la pirámide pequeña?

7. Se corta una semiesfera de radio R con un plano paralelo a la base de la semiesfera, a una altura de 2/3 del radio. Halla el volumen de la mayor de las dos zonas en que queda dividida. (Expresa el resultado en función de R)

8. Una milla náutica es la distancia entre dos puntos situados sobre el Ecuador con una diferencia de longitudes de 1' ¿A cuántos km equivale una milla náutica si el radio de la Tierra es de 6366 km?

9. Boston está en el meridiano 71º O y Frankfurt en el meridiano 9º E. Un avión sale de Frankfurt a las 23 horas y tarda 8 horas en llegar a Boston. ¿Qué hora es en Boston cuando llega?

10. Asocia los distintos tipos de mapa con sus características.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 1745,9 cm^2
2. 1899,54 cm^2
3. 922,6 cm^2
4. 1050,4 cm^2
5. 43,98 litros
6. 56,54 cm^2
7. 117,85 cm^3
8. 500/3 cm^3
9. El pequeño 162,37 m^3 y el grande 487,13 cm^3.
10. 3120 cm^3.
11. 589,04 cm^3
12. La copa tiene un volumen de 226,49 cm^3 y el vaso de 226,19 cm^3. Tienen prácticamente la misma capacidad.
13. Se han derramado 523, 59 cm^3 de agua. La altura final del agua es de 4,76 cm
14. 5061 km.
15. En B son las 17 horas.
16. Por el meridiano son 10.000 km y por el paralelo son 14.172 km.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. Es un icosidodecaedro con 32 caras, 60 aristas y 30 vértices.
2. El que gira sobre el primero: 576π cm^2 frente a 384π cm^2.
3. $6a^2 + 3a^2\sqrt{3}$
4. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$
5. 50%
6. El tronco es 7 veces mayor que la pirámide pequeña.
7. $\dfrac{46\pi R^3}{81}$
8. 1,85 km
9. Es la 1 de la madrugada del día siguiente.
10. a2, b4, c1, d3

No olvides enviar las actividades al tutor ►

9

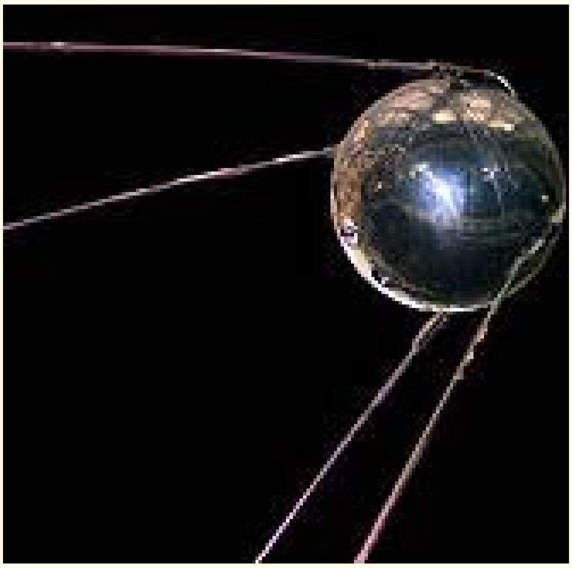
Funciones y gráficas

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer si una relación entre dos variables es una función o no.
- Distinguir la variable independiente y la dependiente.
- Expresar una función utilizando una tabla de valores, una gráfica o una fórmula.
- Determinar el dominio y el recorrido de una función.
- Interpretar algunas características de la gráfica de una función: el crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, la periodicidad...
- Representar y analizar gráficas de funciones extraídas de distintas situaciones cotidianas.

Antes de empezar

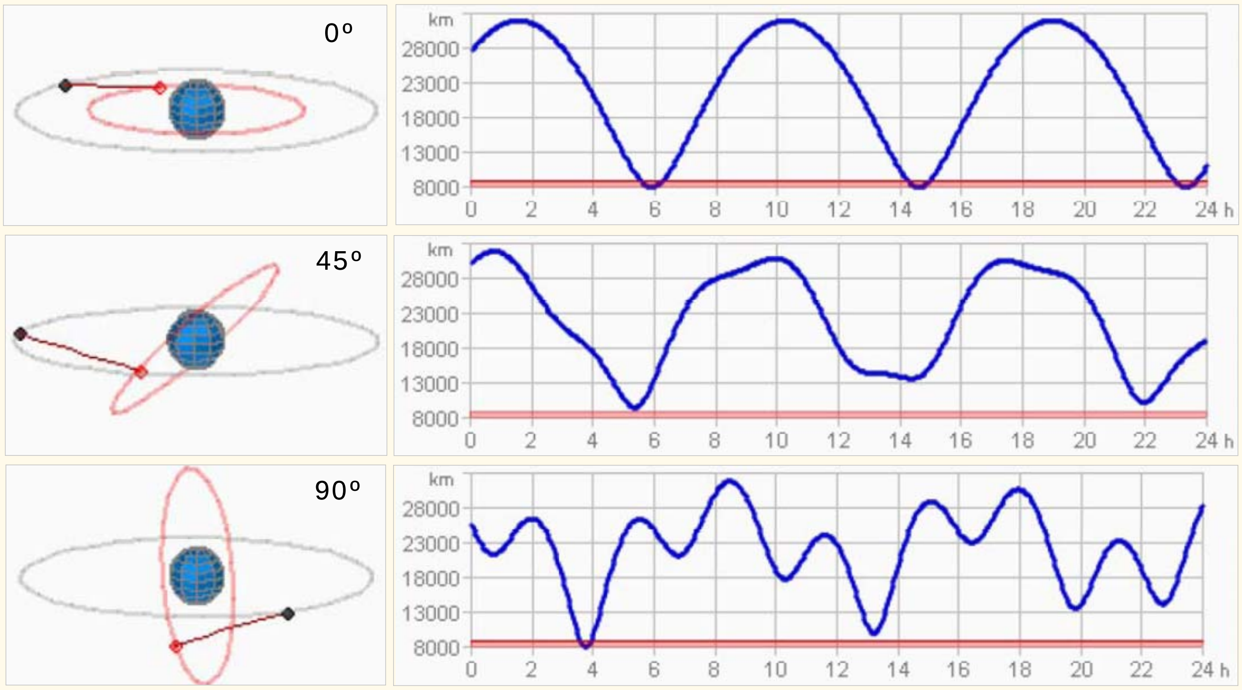


ORBITANDO LA TIERRA

Dos satélites artificiales giran alrededor de la Tierra describiendo órbitas de 12000 y 20000 km de radio.

¿Cómo varía la distancia en línea recta entre estos satélites, a medida que pasa el tiempo?

Observa las gráficas hechas a lo largo de un día, y variando el ángulo que forman los planos de las órbitas de los dos satélites.



Investiga

El período de revolución de un satélite es una **función** del radio de la órbita (si ésta es circular). Es decir, si se conoce el radio de la órbita se sabrá lo que tarda el satélite en dar una vuelta.
Busca el enunciado de la **tercera ley de Kepler** para saber de qué tipo de función se trata.

1. Relaciones funcionales

Concepto y tabla de valores

Una función es una relación de causa-efecto entre dos cantidades matemáticas: a iguales causas, iguales efectos.

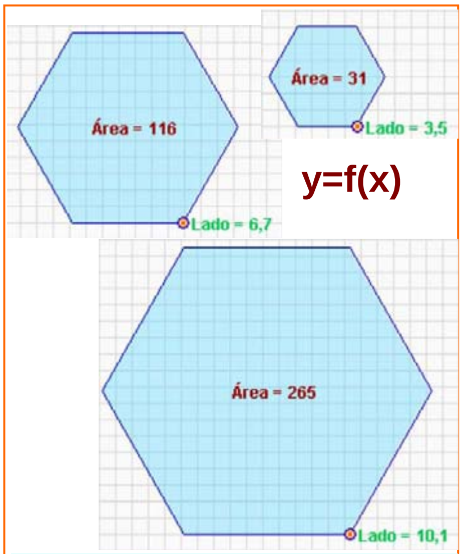
La causa se denomina **variable independiente** y se denota con la letra ***x***. El efecto es la **variable dependiente**, que se indica con la letra ***y***.

Frecuentemente, en lugar de la letra ***y*** se utiliza la expresión ***f(x)*** (o ***g(x)***, ...) para dar a entender que ***y*** efectivamente **depende** del valor de ***x***.

✓ *EJEMPLO: El **área** de un polígono regular es **función** de la medida del **lado**.*

*Variable **independiente**: **x**=longitud del lado*

*Variable **dependiente**: **y**= área del polígono*



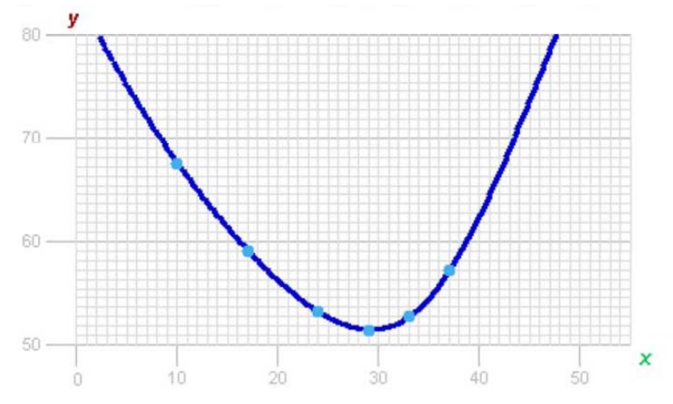
longitud del lado:	*x*	10,3	3,9	9,2
área del polígono:	*y*	275	39	219

Gráfica de una función

Para obtener la gráfica de una función a partir de la tabla de valores primero se dibujan unos ejes de coordenadas, representándose los valores de la variable independiente (***x***) en el eje horizontal (**abscisas**) y los de la variable dependiente (***y***) en el vertical (**ordenadas**).

Cada pareja de valores de las variables dependiente e independiente se representa mediante un punto ***(x,y)*** en el sistema de coordenadas.

Los puntos dibujados se unirán si la variable independiente puede tomar cualquier valor real en el rango estudiado: la línea (recta o curva) que resulta es la **gráfica de la función**.



dist. al puente (km)	*x*	10	17	24	29	33	37
long. tuberías (km)	*y*	67,6	59,1	53,2	51,4	52,7	57,2

CAPTACIÓN DE AGUAS

Se proyecta la construcción de una estación para captar el agua de un río y distribuirla a tres poblaciones cercanas mediante tuberías.

Se muestra la longitud de las tres tuberías que unen la estación captadora, C, con las tres ciudades P, Q y R.

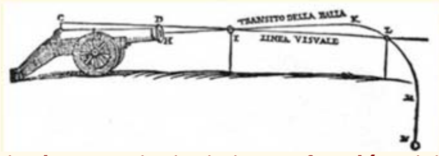
La longitud total de las tuberías (**x**) es **función** de la distancia de la estación captadora al puente (**y**).

Así cuando la distancia al puente es de 17 km, la longitud total de las tuberías es 59 km.

x=17 **y=59**

BALA DE CAÑÓN

Un cañón situado en un punto elevado dispara balas con una velocidad inicial que forma un cierto ángulo con la horizontal



El **alcance** de la bala es **función** del **ángulo** que forma el cañón con la horizontal.

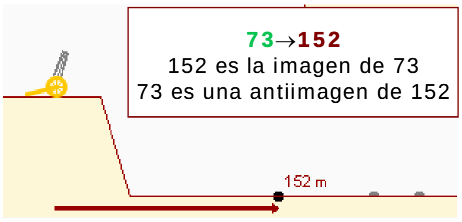
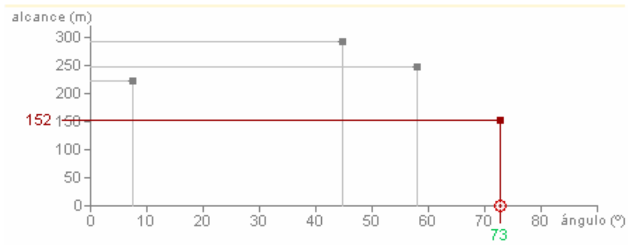


Imagen y antiimagen

Si un punto ***(x,y)*** pertenece a la gráfica de la función entonces se dice que ***y*** es la **imagen** de ***x*** y que ***x*** es la **antiimagen** de ***y***.

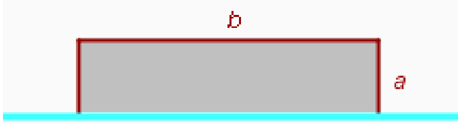
Es fácil hallar imágenes y antiimágenes viendo la gráfica de la relación funcional. Así se puede reproducir la tabla de valores a partir de la gráfica de la función.



Cada valor de x sólo puede tener una imagen, aunque puede ser antiimagen de más de un valor de y.

COLONIZACIÓN DEL OESTE

Un colonizador del oeste americano dispone de 30 hm de valla. Se le dice que recibirá la propiedad del terreno rectangular que logre delimitar con esos 30 hm, teniendo en cuenta que uno de los lados del rectángulo no necesita valla, ya que el terreno lindará con el río.



Tomamos la altura **a** como la variable independiente, el **área** del rectángulo es la variable dependiente.

Supongamos que **a= 5** hm

Entonces como se emplean 10 hm de valla de los 30 disponibles quedan 20:

b= 30 – 2·5 = **20** hm

El área del rectángulo es:

a·b=5·20=100 hm^2

f(5)=100

Expresión algebraica

Se trata de una fórmula que permite obtener el valor de ***y*** cuando se sabe el valor de ***x*** realizando operaciones algebraicas. Es, por lo tanto, una manera de obtener imágenes de valores de la variable independiente sin tener que recurrir a la gráfica de la función.

Es sencillo obtener la tabla de valores de una función a partir de su **expresión algebraica** o analítica: no hay más que ir dando valores a ***x*** y calcularse los valores de ***y*** correspondientes. Así los tres elementos de una relación funcional (tabla de valores, gráfica y expresión algebraica) están interconectados.

Cuando se conoce la expresión algebraica de una función también se pueden obtener analíticamente las antiimágenes de un valor de ***y*** resolviendo una ecuación.

Para encontrar la **expresión algebraica** (fórmula) de la función hay que sustituir los valores concretos de la variable independiente por x en el cálculo del área del rectángulo:

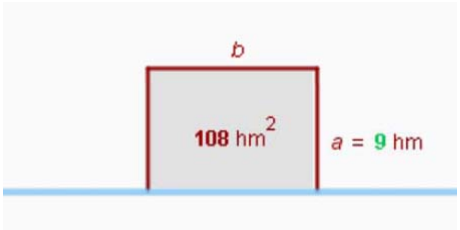
$a = 5{,}0$	$a = x$
$b = 30 - 2\cdot 5{,}0$	$b = 30 - 2\cdot x$
$f(5{,}0) = 5{,}0\cdot(30 - 2\cdot 5{,}0)$	$\boxed{f(x) = x\,(30 - 2x) = 30x - 2x^2}$

Observa que:

Una vez se conoce la expresión algebraica de una función se pueden calcular fácilmente **imágenes**: simplemente hay que sustituir la x por el valor dado y realizar la operación.

Por ejemplo, la imagen de $x = 9$ es:

$$y = f(9) = 30 \cdot 9 - 2 \cdot 9^2 = 270 - 2 \cdot 81 = 108$$



Para calcular **antiimágenes** se sustituye la y por el valor dado y se aisla la x resolviendo una ecuación. Por ejemplo, las antiimágenes de $y = 88$ son:

$$88 = 30x - 2x^2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 30x + 88 = 0$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 704}}{4} = \frac{30 \pm 14}{4} = \begin{cases} 11 \\ 4 \end{cases}$$

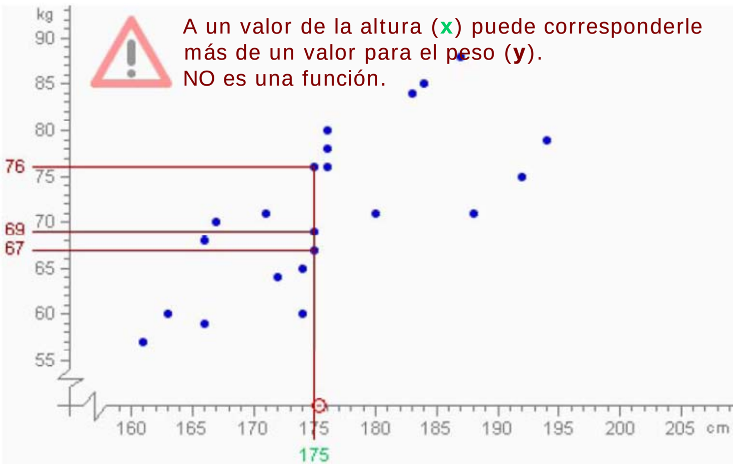
Hay dos antiimágenes de $y = 88$.
Por lo tanto hay dos maneras de conseguir un recinto de 88 hm²

Relaciones que no son funcionales

En una relación funcional un valor de x sólo debe tener, como máximo, **una** imagen. No puede ser que una causa dé dos efectos diferentes.

En cambio, un mismo efecto puede proceder de diversas causas: un valor de y puede tener más de una antiimagen, o no tener ninguna.

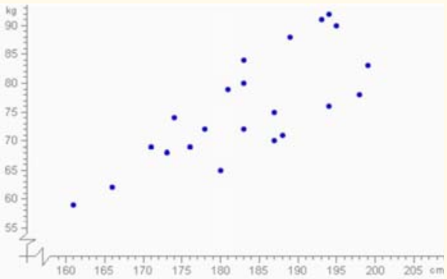
Las relaciones **estadísticas** son situaciones en las que, aunque no se puede predecir exactamente cuál será la imagen de un valor de x (no son, por lo tanto, relaciones funcionales), sí que se puede dar una estimación de este valor.



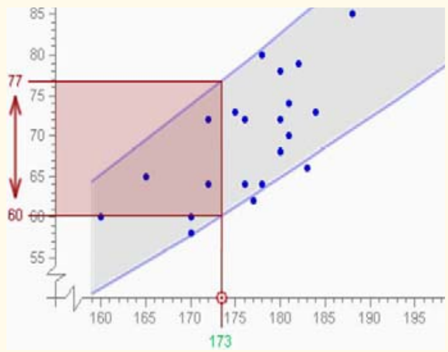
PESO Y ALTURA

El **peso** de una persona, ¿es **función** de su **altura**?

Se pregunta la altura (**x**) y el peso (**y**) a los individuos de una población, y se representan gráficamente.



No es una relación **funcional**, dada la altura de una persona no se puede predecir su altura exactamente. Hay una relación **estadística**, dada una altura determinada se puede esperar que el peso estará en un cierto **intervalo**.

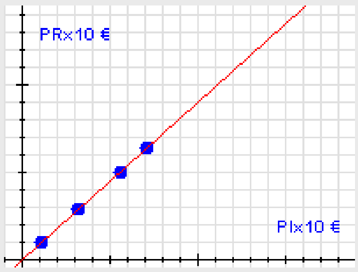


EJERCICIOS resueltos

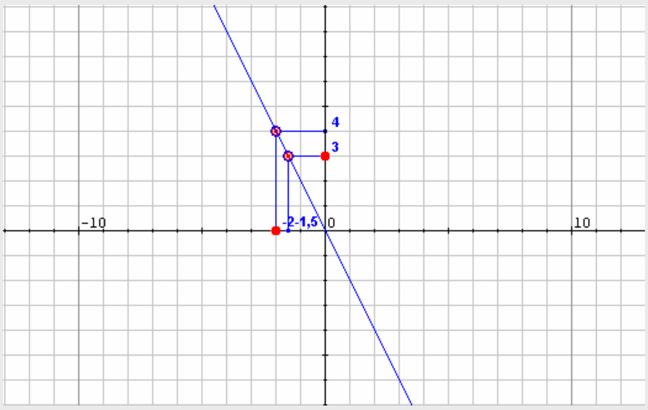
6. Las rebajas: si en un producto nos ofrecen un descuento del 10% pagaremos el 90% del precio original. Entonces, el precio rebajado (PR) es función del precio inicial (PI) a través de la expresión PR = f(PI) = 0,9·PI. Construye una tabla de valores para esta función (por ejemplo con cuatro valores) y dibuja la gráfica correspondiente

Elegimos cuatro valores arbitrarios para el precio inicial, los sustituimos en la expresión anterior y obtenemos la tabla:

PI	11	32	56	71
PR	9,9	28,8	50,4	63,9



7. Con ayuda de la gráfica adjunta calcula las imágenes y antiimágenes pedidas.



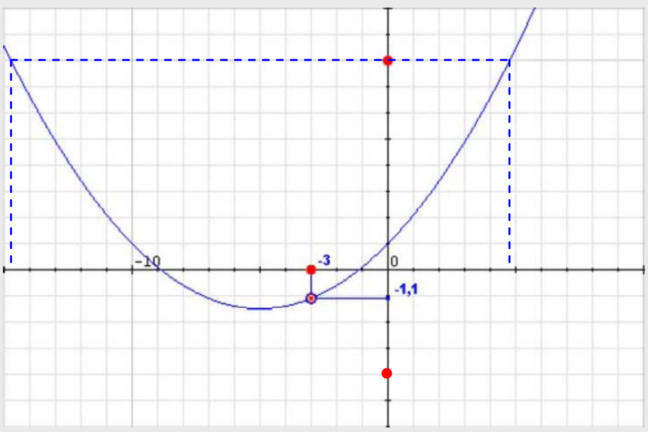
a) La imagen de -3,
la antiimagen de 3.

La imagen de -3 es 4

f(-3)=4

La antiimagen de 3 es -1,5

f(-1,5)=3



b) La imagen de -3,
la antiimagen de 8 y de -4

La imagen de -3 es -1,1

f(-3)=4

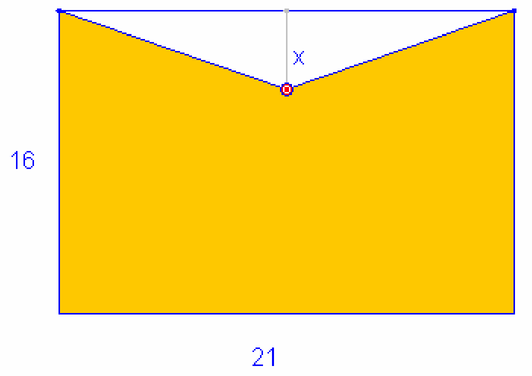
En este caso 8 tiene dos antiimágenes 4,7 y -14,7

f(4,7)=8 **f(-14,7)=8**

En cambio **-4** no tiene ninguna antiimagen, ningún valor de x permite a la función alcanzar el valor -4.

EJERCICIOS resueltos

8. Escribe en función de x el área de la parte coloreada de la figura



El área del rectángulo completo es Base x Altura, o sea: $21 \cdot 16 = 336$

El área del triángulo blanco es $\frac{\text{Base x Altura}}{2}$ o sea: $\frac{21 \cdot x}{2}$

Entonces, el área de la zona sombreada es $\mathbf{A(x) = 336 - \frac{21 \cdot x}{2}}$

9. Indica de forma razonada si las respuestas a las siguientes preguntas es afirmativa o negativa.

a) ¿El coste de la factura del agua es función del volumen consumido?

Si, porque consumos iguales producen costes iguales.

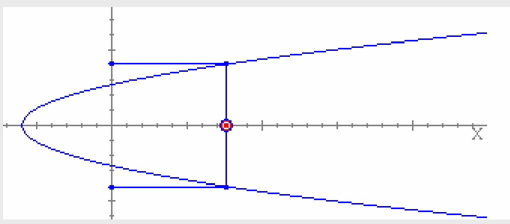
b) ¿El número de accidentes de tráfico es función del número de vehículos que circulan?

No, no se puede saber a priori cuántos accidentes se producen con un número determinado de coches circulando.

c) A presión constante, ¿el volumen de un gas es función de su temperatura?.

Si, según la Física en las mismas condiciones de presión a iguales temperaturas los volúmenes son iguales.

10. ¿La gráfica de la imagen corresponde a una función?

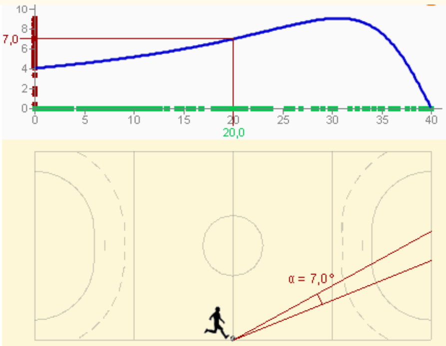


SOLUCIÓN: No, porque a un valor de x pueden corresponder dos valores de y.

JUGADOR DE FÚTBOL SALA

Un jugador de fútbol-sala avanza con el balón pegado a la banda del campo de juego hacia la portería contraria.

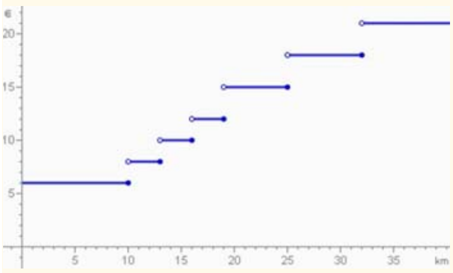
El ángulo bajo el que ve la portería, es función de la distancia que hay desde la línea de fondo de su campo.



TAXÍMETRO

El **precio** de un trayecto en taxi realizado en cierta zona rural es **función** de la **distancia** recorrida.

El gráfico muestra las tarifas.



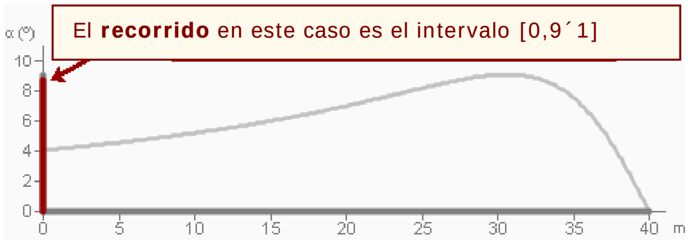
- ¿Cuánto cuesta la bajada de bandera? **6 €**
- ¿Cuántos km se pueden recorrer por ese importe? **10 km**
- ¿Cuánto cuesta un recorrido de 15 km? **10€**

2. Características de una función

Dominio y recorrido

- El **dominio** de una función es el conjunto de valores de ***x*** que tienen imagen.

- El **recorrido** o **imagen** es el conjunto de valores de ***y*** que son imagen de algún valor de ***x*** perteneciente al dominio.

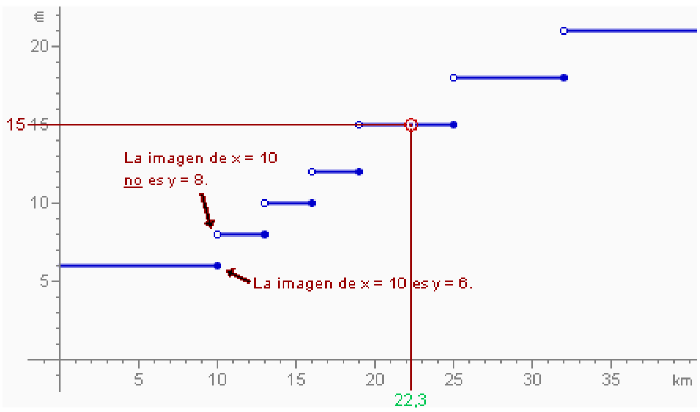


Continuidad

A veces, la gráfica de una función puede dar un salto en vertical en algún punto de su dominio. En ese punto se dice que la función no es **continua**.

Por lo tanto, una función es continua si su gráfica puede dibujarse sin necesidad de levantar el lápiz del papel en ningún momento.

Los puntos donde la gráfica da un salto se denominan **discontinuidades** de la función.



✓ Si se recorre un poco más de 10 km, aunque sea muy poco, el precio cambia a 8 €, y se mantiene hasta los 13 km, a partir de los cuales pasa a ser 10€ hasta los 16 km... No es una función continua, presenta discontinuidades en x=10, x=13, x=16, x=19, x=25, etc

Puntos de corte con los ejes

El punto donde la gráfica corta el eje de **ordenadas** es de la forma $(0,y_0)$, donde y_0 es la imagen de cero. Si el cero está en el dominio de la función, entonces hay punto de corte con el eje de ordenadas y éste es único.

> Para encontrar y_0 se sustituye x por cero en la expresión de la función y se calcula y.

El punto (o los puntos) de corte con el eje de **abscisas** son de la forma $(x_0,0)$, donde x_0 es la antiimagen (o antiimágenes) de cero. Habrá punto de corte con el eje de abscisas si el cero está en el recorrido de la función. En ese caso puede suceder que haya más de un punto de corte.

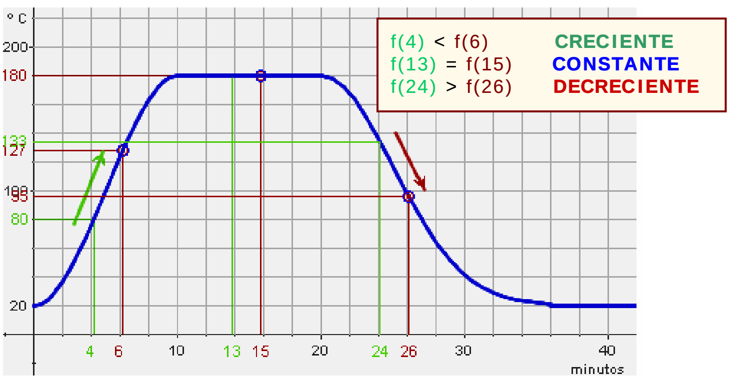
> Para encontrar x_0 se sustituye y por cero en la expresión de la función y se despeja x.

Crecimiento y decrecimiento

Se dice que una función es **creciente** en un punto si, alrededor de ese punto, cuando la x aumenta también aumenta la y.

Y será **decreciente** si al aumentar la x disminuye el valor de y.

Si una función es creciente en un punto entonces, alrededor de él, la gráfica, vista de izquierda a derecha, asciende. Si desciende, es que es decreciente. Si la función toma el mismo valor alrededor de un punto (la gráfica se mantiene sin subir ni bajar), entonces se dice que allí la función es **constante**.

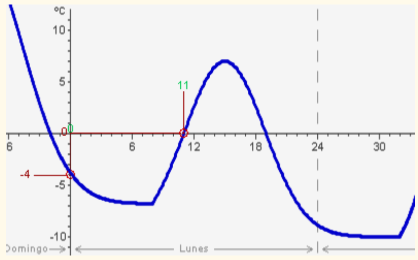


Una función puede ser creciente en un conjunto de puntos de su dominio y decreciente en otros. Si sólo crece o sólo decrece entonces se denomina función **monótona**.

TEMPERATURA

Estos días han sido fríos en la ciudad.

El gráfico muestra la temperatura en función de la hora del día, partiendo de la medianoche del domingo al lunes.

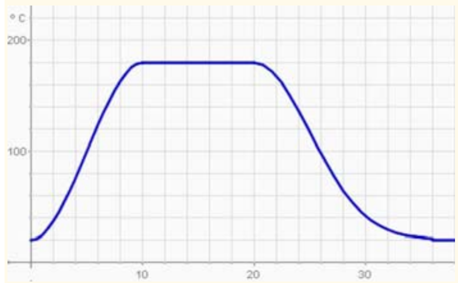


- **f(0) = -4**°C
- ¿A qué horas del lunes la temperatura era **0**°C?: a las **11** y a las **19** horas
- ¿Entre qué horas del lunes la temperatura estuvo bajo cero (función **negativa**)?: De las **0**h a las **11**h y de las **19**h a las **24**h
- ¿Entre qué horas la función es **positiva**?: Entre las **11**h y las **19**h.

TEMPERATURA DE UN HORNO

Para cocinar una magdalenas hay que calentarlas al horno a una temperatura de 180º durante 10 minutos

El gráfico muestra la **temperatura** del horno en **función** del **tiempo** transcurrido



- Los primeros 10 minutos, desde que se enciende el horno, la temperatura asciende desde 20º a 180º.
- Desde el minuto 10 al 20 se mantiene constante a 180º.
- El horno se apaga, la temperatura desciende hasta igualarse a la del ambiente.

VELOCIDAD DEL VIENTO

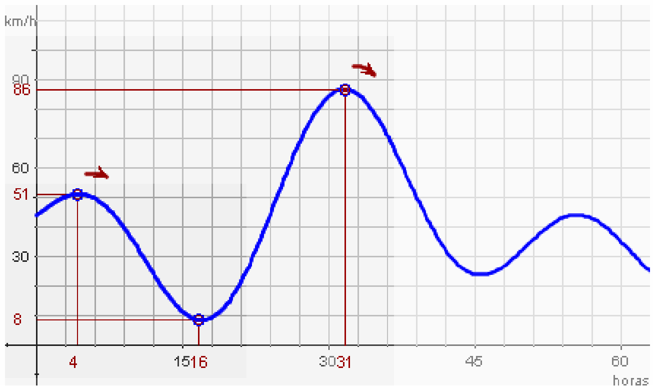
Para decidir la situación de un parque eólico se estudia la velocidad del viento.

Se ha obtenido la gráfica adjunta a lo largo de 62 horas.

Máximos y mínimos

Un **máximo local** (o relativo) es un punto donde la función pasa de ser creciente a decreciente. Ese punto no tiene por qué ser el punto más alto de la gráfica de la función. Este último (si es que existe) se denomina **máximo absoluto**.

De manera similar, en un punto donde la función pasa de decrecer a crecer se dice que hay un **mínimo local**. El punto del dominio donde la imagen es menor se denomina **mínimo absoluto**.



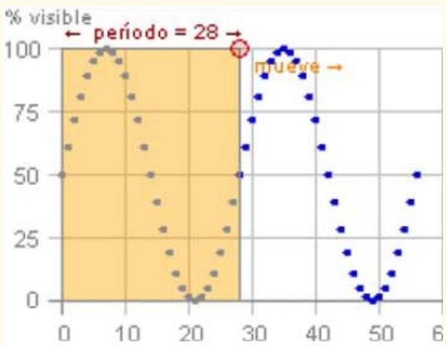
Tenemos un máximo relativo en t=4, un mínimo absoluto en t=16, un máximo absoluto en t=31 y hay otro máximo y otro mínimo relativo.

Una función puede tener más de un máximo o de un mínimo locales.

FASES DE LA LUNA

El % visible de la luna varía en función del día, desde el 0% (luna nueva) hasta el 100% (luna llena).

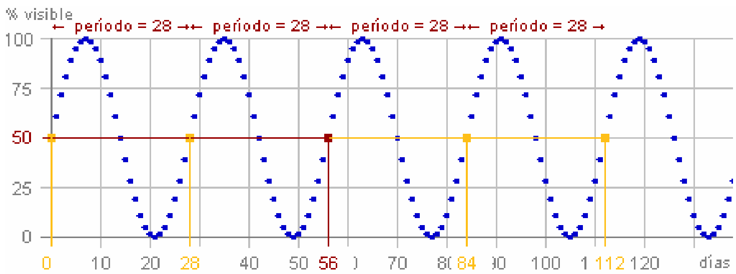
El % visible se repite cada 28 días



Periodicidad

A veces la gráfica de una función va repitiendo el mismo dibujo una y otra vez a medida que la ***x*** va aumentando. En este caso se dice que la función es **periódica**.

La longitud, medida sobre el eje horizontal, del dibujo que se va repitiendo se denomina **período**: cada vez que a un valor cualquiera de ***x*** se le suma el período se vuelve a obtener la misma imagen.



Hay infinitos valores que tienen la misma imagen, separados por una distancia de **28 días** (que es el periodo T)

f(3) = f(3+28) = f(3+2·28) = ...

f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = ...

EJERCICIOS resueltos

11. Determina de forma razonada el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x+8}$

SOLUCIÓN:

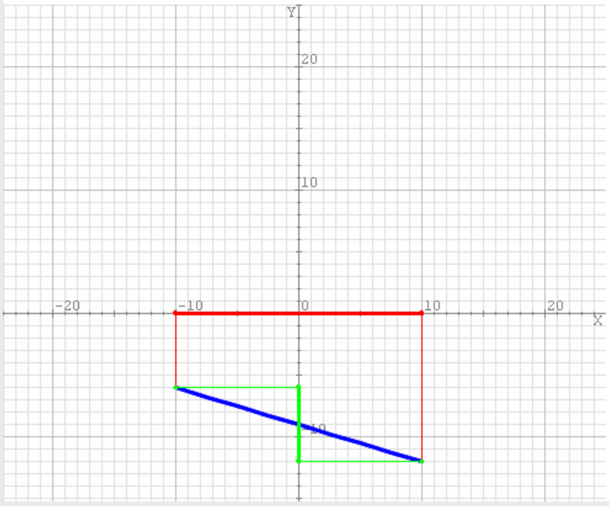
El dominio de una función está formado por todos los posibles valores de x a los que se les puedan aplicar las operaciones indicadas en la expresión anterior produciendo un resultado válido. En este caso aparece una raíz cuadrada que sólo puede calcularse si el radicando es mayor o igual que cero, así pues debe ser

$$\mathbf{X + 8 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -8}$$

Luego el dominio de la función lo constituyen todos los números mayores o iguales que –8.

12. Determina el dominio y el recorrido de la gráfica azul de la imagen.

Determina el dominio y el recorrido de la función cuya gráfica ves abajo.



Dominio de f:

$[-10\ ,\ 10] = \{x:\ -10 \leq x \leq 10\}$

Recorrido de f:

$[-12\ ,\ -6] =$

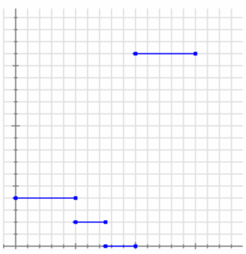
$= \{x:\ -12 \leq x \leq -6\}$

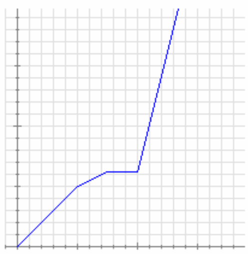
13. Indica si son continuas o discontinuas

Juan tiene hoy una excursión en el colegio. Como vive lejos suele ir en bicicleta. Nada más llegar al colegio, salen todos los alumnos andando hasta la estación de trenes y allí esperan un rato a que llegue el tren. Suben al tren y por fin llegan al destino.

Abajo puedes ver dos gráficas: una representa la distancia que va recorriendo Juan desde su casa con respecto al tiempo transcurrido y otra representa la velocidad a la que se desplaza en cada instante, también en función del tiempo transcurrido.

Indica de forma razonada qué gráfica corresponde a cada una de las dos situaciones e indica en cada caso si la función representada es o no continua.





La primera gráfica es la que indica las velocidades:

Empieza con la bicicleta a velocidad constante, luego va andando algo más despacio. A continuación está parado un rato y, por último, al montar en el tren la velocidad es mucho mayor pero constante.

Es discontinua y los saltos se producen al cambiar el medio de locomoción.

La otra gráfica corresponde a la distancia a la que se encuentra de casa. En este caso no hay saltos (es continua) pero sí cambios bruscos en la inclinación que se corresponden con los cambios de velocidad.

EJERCICIOS resueltos

9. Calcula los puntos de corte con los ejes de la función f(x)=2-x

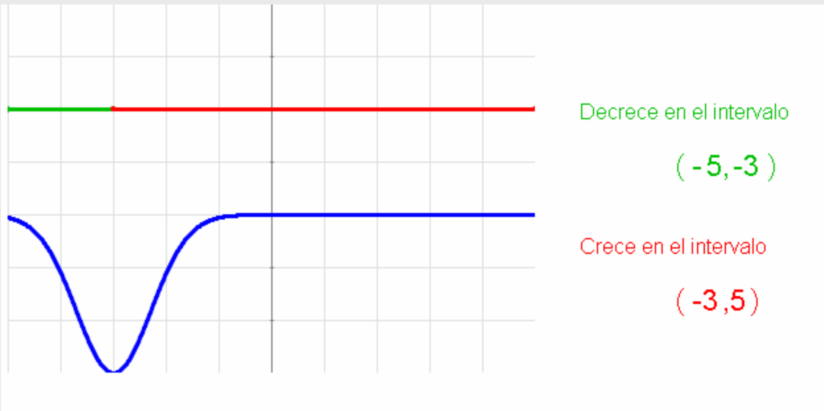
SOLUCIÓN:

El corte con el eje Y se calcula sustituyendo x por 0: f(0) = 2 – 0 = 2. Corta en (0,2)

Los cortes con el eje X se calculan resolviendo la ecuación f(x) = 0:

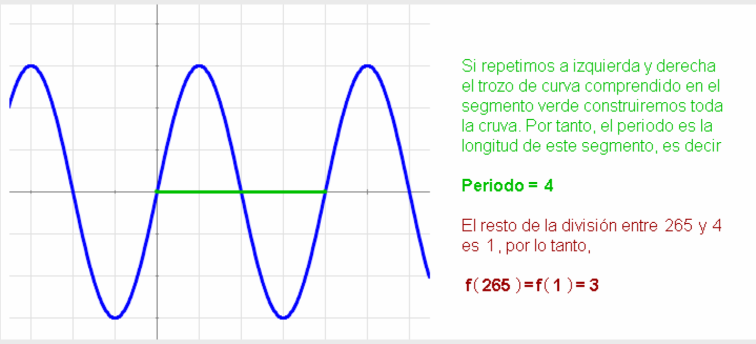
2 – x = 0, de donde x = 2. Corta en (2,0)

10. La función azul de la imagen está definida en el intervalo (-5,5). Determina sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.



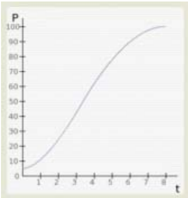
11. La función azul de la imagen está definida en el intervalo (-5,5). Determina sus máximos y mínimos relativos.

12. La función adjunta es periódica. Calcula su periodo y el valor de la función cuando x sea igual a 265.



Para practicar

1. Observando la evolución de un cultivo de bacterias llamamos P al número de millones de bacterias y T al tiempo transcurrido en horas. ¿Qué representa la gráfica adjunta: P en función de T o T en función de P?

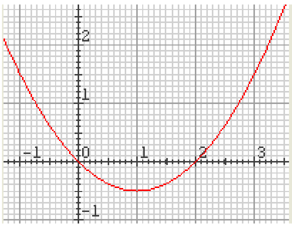


2. Una empresa fabrica y comercializa un producto. La cantidad producida se representa por x y el coste de producción con C ¿Qué representa la función h(x)=C: el coste en función de la cantidad o viceversa?

3. Dada la función $y = f(x) = 2x - 1$ completa la tabla de valores adjunta y represéntala en una cuadrícula:

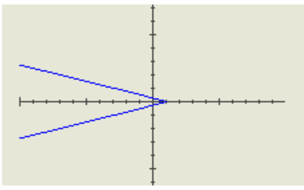
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

4. Calcula la imagen -0,5 y las posibles anti-imágenes de 1,5 por la función cuya gráfica puedes ver abajo.

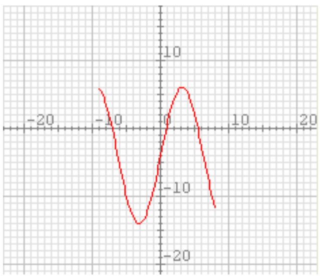


5. Dada la función $f(x) = 3x + 2$ calcula la imagen de 0,2 y la anti-imagen de 2,2.

6. Determina de forma razonada si la gráfica adjunta corresponde o no a la gráfica de una función.



7. Determina el dominio y el recorrido de la función de la gráfica adjunta.



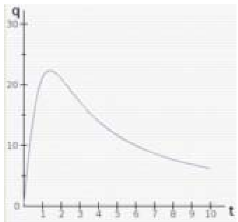
8. La tabla adjunta muestra un extracto de recibo de agua en la que se muestra el precio unitario del metro cúbico de agua consumida en función del agua consumida. Indica de forma razonada si se trata de una función continua o discontinua y traza su gráfica.

Consumo de agua (m^3)	Precio unitario (€)
De 0 a 15 m^3	0
De 15 a 30 m^3	0,45
De 30 a 45 m^3	0,50
De 45 a 60 m^3	0,55
Más de 60 m^3	0,60

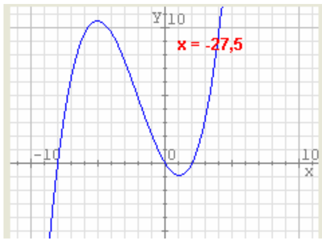
9. La función $F = 1{,}8\cdot C+32$ establece la relación entre la temperatura en grados Fahrenheit (F) y la temperatura en grados Celsius C). Calcula la temperatura en grados Fahrenheit a la que se congela el agua. Luego calcula a qué temperatura Celsius equivalen 0º F.

10. Calcula las coordenadas de los puntos de corte con los ejes de la función $y = x + 4$.

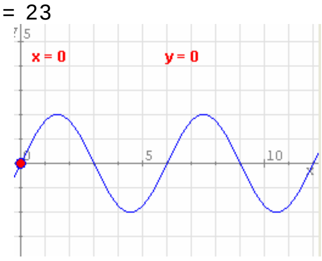
11. La gráfica representa la concentración (q en ml) en sangre de un medicamento inyectado a un paciente en función del tiempo (t en horas). Haz un informe que describa la situación en términos de crecimiento de la función.



12. Determina los máximos y mínimos relativos de la función cuya gráfica se muestra abajo.



13. Determina el periodo de la función de la imagen y calcula el valor aproximado de dicha función cuando x = 23

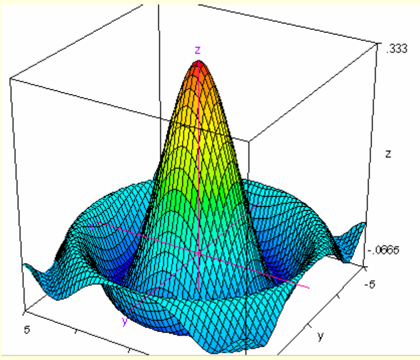


Para saber más

Funciones de varias variables

En este tema hemos trabajado con funciones que relacionaban a dos magnitudes: una variable independiente y una variable dependiente.

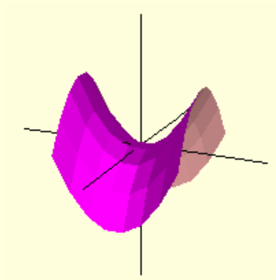
Sin embargo, a veces aparecen más de una variable independiente y, entonces, hablamos de funciones de varias variables.



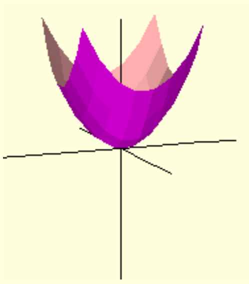
Si tenemos dos variables independientes no podemos representar la función en un plano; necesitamos tres ejes perpendiculares: los dos horizontales para las variables independientes y el vertical para la variable dependiente. La función viene representada entonces por una superficie en lugar de una curva.

Aquí tienes dos ejemplos:

$z=x^2-y^2$



$z=x^2+y^2$



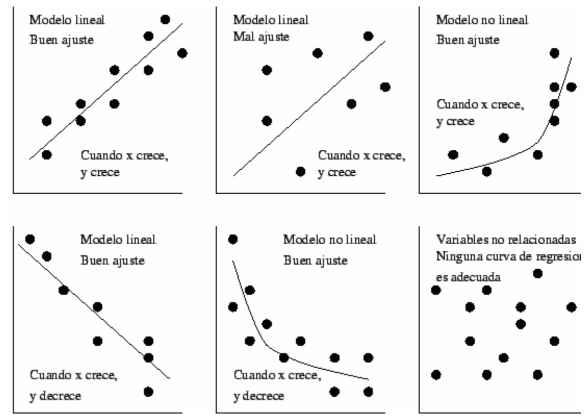
Ajuste funcional

Cuando un investigador analiza si existe una relación funcional entre dos variables, suele obtener un conjunto de datos de forma experimental que representa mediante una ***nube de puntos***.

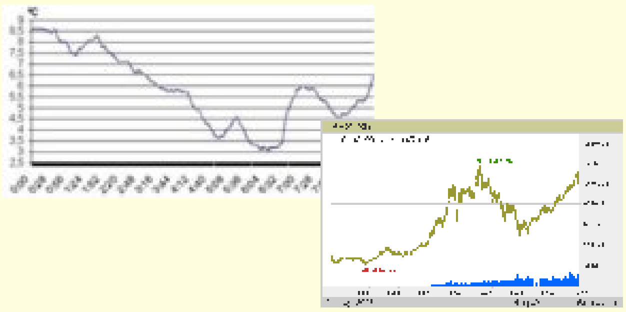
Mediante una técnica denominada ***interpolación*** se puede obtener una expresión algebraica a partir de las coordenadas de esos puntos.

Si la gráfica de la función obtenida se ajusta a esos puntos (aunque no sea de forma exacta) se acepta que existe una relación funcional entre esas variables y se usa la función obtenida para hacer predicciones aproximadas de otros valores que no se han obtenido de forma experimental.

En la imagen adjunta puedes ver algunos de estos tipos de ajustes.



Funciones que no tienen expresión algebraica

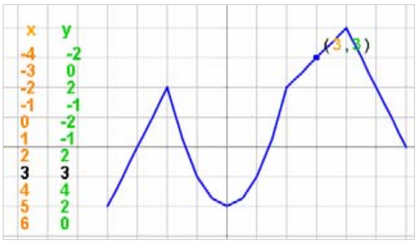


A pesar de lo dicho en el apartado anterior existen funciones que no admiten ningún tipo de expresión algebraica, por lo que es imposible predecir resultados futuros o pasados a partir de cualquier gráfica obtenida de forma experimental. Algunos ejemplos son las temperaturas y los valores de bolsa.

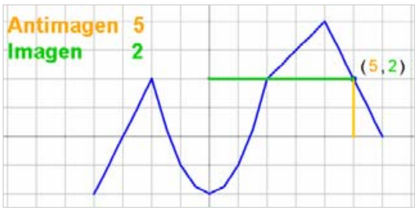
 Funciones y gráficas

Recuerda lo más importante

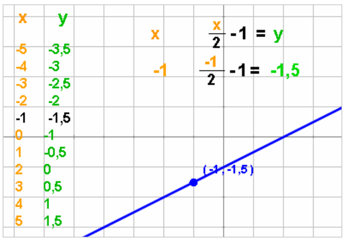
✓ **Tabla y gráfica**



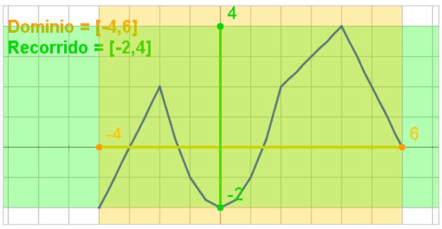
✓ **Imagen y antiimagen**



✓ **Expresión algebraica**

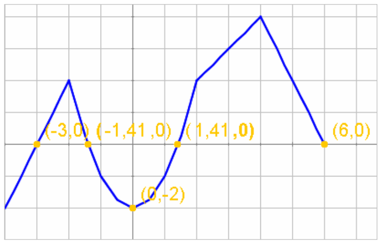


✓ **Dominio y recorrido**

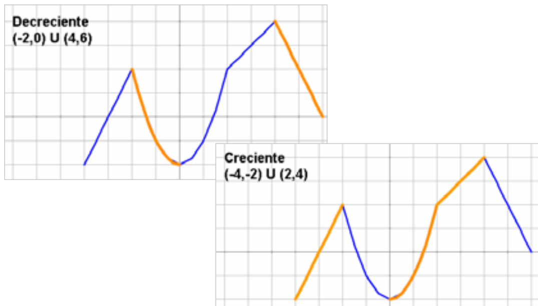


✓ **Continuidad**

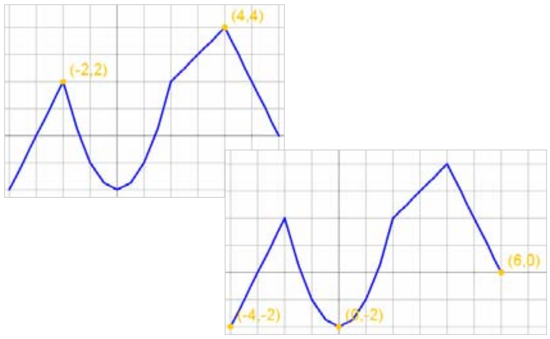
✓ **Cortes con los ejes**



✓ **Crecimiento y decrecimiento**



✓ **Máximos y mínimos**



✓ **Periodicidad**

Importante
Para que una relación sea funcional cada valor de x debe tener sólo una imagen.

cidead

Autoevaluación

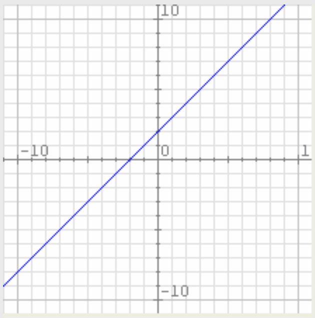
1. Indica cuál de las siguientes expresiones equivale a x=g(y)=4y-2.

   A) g: y → 4y-2   B) g: y → 4x-2

   C) g: x → 4y-2   D) g: x → 4x-2

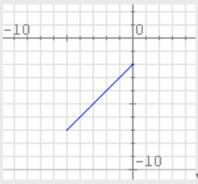
2. Averigua si el punto de coordenadas (-5,-22) pertenece a la gráfica de la función y=4x-2.

3. Calcula la imagen de 4 y la antiimagen de –2 por la función del dibujo.

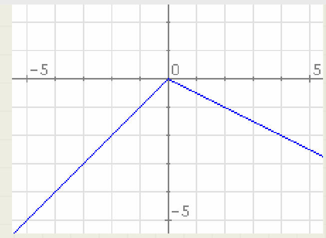


4. Calcula la imagen de 4 y la antiimagen de –2 por la función y = x + 2.

5. Determina el dominio y el recorrido de la función adjunta.

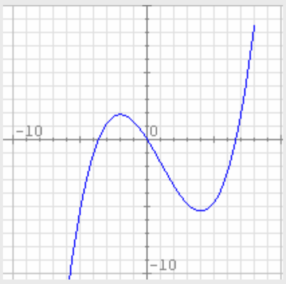


6. ¿Es continua la función de la imagen?

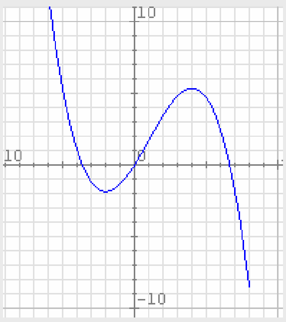


7. Calcula las coordenadas de los puntos de corte de la gráfica de la función y = 4x –2 con los ejes.

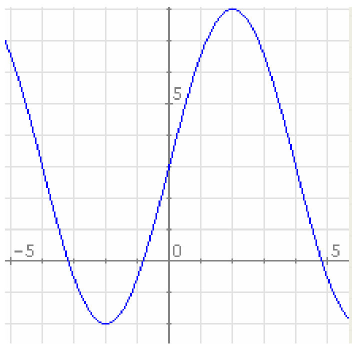
8. Halla el intervalo en el que la función adjunta no crece.



9. Halla los valores en los que la función de la imagen alcanza un mínimo y un máximo relativo.



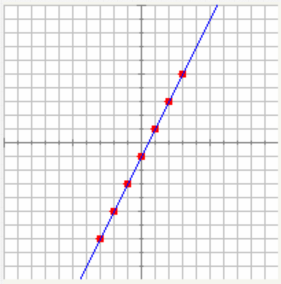
10. Determina el periodo de la función de la imagen.



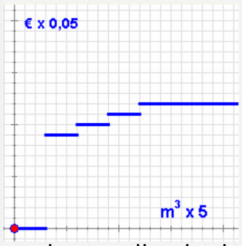
Soluciones de los ejercicios para practicar

1. P es función de T
2. El coste en función de la cantidad
3.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5



4. La imagen de –0,5 es 0,6 y las anti-imágenes de 1,5 son –1 y 3
5. La imagen de 0,2 es 2,6 y la anti-imagen de 2,2 es 0,666
6. No, porque a algunos valores de x le corresponden dos valores de y.
7. Dominio de f es [-9,8] Recorrido de f es [-14.6]
8. Discontinua
9. El agua se congela a 32ºF; 0ºF = -17,8ºC.
10. (0,4) y (-4,0)



11. La concentración aumenta rápidamente en la primera hora y media (función creciente) y a partir de entonces empieza a disminuir cada vez más lentamente (función decreciente)
12. Tiene un máximo en x=-5 y un mínimo en x=1.
13. El periodo es 6 y f(23) vale, aproximadamente, -1,7

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. Respuesta A.
2. Sí pertenece a la gráfica.
3. La imagen de 4 es 6 y la anti-imagen de –2 es –4.
4. Las mismas del ejercicio anterior.
5. Dom f = [-5,0] Im f= [-7,-2]
6. Sí es continua porque puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.
7. (0’5,0) y (0,-2)
8. La función decrece entre –2 y 4.
9. Alcanza un mínimo en x=-2 y un máximo en x=4.
10. El periodo es 8

No olvides enviar las actividades al tutor

10

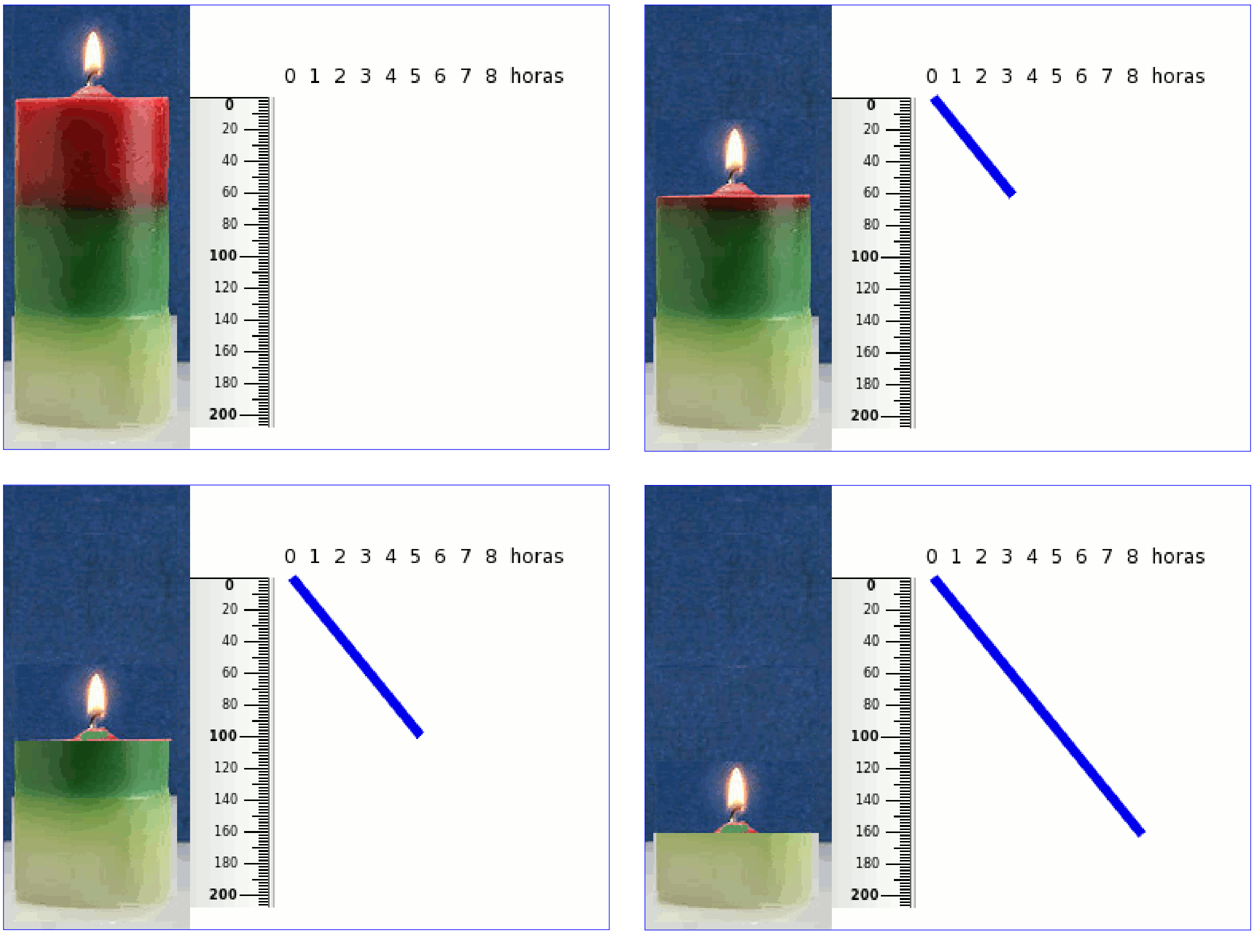
Funciones lineales

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Identificar problemas en los que intervienen magnitudes directamente proporcionales.
- Calcular la función que relaciona a esas magnitudes a partir de diferentes datos y representarla gráficamente.
- Representar estas funciones de diferentes maneras.
- Comparar funciones de este tipo.
- Aproximar números y calcular el error absoluto y relativo.
- Resolver problemas reales en los que intervienen estas funciones.

Antes de empezar



Investiga

Si una sandía pesa 3kg y otra pesa 6kg nos cobrarán el doble por la segunda. Pero, si la primera tiene un diámetro de 15 cm y la otra lo tiene de 30 cm, ¿el precio de la segunda será el doble que el de la primera?

Intenta encontrar la respuesta y dar una explicación razonada a la misma.

1. Función de proporcionalidad directa

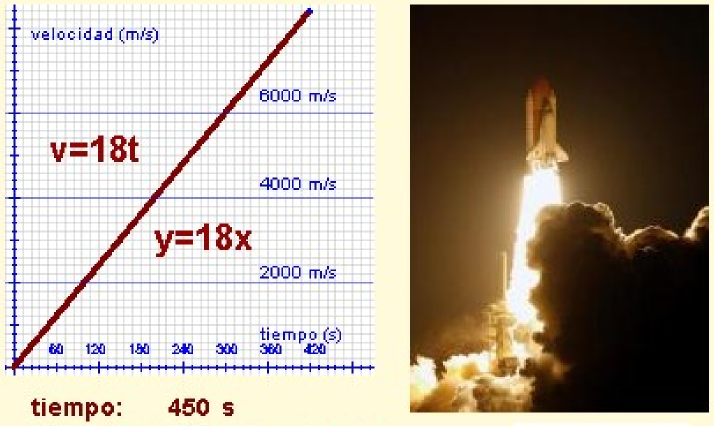
Definición

Se llama **función de proporcionalidad directa** o, simplemente, **función lineal** a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x,y). Su ecuación tiene la forma

$$y = mx \quad ó \quad f(x) = mx$$

El factor m es la constante de proporcionalidad y recibe el nombre de **pendiente** de la función porque, como veremos en la siguiente sección, indica la inclinación de la recta que la representa gráficamente.

Recuerda: dos magnitudes son directamente proporcionales si su cociente es constante.



tiempo: 450 s
velocidad: 18 · 450 = 8100 m/s

Los cohetes propulsores de la lanzadera espacial producen un impulso (o aceleración) de unos 18 metros por segundo cada segundo. Funcionan durante 450 segundos antes de soltarse.
Velocidad y tiempo son, en este caso, magnitudes directamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es la aceleración.

Representación gráfica

Como has visto, las funciones lineales se representan gráficamente como líneas rectas. Además, como y=mx, si x=0 entonces y=0; por lo tanto la gráfica de todas las funciones lineales pasa por el punto (0,0).

Para dibujar la gráfica basta con obtener las coordenadas de otro punto, dando un valor arbitrario a la x e unir ese punto con el origen de coordenadas (0,0).

Si x=1, entonces y=m, por tanto m representa la variación de la y por cada unidad de x, es decir, la inclinación o **pendiente de la recta**. Si m es positiva, representa la cantidad que sube la y por cada unidad de x y si m es negativa la cantidad que baja.

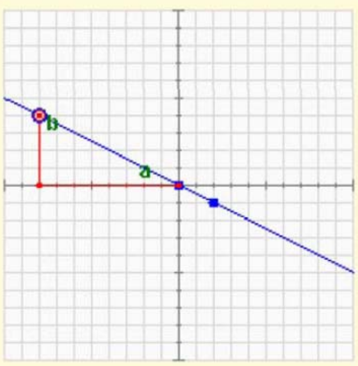
CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $y = -\frac{1}{2}x$

1. Dibujamos el punto (0,0)

$m = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

2. Damos un valor a x.
Para simplificar damos el valor del denominador: $x=2 \Rightarrow y=-1$
y dibujamos el punto (2,-1)

3. Unimos los dos puntos.



Observa que con cualquier punto el cocientre entre las dos variables es constante e igual a m:

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{-8} = -0{,}5 = m$$

EJERCICIOS resueltos

1. Determina si las relaciones entre las parejas de magnitudes siguientes son lineales o no, escribiendo para ello la ecuación que las relaciona.

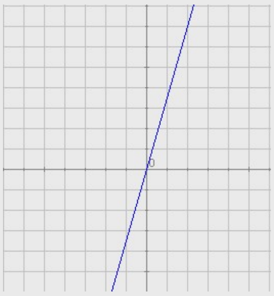
a. Relación entre el precio inicial y el precio rebajado con un 10%.
b. Relación entre el peso y el volumen de un material en condiciones constantes de presión y temperatura.
c. Un banco ofrece un depósito anual al 5% con una comisión fija de 20€. Relación entre la cantidad invertida y los intereses recibidos.
d. Relación entre el área de un cuadrado y la longitud de su lado.

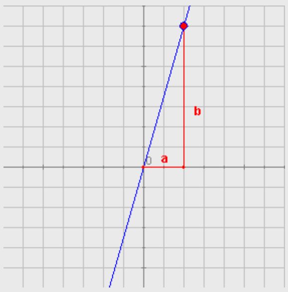
Solución:

a) Si el descuento es 10% pago el 90%: PRebajado = 0'9 · PInicial (SÍ es lineal)
b) La relación entre peso (P) y volumen (V) es la densidad (d), que es constante si no cambian las condiciones de presión y temperatura: P = d·V (SÍ es lineal)
c) Si C es la cantidad invertida e I son los intereses I = 0'05 · C – 20 (NO es lineal, pero casi lo es. En realidad es una función afín que veremos en el siguiente capítulo)
d) A = long^2 (NO es lineal)

2. Determina las ecuaciones de las funciones lineales cuyas gráficas son:

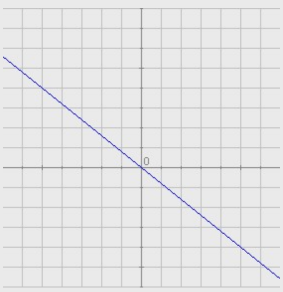
a.

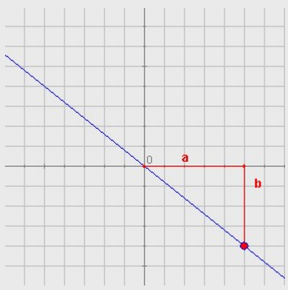




Buscamos un punto de coordenadas enteras (no es estrictamente necesario pero es más cómodo si es posible). a = 2, b = 7. La pendiente es m=7/2 y la ecuación es $y = \frac{7}{2}x$

b.





En este caso a = 5 y b = -4 (le asignamos un valor negativo porque la recta es decreciente). La pendiente es, pues, m = -4/5 y la ecuación $y = -\frac{4}{5}x$

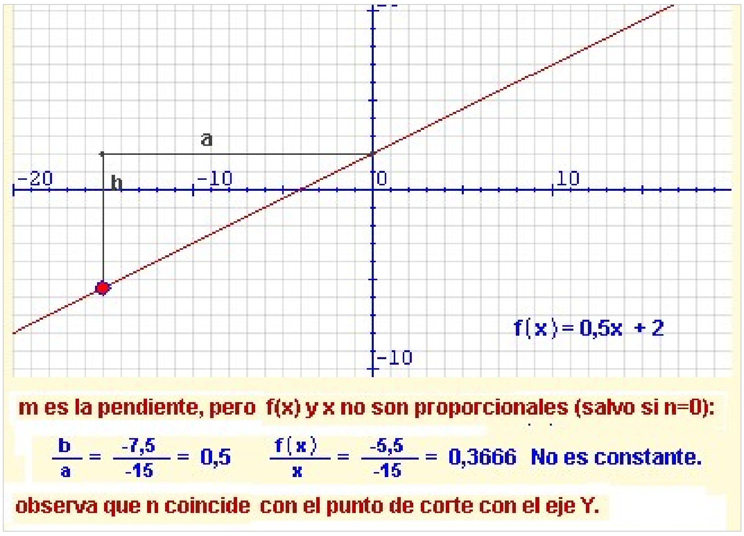
2. Función afín

Definición

Si a dos magnitudes directamente proporcionales se les aplica alguna condición inicial, la función que las liga ya no es totalmente lineal (*las magnitudes ya no son proporcionales*). Se dice que es una **función afín** y su forma es:

$$\mathbf{y = mx + n} \quad \text{ó} \quad \mathbf{f(x) = mx + n}$$

La **pendiente**, m, sigue siendo la constante de proporcionalidad y el término n se denomina **ordenada en el origen** porque es el valor que toma y (ordenada) cuando x vale 0 (abscisa en el origen).



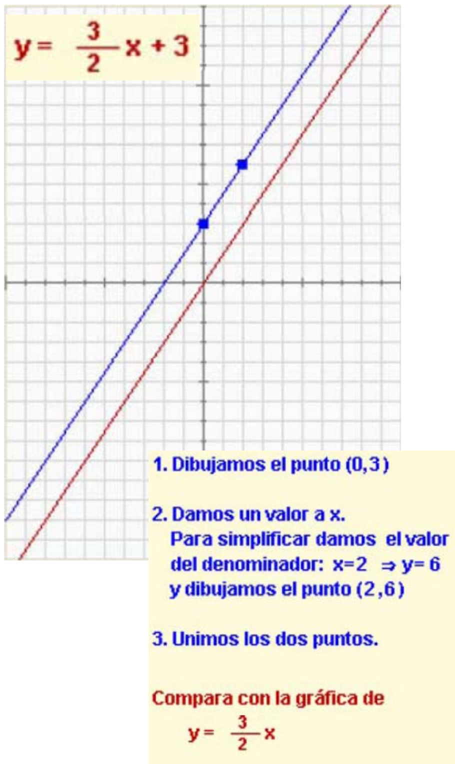
Recuerda: Ahora el cociente entre f(x) y x no es constante.

Representación gráfica

Las funciones afines se representan también mediante líneas rectas, pues el término independiente que las diferencia de las funciones de proporcionalidad solo produce una traslación hacia arriba o hacia abajo de la gráfica de éstas.

Para dibujar la gráfica necesitamos obtener dos puntos.

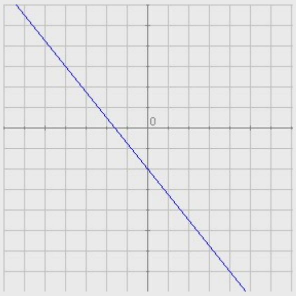
- Uno nos lo proporciona la propia ecuación, pues, como hemos visto, la **ordenada en el origen**, n, nos indica que la recta pasa por el punto **(0,n)**.
- El otro punto se obtiene dando un valor cualquiera a x y obteniendo el correspondiente valor de y. Uniendo los dos puntos tenemos la gráfica de la función.

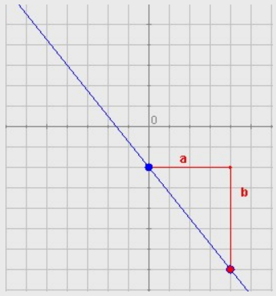


EJERCICIOS resueltos

3. Determina las ecuaciones de las funciones afines cuyas gráficas son:

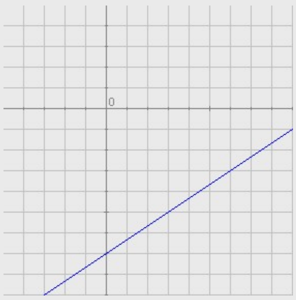
a.

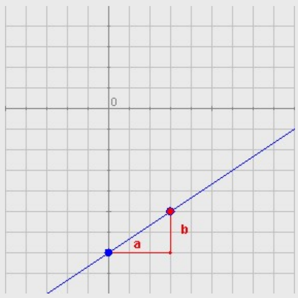




Corta al eje Y en el punto (0,-2), luego n=-2. Ahora buscamos otro punto de coordenadas enteras si es posible (4,-7) y calculamos sus distancias horizontal y vertical al punto (0,-2): a = 4, b = -5 (Recuerda: negativo por ser una recta decreciente). La pendiente es m=-5/4 y la ecuación es $y = -\frac{5}{4}x - 2$

b.

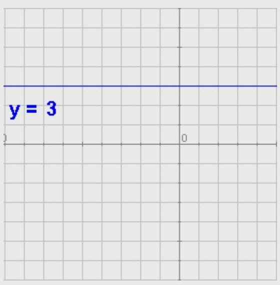


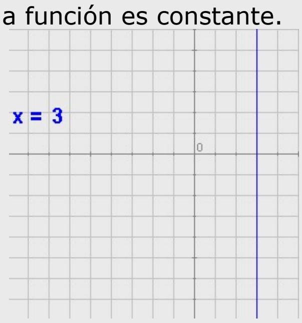


En este caso n=-7, a=3 y b=2. La pendiente es, pues, m = 2/3 y la ecuación $y = \frac{2}{3}x - 7$

4. Casos particulares:

a. Si la pendiente es cero, la ecuación es y = n y la función es constante.





b. Si la recta es vertical la ecuación es **x = k** y **no es una función**. Decimos que en este caso **la pendiente es infinita**.

3. Ecuación de la recta

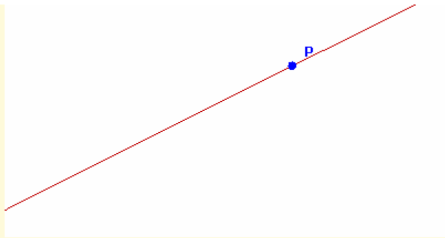
Forma punto-pendiente

La ecuación **y = mx + n** que hemos visto se denomina **forma explícita** de la ecuación de la recta, y nos permite hallar dicha ecuación cuando conocemos la pendiente y la ordenada en el origen.

Cuando sólo conocemos la pendiente, m, y las coordenadas de otro de los puntos de la recta, (x_o,y_o), su ecuación es

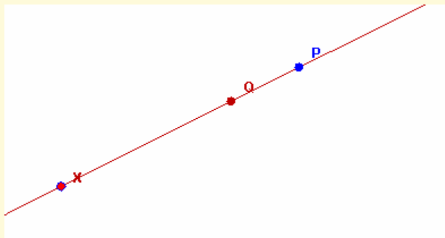
$$\mathbf{y - y_o = m\ (x - x_o)}$$

Esta ecuación recibe el nombre de **forma punto-pendiente** de la ecuación de la recta. En la secuencia siguiente se explica cómo se obtiene.



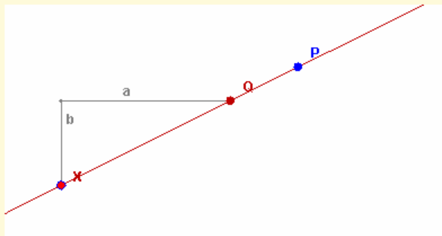
De la recta de la imagen se conocen su pendiente y las coordenadas de uno de los puntos por los que pasa. Queremos determinar su ecuación:

$m = \frac{1}{2}$ P = (6,5)



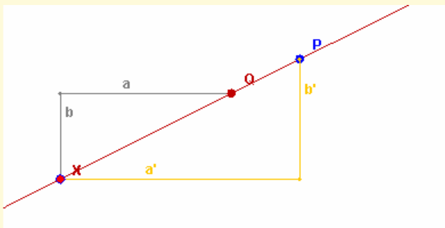
Consideremos un punto arbitrario de la recta, X y supongamos que conocemos la ordenada en el origen Q:

$m = \frac{1}{2}$ P = (6,5) X = (x,y) Q = (0,n)



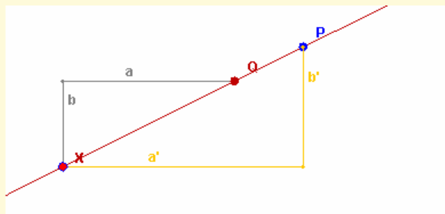
En los apartados anteriores hemos visto que aunque movamos X, el cociente entre b y a es constante e igual a la pendiente:

$m = \frac{1}{2}$ P = (6,5) X = (x,y) Q = (0,n) $\frac{b}{a} = m = \frac{1}{2}$



Observa los triángulos de la figura: tienen los lados paralelos, luego son semejantes, por tanto:

$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} = m = \frac{1}{2}$



P = (6,5) X = (x,y)

b' es la distancia vertical entre P y X: $b' = y - 5$

a' es la distancia horizontal entre P y X: $a' = x - 6$

luego $\frac{b'}{a'} = \frac{y-5}{x-6} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2} \cdot (x - 6)$

EJERCICIOS resueltos

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por P (-8,-5) y de pendiente m = 2/7

La ecuación en forma punto-pendiente:

$$y + 5 = \frac{2}{7}\ (x + 8\ )$$

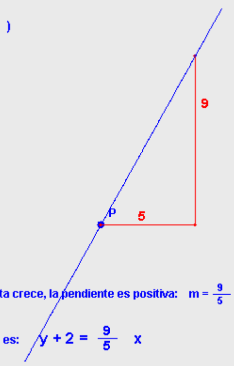
En forma explícita:

$$y + 5 = \frac{2}{7}\ x + \frac{16}{7}$$

$$y = \frac{2}{7}\ x - \frac{19}{7}$$

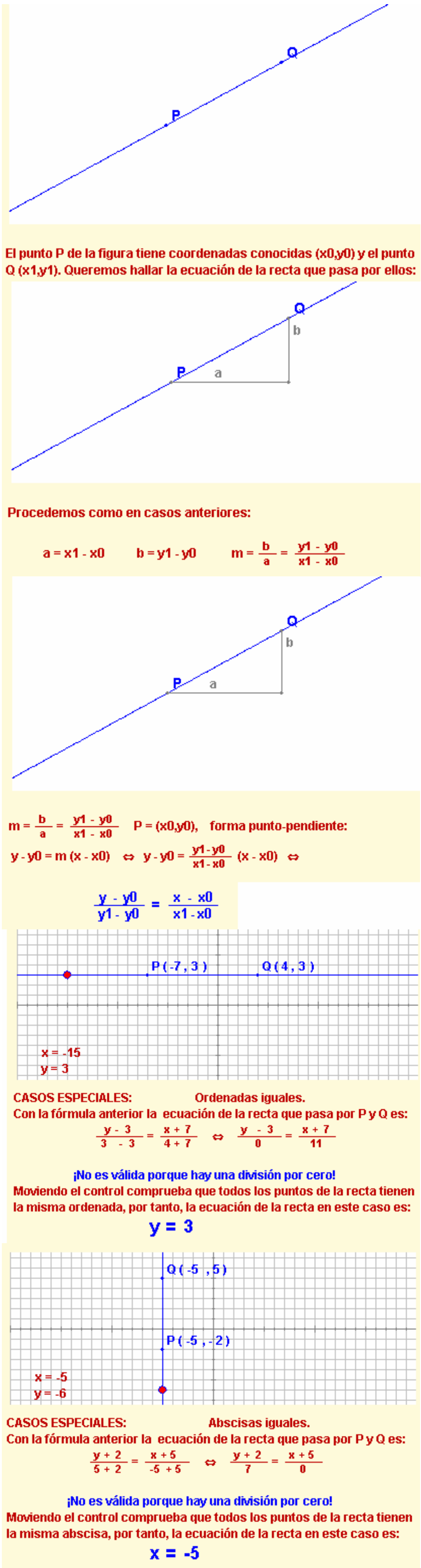
6. Determina la ecuación de esta recta:

P (0 , -2)



Como la recta crece, la pendiente es positiva: $m = \frac{9}{5}$

La ecuación es: $y + 2 = \frac{9}{5}\ x$



Recta que pasa por dos puntos

Sean $P(x_o,y_o)$ y $Q(x_1,y_1)$ dos puntos del plano. La ecuación de la recta que pasa por estos puntos es

$$\frac{y-y_o}{y_1-y_o}=\frac{x-x_o}{x_1-x_o}$$

Esta ecuación recibe el nombre de **forma continua** de la ecuación de la recta. En la secuencia adjunta se explica cómo se obtiene.

EJERCICIOS resueltos

7. Halla la ecuación de la recta que pasa por P (5,-9) y Q(6,8). Pasa a forma explícita y determina la pendiente y la ordenada en el origen.

La ecuación buscada es: $\frac{y-(-9)}{8-(-9)} = \frac{x-5}{6-5}$

$$\frac{y+9}{17} = x-5$$

La forma explícita se obtiene despejando y:
$y = 17\ (x-5)\ -9 =$

$= 17x - 85 - 9 = 17x - 94$

$$y = 17x - 94$$

La pendiente es 17
la ordenada en el origen -94

8. Halla la ecuación de la recta que pasa por P (7,4) y Q(-3,-1). Pasa a forma explícita y determina la pendiente y la ordenada en el origen.

La ecuación buscada es: $\frac{y-4}{-1-4} = \frac{x-7}{-3-7}$

$$\frac{y-4}{-5} = \frac{x-7}{-10}$$

La forma explícita se obtiene despejando y:
$y = -5\ \frac{x-7}{-10} + 4 = \frac{1}{2}(x-7)+4 =$

$= \frac{x-7}{2} + 4 = \frac{x-7+8}{2} = \frac{x+1}{2}$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

La pendiente es $\frac{1}{2}$

la ordenada en el origen $\frac{1}{2}$

Forma general o implícita

La manera más habitual de representar rectas es la **forma general** o **implícita**:

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son números cualesquiera (al menos A ó B deben ser diferentes de cero). Si B=0 se trata de una recta vertical de ecuación x=-C/A. Si B no es cero la pendiente es -A/B.

En las escenas se muestran representaciones de rectas en forma general y el paso de otras formas a general.

PASO DE CUALQUIER FORMA A FORMA GENERAL:

a) Función lineal en forma explícita:

$y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0 \quad (A = m, B = -1, C = 0) \qquad m = -\frac{A}{B}$

b) Función afín en forma explícita:

$y = mx + n \Leftrightarrow mx - y + n = 0 \quad (A = m, B = -1, C = n) \qquad m = -\frac{A}{B}$

c) Función constante (paralela al eje X):

$y = n \Leftrightarrow y - n = 0 \; (A = 0, B = 1, C = -n) \qquad m = -\frac{A}{B} = 0$

d) Recta vertical:

$x = n \Leftrightarrow x - n = 0 \; (A = 1, B = 0, C = -n)$ No se puede hallar m.

e) Forma punto pendiente:

$y - y0 = m(x - x0) \Leftrightarrow mx - y + y0 - mx0 = 0 \qquad m = -\frac{A}{B}$

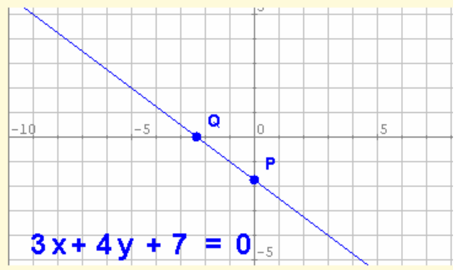
$(A = m, B = -1, C = y0 - mx0)$

f) Forma continua:

$\frac{y - y0}{y1 - y0} = \frac{x - x0}{x1 - x0} \Leftrightarrow (y1 - y0)(x - x0) = (x1 - x0)(y - y0) \Leftrightarrow$

$(y1-y0)\,x - (x1-x0)\,y + y0\,(x1-x0) - x0(y1-y0) = 0$

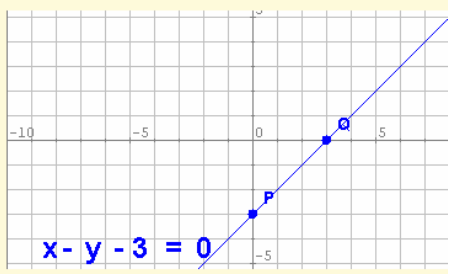
$(A = y1-y0,\; B = -(x1-x0),\; C = y0\,(x1-x0) - x0(y1-y0)) \qquad m = -\frac{A}{B}$



REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN FORMA GENERAL:
Obtenemos dos puntos dando valores a una de las variables.
Lo más sencillo es dar a las variables el valor 0:

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{4} \qquad P = \left(0, -\frac{7}{4}\right)$

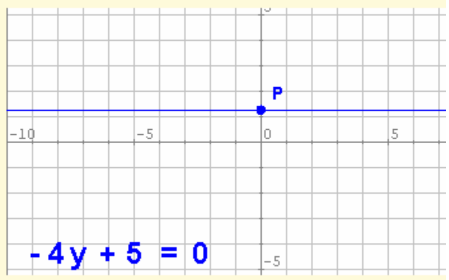
$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{3} \qquad Q = \left(-\frac{7}{3}, 0\right)$



REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN FORMA GENERAL:
Obtenemos dos puntos dando valores a una de las variables.
Lo más sencillo es dar a las variables el valor 0:

$x = 0 \Rightarrow y = -3 \qquad P = (0, -3)$

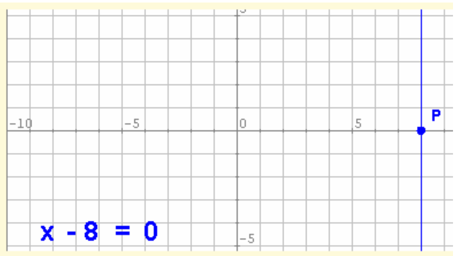
$y = 0 \Rightarrow x = 3 \qquad Q = (3, 0)$



REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN FORMA GENERAL:

Como ya sabemos, en este caso es una recta horizontal.
La ordenada en el origen nos dice a qué altura pasa:

$y = \frac{5}{4} \qquad P = \left(0, \frac{5}{4}\right)$



REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN FORMA GENERAL:

Como ya sabemos, en este caso es una recta vertical.
El valor de x nos indica por dónde pasa:

$x = 8 \qquad P = (8, 0)$

EJERCICIOS resueltos

9. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,-7) y cuya pendiente es –2/3. Después pasa a forma general.

Solución: En forma punto pendiente la ecuación es $y + 7 = -\frac{2}{3}(x - 1)$.

Quitando denominadores y paréntesis queda **3y + 21 = -2x + 2**. Pasando todo al primer miembro queda **2x + 3y + 19 = 0**. También sería válido el resultado con todos los signos cambiados: **-2x - 3y - 19 = 0**

10. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (-4,-2) y de pendiente 0. Después pasa a forma general.

Solución: La ecuación en la forma punto pendiente ya es la ecuación general: **y + 2 = 0**

11. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(2,-2) y Q(-8,3). Luego pasa a forma general.

Solución: En forma continua la ecuación es $\frac{y+2}{3+2} = \frac{x-2}{-8-2}$.
Quitando denominadores queda: **-10y – 20 = 5x – 10**.
Pasando todo al primer miembro: **-5x – 10y – 10 = 0**. Así bastaría, pero como todos los términos son múltiplos de 5 podemos simplificar: **-x – 2y – 2 = 0**. También es válido cambiar todos los términos de signo: **x + 2y + 2 = 0**.

12. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(5,-2) y Q(3,-2). Luego pasa a forma general.

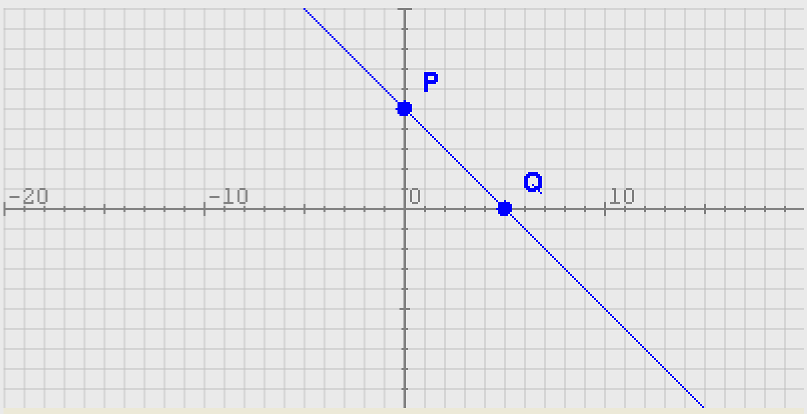
Solución: Como los puntos P y Q tienen igual ordenada, se trata de la recta horizontal **y = -2**, o en forma general: **y + 2 = 0**.

13. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(6,5) y Q(6,-2). Luego pasa a forma general.

Solución: Como los puntos P y Q tienen igual abscisa, se trata de la recta vertical **x = 6**. En forma general queda **x – 6 = 0**.

14. Representa gráficamente la recta cuya ecuación general es **x + y – 5 = 0**.

Solución: Despejamos la y para obtener la forma explícita: y = - x + 5. Por tanto, la pendiente es –1 y la ordenada en el origen es 5. Es decir, la recta pasa por el punto (0,5). Calculamos otro punto dando, por ejemplo, el valor 5 a x. Entonces y = - 5 + 5 = 0. La recta pasa también por el punto (5,0). Dibujamos los puntos y unimos con la regla:



4. Posición relativa de dos rectas

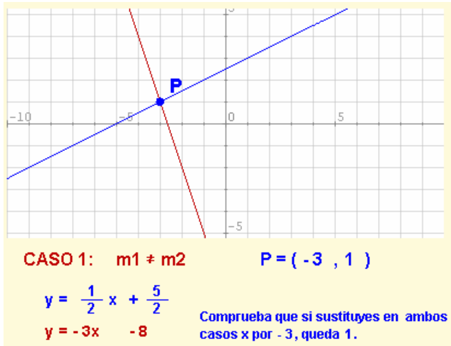
Análisis en forma explícita

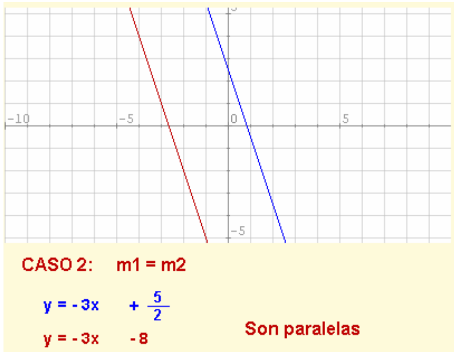
Dadas dos rectas

$$y = m_1x + n_1 \qquad y = m_2x + n_2$$

Si $m_1 \neq m_2$ las rectas se cortan en un punto cuyas coordenadas se obtienen resolviendo el sistema. Se dice que las rectas son **secantes**.

Si $m_1 = m_2$ las rectas son **paralelas.** Si, además, $n_1=n_2$ las rectas son **coincidentes**.





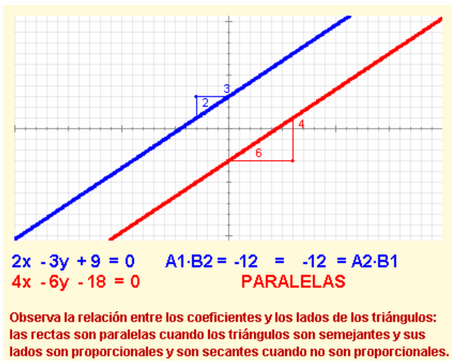
Análisis en forma general

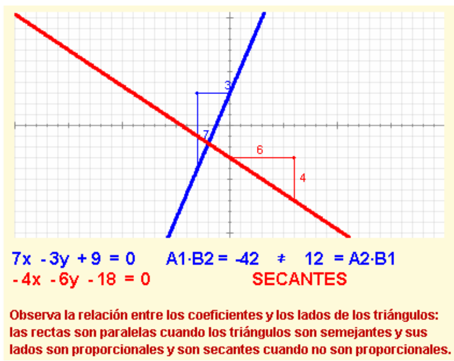
Dadas dos rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Si $A_1B_2 \neq A_2B_1$ son **secantes.** Al igual que antes las coordenadas del punto de corte se obtienen resolviendo el sistema.

Si $A_1B_2 = A_2B_1$ las rectas son **paralelas.**





EJERCICIOS resueltos

15. Determina la posición relativa de las rectas **y = - 4x + 1**, **y = 4x**. En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: la pendiente de la primera recta es $m_1 = -4$ y la de la segunda es $m_2 = 4$. Como las pendientes son distintas las rectas son **secantes**. Hallamos ahora el punto de corte resolviendo el sistema:

$$-4x + 1 = 4x; \quad 1 = 8x; \quad x=1/8; \quad y = 4\cdot(1/8) = 4/8 = ½; \quad P = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$$

16. Determina la posición relativa de las rectas **y = - 2x + 3**, **y = -2x - 2**. En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: La pendiente de ambas rectas es −2 y la ordenada en el origen es diferente, por tanto son dos rectas **paralelas**.

17. Determina la posición relativa de las rectas **x – 3y – 1 = 0**, **4x + y + 1 = 0**. En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: Como están en forma general debemos comprobar si los coeficientes respectivos de x e y son proporcionales: A1=1, B1=-3, A2=4, B2=1, entonces A1·B2 = 1 y A2·B1 = -12. Son diferentes, por lo tanto las rectas son **secantes**. Vamos a hallar las coordenadas del punto de corte. Hay varias maneras de hacerlo, una de ellas es despejar y en ambas ecuaciones (pasar a forma explícita) y repetir lo hecho en el ejercicio 15 más arriba:

$$y = \frac{1-x}{-3}; \quad y = -1 - 4x; \quad \frac{1-x}{-3} = -1 - 4x; \quad 1 - x = 3 + 12x; \quad -2 = 13x; \quad x = -\frac{2}{13}$$

Ahora sustituimos el valor obtenido para x en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$y = -1 - 4\cdot\left(-\frac{2}{13}\right) = -1 + \frac{8}{13} = -\frac{5}{13}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de corte son $P = \left(-\frac{2}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

Vamos a comprobar que el resultado es correcto sustituyendo los dos valores en ambas ecuaciones y viendo que en ambos casos las igualdades se verifican:

$$-\frac{2}{13} - 3\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) - 1 = -\frac{2}{13} + \frac{15}{13} - 1 = \frac{13}{13} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$4\cdot\left(-\frac{2}{13}\right) + \left(-\frac{5}{13}\right) + 1 = -\frac{8}{13} - \frac{5}{13} + 1 = -\frac{13}{13} + 1 = -1 + 1 = 0$$

18. Determina la posición relativa de las rectas **2x – 5y – 1 = 0**, **-4x + 10y + 1 = 0**. En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: Como están en forma general debemos comprobar si los coeficientes respectivos de x e y son proporcionales: A1=2, B1=-5, A2=-4, B2=10, entonces A1·B2 = 20 y A2·B1 = 20. Son iguales, por lo tanto las rectas son **paralelas**.

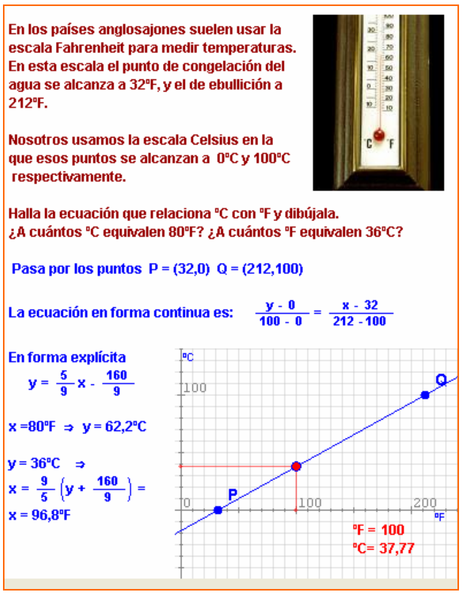
5. Aplicaciones

Problemas simples

Las funciones lineales describen fenómenos en los que intervienen magnitudes directamente proporcionales. La representación gráfica será una recta cuya pendiente nos informa de la rapidez de la variación de una magnitud con respecto a la otra y la ordenada en el origen nos informa sobre las condiciones iniciales.

En las imágenes de la derecha tienes un par de ejemplos de cómo obtener la ecuación (de una función lineal o afín) a partir de dos puntos conocidos o a partir de un punto y la pendiente y, a partir de ellas, hacer predicciones y cálculos de situaciones desconocidas.

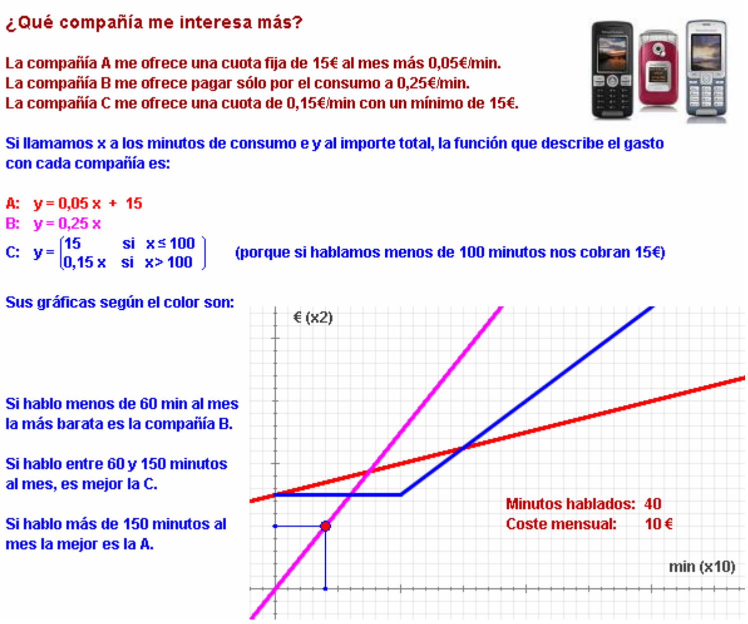
En la descripción de fenómenos reales es frecuente que las magnitudes que se relacionan vengan dadas por números de tamaños muy diferentes, por lo que al representarlas gráficamente habrá que escoger unas escalas adecuadas en los ejes correspondientes.

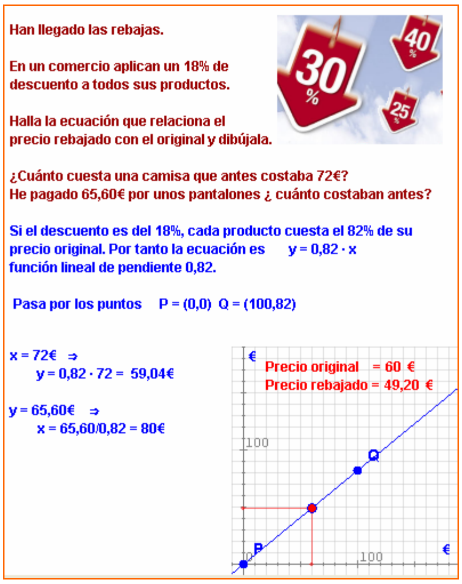


Problemas combinados

Donde realmente resulta interesante la aplicación de funciones lineales es en el estudio de varias funciones de manera simultánea de forma que podamos compararlas con facilidad.

Debajo tienes un ejemplo ilustrativo:





EJERCICIOS resueltos

19.

En una ciudad tienen implantada la Ordenanza de Regulación de Aparcamiento (O.R.A.). La norma indica que se debe pagar cierta cantidad por cada minuto y que no hay un mínimo.

Juan pone 1,35€ y el parquímetro indica que dispone de 45 minutos. Sara con 0,84€ tiene 28 minutos.

Halla la ecuación que relaciona el precio con el tiempo y dibújala.
¿Cuánto hay que pagar por una aparcamiento de 55 minutos?
Si pago 2,40€ ¿de cuánto tiempo dispongo?

Elegimos las escalas de manera que el tiempo está en mintuos y el precio en céntimos de euro.

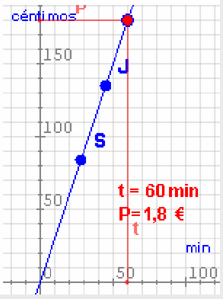
Pasa por los puntos J = (45,135) S = (28,84)

Como pasa por el origen es lineal y la pendiente es m =135/45 = 3

La ecuación es y = 3x

x = 55 min ⇒ y = 3 · 55 = 165 c = 1,65€

y = 2,40€ ⇒ x = 240/3 = 80 min



20.

En un banco nos ofrecen un plazo fijo al 5% anual con una comisión de mantenimiento de 20€ anuales, sea cual sea la inversión realizada.

Halla la ecuación que relaciona el interés producido con el capital invertido.

¿Cuánto producirán 3000€ en un año?
¿Cuánto se ha invertido si se han recibido 117,50€ de intereses?

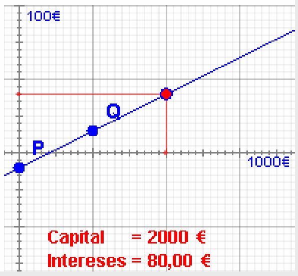
El interés es proporcional al capital invertido. La constante de proporcionalidad es 5% = 0,05. Hay unas condiciones iniciales que restan 20€, luego es una función afín de ecuación y = 0,05 · x - 20

Pasa por los puntos P = (0,-20) Q = (1000,30)

x = 3000€ ⇒
y = 0,05 · 3000 - 20 = 130€

y = 117,50€ ⇒
$x = \frac{y+20}{0,05} = 2750€$

Observa las escalas: cada unidad en horizontal son 1000€ y cada unidad vertical son 100€.
Comprueba que solo hay beneficio si la inversión es superior a 400€.



21.

Final de etapa.

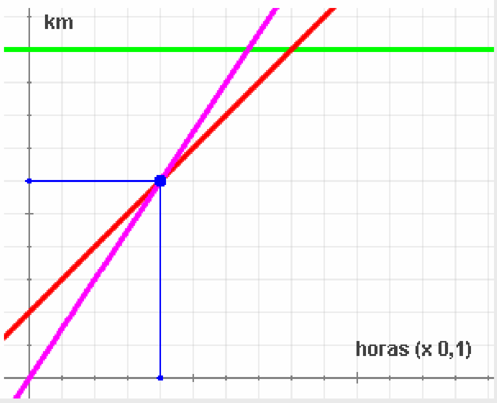
En una etapa con final en alto un escapado está a 8 km de la meta y circula a 10 km/h. Un grupo perseguidor se encuentra a 10 km del final corriendo a 15 km/h. ¿Alcanzarán al escapado si mantienen las velocidades? En caso afirmativo ¿cuánto tardarán y a qué distancia de la meta?

Llamemos x al tiempo transcurrido desde ahora (medido en horas) e y a la distancia recorrida desde este momento (medida en km). El escapado está 2 km por delante, luego la función que describe el desplazamiento con respecto al tiempo en cada caso es:

Escapado: y = 10 x + 2 Grupo perseguidor: y = 15 x Meta: y = 10

Sus gráficas según el color son:

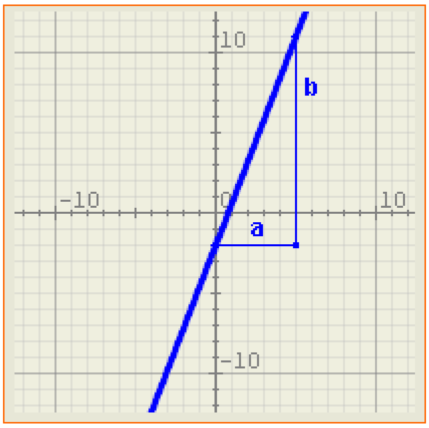
Lo alcanzan en 0,4 horas (24 minutos) a 4 km de la meta.



Para practicar

1. Representa gráficamente las rectas de ecuaciones **y=2x/5** y **5x+y+5**=0.

2. Halla la ecuación de la recta de la imagen:



3. Calcula la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto P (3,-2) y cuya pendiente es m=-2.

4. Calcula la forma general de la ecuación de la recta que pasa por los puntos P (3,-2) y Q (-2,-1).

5. Determina la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de ecuación **3x+2y-2=0**.

6. Determina la posición relativa de las rectas **y=3x-2** e **y=-2x-2**. Si se cortan halla también las coordenadas del punto de corte.

7. Averigua si los puntos A(-2,-4), B(0,-2) y C(3,1) están alineados.

8. Halla la ecuación de la recta paralela a y=3x-4 que pasa por el punto (-3,-10)

9. Dos agricultores de zonas diferentes cultivan maíz con los rendimientos y costes que se indican debajo. Averigua cuántas ha debe tener cada uno para empezar a tener beneficios y quién tiene más beneficio en función del número de ha cultivadas.

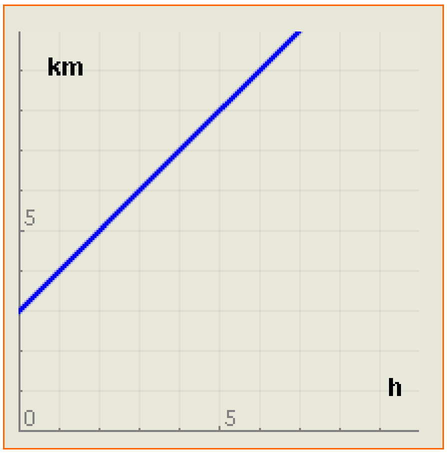
Agricultor 1:	
Rendimiento:	7,28 Tm/ha.
Costes por riego, abono, etc:	219 €/ha.
Costes fijos (seguro, impuestos, etc):	5525 €
Agricultor 2:	
Rendimiento:	3,03 Tm/ha.
Costes por riego, abono, etc:	52 €/ha.
Costes fijos (seguro, impuestos, etc):	2000 €
Precio del maíz:	201 €/Tm

10. La arena contenida en un reloj de arena ocupa un volumen de 563 cm^3 y el fabricante indica que la velocidad de caída de la arena es de 7 cm^3/s. Averigua cuánto tarda en haber la misma cantidad de arena en las dos partes del reloj.

11. Halla la ecuación de la función que describe la siguiente frase: "Un móvil está a 3 km de mi y se acerca a 2 km/h".

12. Halla la ecuación de la función que describe la siguiente frase: "Un móvil está a mi lado durante 1 hora y luego se aleja a 2 km/h".

13. La gráfica siguiente representa la distancia a la que se encuentra una persona con respecto a mi en relación con el tiempo transcurrido. Expresa con una frase su significado.



Para saber más

Relaciones no lineales

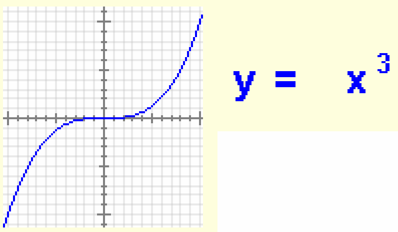
Recuerda el problema que se te planteaba al principio: Si una sandía pesa el doble que otra, su precio será el doble. Pero, si el radio de una sandía es el doble del de otra ¿su precio también sera el doble?

Supongamos que 1kg cuesta 0'75€.

El coste de una sandía de x kg es y =0'75x.
Es una función lineal. El precio es directamente proporcional al peso.

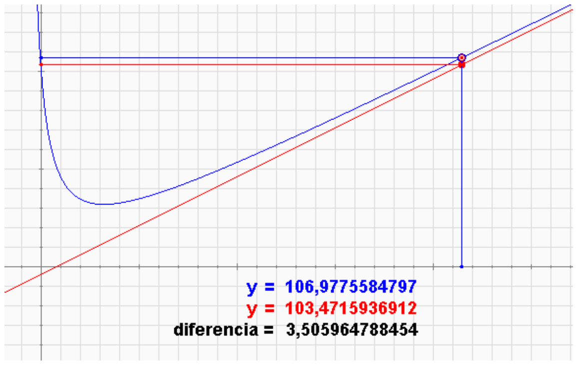
Por su parte, el peso es directamente proporcional al volumen y el volumen de una esfera es 4/3·π r³, luego si el radio de la primera es r y el de la segunda es 2r el volumen de la primera es proporcional a r³ y el de la segunda a (2r)³ = 8r³. Por tanto, el volumen, el peso y, en definitiva, el precio de la segunda es 8 veces mayor que el de la primera.

La relación entre peso (o precio) y longitud no es, por tanto, lineal. Puesto que el peso es proporcional, no a la longitud, sino al cubo de la longitud, decimos que la relación entre estas dos magnitudes es cúbica. Su gráfica tiene este aspecto:

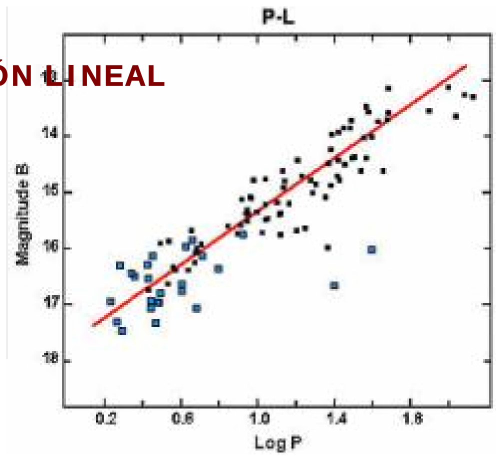


Comportamiento asintótico

Algunas funciones no lineales tienen la propiedad de que cuanto más grande es el valor de x más se parecen a una función lineal o afín (es decir, una línea recta). Esto facilita el estudio de su tendencia a largo plazo. Esta recta recibe el nombre de **asíntota** y se dice que la función tiene un comportamiento **asintótico.**

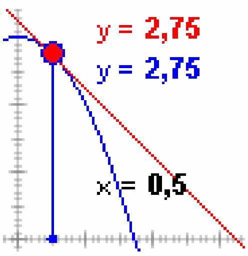


REGRESIÓN LINEAL



Es una de las técnicas más usadas por la ciencia. Si se quiere estudiar la relación que existe entre dos magnitudes se hacen muchas observaciones asignando una pareja de valores acada una. Se obtiene una nube de puntos que puede o no mostrar una tendencia.

En el ejemplo parece existir un cierto comportamiento lineal.



Derivadas:

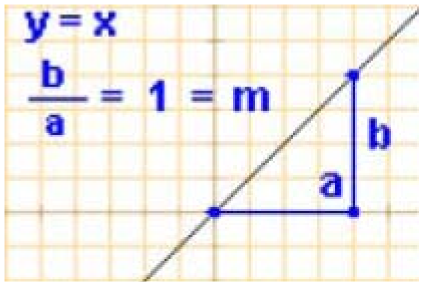
Comportamiento lineal de una función no lineal. La función azul de la imagen no es lineal. La roja es una función afín tangente en un punto de la primera. Cerca del punto x = 0,5 los valores de ambas funciones son muy parecidos. Lejos del punto son muy diferentes. Cuando estamos estudiando una función cerca de un punto es más fácil hacer cálculos con una función lineal o afín que se aproxime a ella. La recta tangente a una función en un punto recibe el nombre de **función derivada** en el punto y aprenderás a calcularla en cursos superiores.

Recuerda lo más importante

Funciones lineales

Son las funciones que relacionan magnitudes directamente proporcionales y su ecuación es de la forma **y = mx**

Su representación gráfica es siempre una línea recta que pasa por el origen. La pendiente, m, es la constante de proporcionalidad.

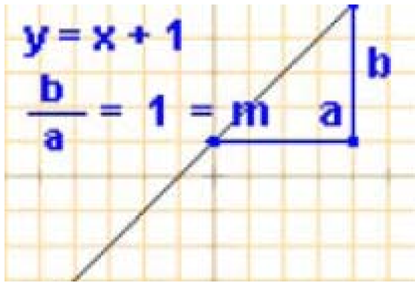


Funciones afines

Relacionan magnitudes directamente proporcionales sometidas a alguna condición inicial. Tienen la forma

y = mx+n

Su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el punto (0,n) (n es la **ordenada en el origen**).



Ecuación de la recta

- <u>Forma explícita</u>: **y = mx + n**
- <u>Forma punto-pendiente</u>: si se conoce la pendiente, m, y las coordenadas de un punto (x_o,y_o) la ecuación es:

  $$y - y_o = m\cdot(x - x_o)$$

- <u>Recta por dos puntos</u>: si se conocen las coordenadas de dos puntos $P(x_o,y_o)$, $Q(x_1,y_1)$ la ecuación es:

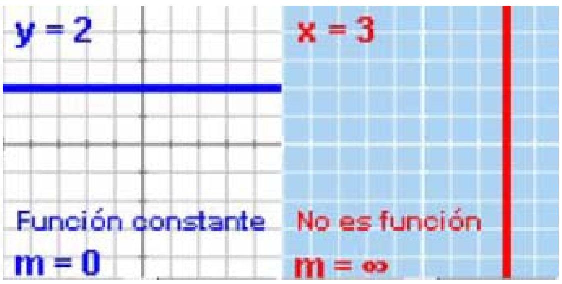
  $$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

- <u>Forma general</u>: Simplificando cualquiera de las ecuaciones anteriores se obtiene:

  Ax + By + C = 0

  la pendiente es m=-A/B si B#0

Casos particulares



Posición relativa de dos rectas

r_1: $y=m_1+n_1$; r_2: $y=m_2+n_2$

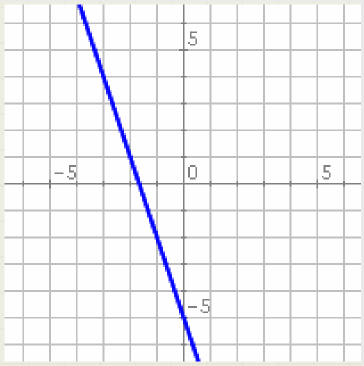
si $m_1 = m_2$ son **paralelas** en caso contrario son **secantes**.

r_1:$A_1x+B_1y+C_1=0$
r_2:$A_2x+B_2y+C_2=0$

si $A_1B_2 = A_2B_1$ son **paralelas** en caso contrario son **secantes**.

Si son secantes las coordenadas del punto de corte se hallan resolviendo el sistema.

Autoevaluación



1. Escribe la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de la imagen.

2. Calcula la ordenada en el origen de la recta que pasa por el punto (-4,-1) y cuya pendiente es −3.

3. Calcula la ordenada en el origen de la recta de ecuación $-3x - 3y + 2 = 0$

4. Calcula la pendiente de la misma recta de antes.

5. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(-5,-4) y Q(-4,-2).

6. Determina la posición relativa de las rectas de ecuaciones $y = -3x - 5$ e $y = 2x - 2$.

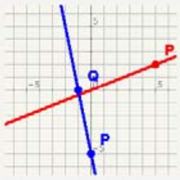
7. Determina la posición relativa de las rectas de ecuaciones $4x - 3y + 5 = 0$ $-8x + 6y + 1 = 0$.

8. Halla las coordenadas del punto de corte de las rectas de ecuaciones $y = -x + 5$ e $y = 2x - 7$.

9. Averigua si los puntos A(-3,-1), B(0,-1) y C(6,-4) están alineados.

10. Halla la ecuación de la recta paralela a $y = -x + 5$ que pasa por el punto (4,-2).

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 

2. $y = \frac{13}{5}x - 2$
3. 2x+y-4=0
4. x+5y+7=0
5. m=-3/2, n=1
6. Son secantes y se cortan en el punto (0,-2)
7. Sí están alineados. (Halla la ecuación de la recta que pasa por A y por B y comprueba que también pasa por C).
8. y=3x-1
9. El primero obtiene beneficios a partir de 4,43 ha. El segundo a partir de 3,58 ha. El primero gana más que el segundo a partir de 5,13 ha.
10. 40,2 segundos.
11. y=2x+3
12. $y = \begin{cases} 0 & si\ x < 1 \\ 2x-2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$
13. Está a tres km de mi y se aleja a 1 km/h.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. m=-3, n=-5
2. n=-13
3. n=2/3≈0,66
4. m=-1
5. m=2
6. Son secantes porque sus pendientes son diferentes.
7. Son paralelas porque A1·B2 = A2·B1
8. x=4, y=1
9. No están alineados.
10. y = -x + 2

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

Estadística

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Distinguir los distintos tipos de variables estadísticas.
- Agrupar en intervalos los datos de un estudio estadístico.
- Hacer la tabla estadística asociada a un conjunto de datos.
- Representar e interpretar gráficos estadísticos, y saber cuando es conveniente utilizar cada tipo.
- Calcular la media, la moda, la mediana y los cuartiles de un conjunto de datos.
- Que son y cómo se calculan los parámetros de dispersión: el rango o recorrido, la varianza y la desviación típica, el coeficiente de variación.

Antes de empezar

Estadística

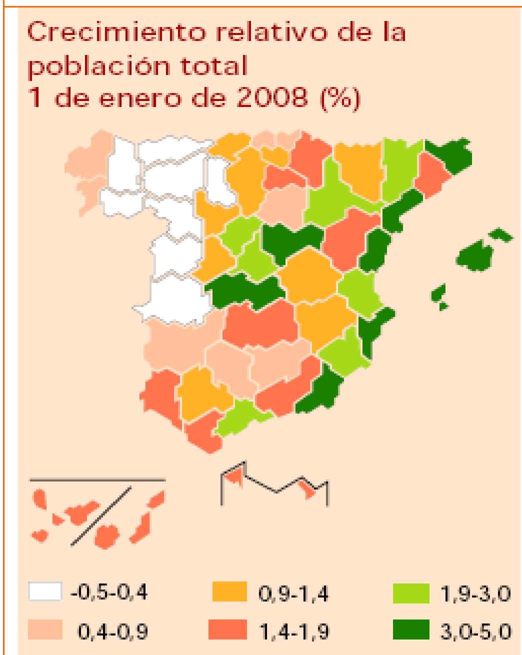
La estadística, a nivel primario, es una actividad que todo el mundo hace desde muy pequeño. El mero hecho de contar y/o clasificar tus juguetes (tus coches, muñecas/os, canicas, videojuegos,...) ya es una actividad estadística.

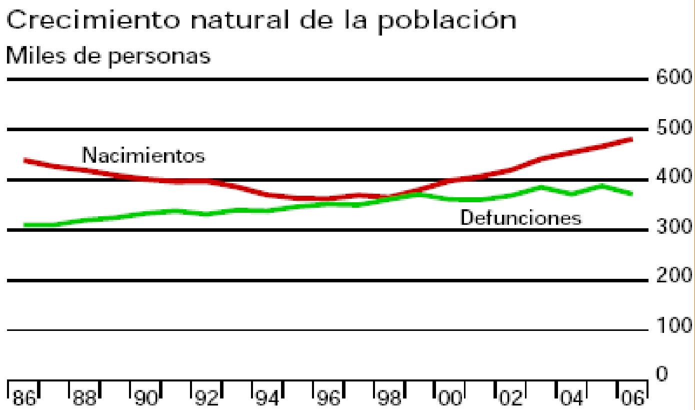
Clasificar objetos

El destornillador a la caja de herramientas, los cubiertos al cajón de la cocina, los libros a la estantería, los videojuegos junto a la consola,...

Competiciones escolares

En tu instituto habrá equipos y competiciones, y habrá que llevar un cómputo de resultados y una ordenación de equipos según una puntuaciones. Hasta es posible que haya un registro de varios años.





1. Estadística descriptiva

Necesidad

Al poner en práctica una medida social para saber su aceptación. ¿A cuántas personas puede ir dirigida?, ¿cuáles son los distintos niveles?. Frente a una iniciativa como esta, preguntar a toda la población puede agotar los recursos destinados a ella, una encuesta previa puede ahorrarnos algún que otro equívoco.

Población y muestra

Cuando se hace un estudio estadístico el investigador decide si analizará toda la población o una muestra elegida previamente.

Población es el conjunto de individuos, con alguna característica común, sobre el que se hace un estudio estadístico.

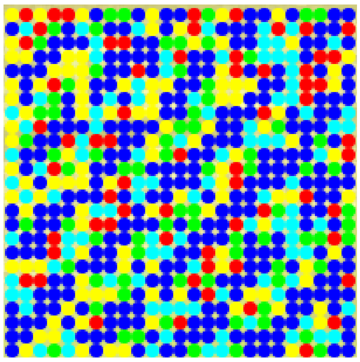
La **muestra** es un subconjunto de la población. Debe elegirse que sea representativa de toda la población en la característica estudiada.

Atributos y Variables.

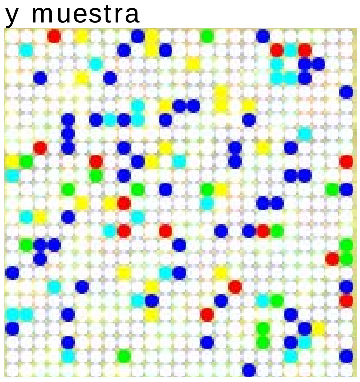
Cada una de las propiedades o características que podemos estudiar es una **variable estadística**. Dependiendo de los posibles valores que puedan tomar se clasifican en:

- **Variables cualitativas** o atributos. Los valores de la variable no son números sino cualidades, se expresan con palabras. El color, la forma, el sexo,…son ejemplos de variables cualitativas.
- **Variables cuantitativas.** Los datos se expresan numéricamente y pueden ser:
  - Discretas. Cada una de las variables solo puede tomar valores enteros (1, 2, 3…). El nº de hermanos, el nº ventanas de casa, el nº colegios de tu población,…
  - Continuas. Pueden tomar cualquier valor de un intervalo dado. Nuestro peso, altura, fuerza, no es posible medirlas con números enteros, la densidad del aire, la velocidad media de los fórmula 1 en una carrera,…

Población



y muestra



El color de los lápices, es una variable cualitativa

La altura, edad y peso, son variables cuantitativas.

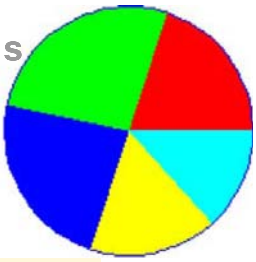
2. Recuento y gráficos

X_i	f_i	f_i / 30	F_i
Rojo	6	0,20	15
Verde	8	0,21	25
Azul	7	0,15	32
Amarillo	5	0,33	42
Turquesa	4	0,11	47
Total	**30**	**1**	

Es parte del proceso, después de recopilar los datos se procede a su recuento para expresarlos de forma ordenada y para que sea más fácil trabajar con ellos. Generalmente se elabora una tabla como se muestra a la izquierda donde puedes practicar.

- Frecuencia **absoluta**, es el nº de veces que aparece un dato. A la de x_i la llamaremos f_i.
- Frecuencia **relativa**, es el cociente entre la frecuencia absoluta y el nº total de datos.
- Frecuencia **acumulada** de un dato, es la suma de las frecuencias absolutas de los valores que son menores o iguales que él, la indicaremos con F_i. También se pueden calcular las frecuencias relativas acumuladas.

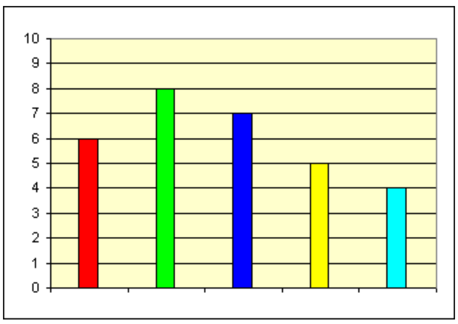
Diagrama de sectores



Para calcular los grados de cada sector, fíjate:

$$\frac{360\cdot 4}{30}=48^{\circ}$$
$$\frac{360\cdot 5}{30}=60^{\circ}$$
$$\frac{360\cdot 7}{30}=84^{\circ}$$
$$\frac{360\cdot 8}{30}=96^{\circ}$$
$$\frac{360\cdot 6}{30}=72^{\circ}$$

Diagrama de barras



Diagramas de barras y de sectores

Los datos estadísticos suelen representarse de forma gráfica, ya que de esta forma podemos hacernos una idea de su distribución de un solo golpe de vista. En función del tipo de variable conviene más usar un tipo de gráfico u otro.

- **Diagrama de sectores**, puede aplicarse a cualquier tipo de variable, aunque es el más adecuado en variables cualitativas y para una primera toma de contacto con los valores de una población. Es un círculo dividido en sectores de ángulo proporcional a la frecuencia de cada valor.

  La amplitud de cada sector se obtiene multiplicando la frecuencia relativa por 360º.

$$\frac{\text{frecuencia}}{\text{nº total de datos}}=\frac{\text{grados del sector}}{360}$$

- **Diagrama de barras**. También puede aplicarse a cualquier tipo de variable, aunque se considera el idóneo para variables discretas. Cada valor se corresponde con una barra de longitud proporcional a su frecuencia.

EJERCICIOS resueltos

1. ¿Cuántas personas suponen una muestra del 10% de una población de 10.000 habitantes? ¿Y de una de 6000 habitantes?.

Solución: a) 10.000 · 10 /100 = 1000, b) 6000 · 10/100 = 600

2. Una empresa de sondeos estadísticos tiene capacidad para entrevistar a 1000 personas por semana. Si dispone de 4 semanas a qué porcentaje de una población de 100.000 habitantes puede entrevistar para obtener una muestra.

Solución: En 4 semanas puede entrevistar a 4000 personas. 4000 de 100.000 equivale a 4 de 100. Así pues el 4%.

3. Con el fin de conocer mejor la forma de viajar de una población han preparado una encuesta. Algunas de las preguntas trataron sobre: Nº de días de viaje, dinero empleado, número de bultos, zonas geográficas, medio de transporte, naturaleza del viaje (negocios, turismo, familiar, salud…) y nº de personas. Clasifica estas variables estadísticas.

Solución:

V cualitativa: Zonas geográficas, medio de transporte y naturaleza del viaje.

V. cuantitativa discreta: Nº de días, número de bultos y nº de personas.

V. cuantitativa continua: Dinero empleado.

4. Haz un recuento de los siguientes datos

4	4	2	1	2	2	4	4	2	3	4
3	2	2	2	4	4	3	4	4	2	1

Solución:

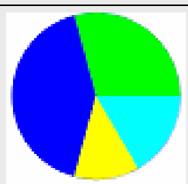
Xi	fi
1	3
2	8
3	4
4	9

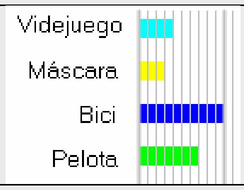
5. Haz un recuento de los siguientes datos, un gráfico de sectores y otro de barras. Indica el ángulo de cada sector.

Pelota, máscara, pelota, máscara, máscara, bici, máscara, bici, bici, máscara, máscara, máscara, máscara, videojuego, máscara, pelota, videojuego, pelota, videojuego, pelota, pelota, videojuego, pelota, máscara.

Solución:

Xi	fi	grados
Videojuego	4	60
Máscara	3	45
Bici	10	150
Pelota	7	105





Los datos

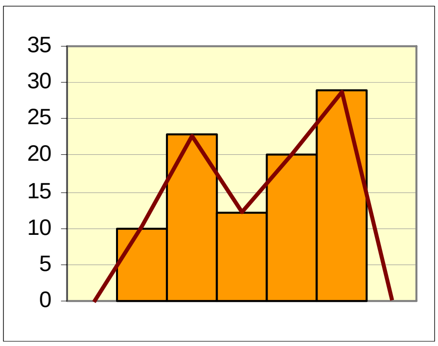
55	491	42	465	653
829	798	254	155	427
153	533	945	878	230
690	652	476	110	87
14	751	47	211	341
737	473	452	352	246
499	109	694	308	933
326	209	729	651	397
161	329	975	848	823
240	640	319	526	

Agrupados en 5 intervalos
Observa las marcas de cada clase como se corresponden con la media de sus extremos.

Intervalo	Marca	Frecuencia
[0 , 200)	100	10
[200 , 400)	300	13
[400 , 600)	500	9
[600 , 800)	700	10
[800 , 1000)	900	7

Agrupados ahora en 8 intervalos

Intervalo	Marca	Fr.
[0 , 125)	62,5	7
[125 , 250)	187,5	8
[250 , 375)	312,5	7
[375 , 500)	437,5	8
[500 , 625)	562,5	2
[625 , 750)	687,5	8
[750 , 875)	812,5	5
[875 , 1000)	937,5	4



Agrupación de datos en intervalos

En variables continuas, o en discretas cuanto el número de datos distintos se hace casi tan grande como el número de datos, y para poder estudiarlos, se hace necesario agruparlos en **intervalos** o **clases**, habitualmente de la misma amplitud y como mínimo cuatro.

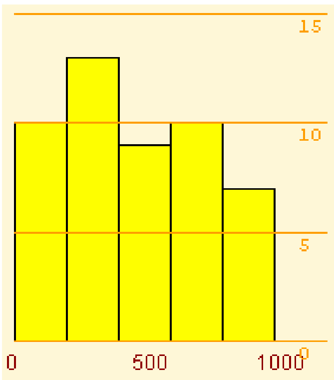
Por ejemplo, en una población hay casi tantas alturas como individuos pero podemos agruparlos en bajos, medios y altos; también podríamos hacer bajos, medios-bajos, medios-altos y altos, o clasificarlos de 10 en 10 cm, o de 20 en 20...

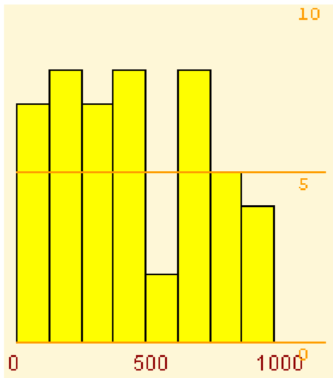
- Para representar a todos los datos de un intervalo elegimos un valor, el punto medio del intervalo, se llama **marca de clase**.

Histograma

Cuando los datos vienen agrupados en intervalos se usa para representarlos gráficamente el **histograma**. Cada valor se representa con un rectángulo de anchura el intervalo correspondiente y con la altura proporcional a su frecuencia.

Los histogramas para los datos del margen agrupados en cinco y ocho intervalos:



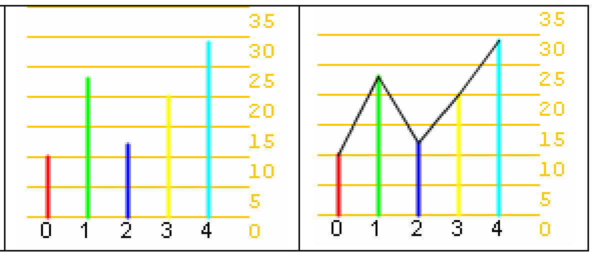


Polígono de frecuencias.

Lo creamos al unir los extremos superiores de las barras de los histogramas o de los diagramas de barras.

Datos

X_i	f_i
0	10
1	23
2	12
3	20
4	29



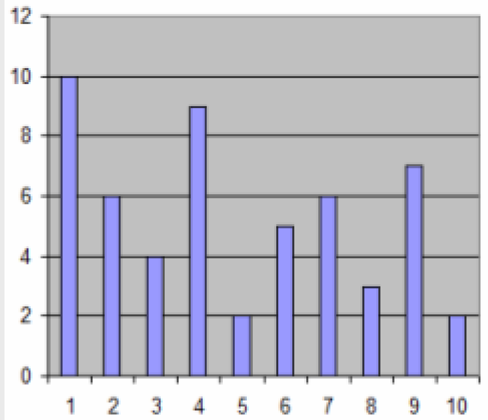
EJERCICIOS resueltos

6. Agrupa los siguientes datos en 10 grupos. Agrupa los mismos datos, ahora, en 5 grupos y haz un gráfico para cada agrupación.

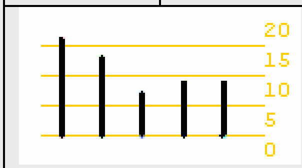
2	9	9	8	2	9	5	4	1	7	7	1
2	8	4	1	6	1	9	1	4	7	4	9
4	1	3	2	3	4	3	1	1	1	4	5
10	6	6	2	1	4	3	7	6	6	10	2
9	8	9	7	7	4						

Solución:

Xi	fi
1	10
2	6
3	4
4	9
5	2
6	5
7	6
8	3
9	7
10	2



Xi	fi
1 ó 2	16
3 ó 4	13
5 ó 6	7
7 u 8	9
9 ó 10	9

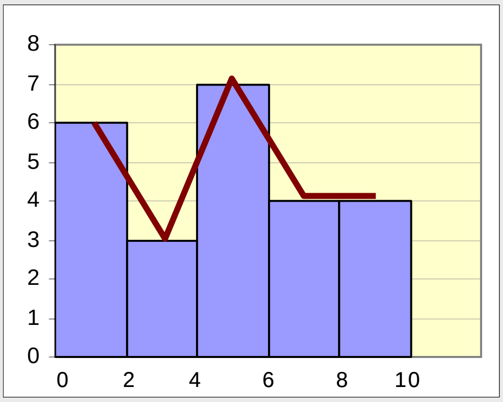


7. Agrupa los datos siguientes en 5 intervalos de igual amplitud, haz un gráfico y un polígono de frecuencias.

7,2	6	6,3	9,8	9,1	9,3
5,7	6,7	8,4	5,7	3,1	1,4
5,4	1,1	4,8	2,5	0,1	4
5,3	1,3	3,6	1,9	5,2	1,7

Solución:

	f_i
[0,2)	6
[2,4)	3
[4,6)	7
[6,8)	4
[8,10)	4



3. Medidas de centralización y posición

La media

Todos los alumnos saben que con un 6 y un 4 tienen de media 5. Pues la media en estadística no es otra cosa que eso, solo que, habitualmente, con más datos.

Para calcular la media si son pocos los datos, se suman todos y se divide entre el número total. Si son muchos, los tendremos agrupados, entonces se suman los productos de cada dato por su frecuencia absoluta y se divide esta suma por el número total de datos. Se indica con x.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_3} = \frac{\sum x_i f_i}{N}$$

Media

Ejemplo 1

10, 12, 10, 14 y 13

$$\bar{X} = \frac{10+12+10+14+13}{52} = \frac{59}{5} = 11.8$$

Ejemplo 2

Xi	fi	Xi · fi
5	4	20
10	6	60
15	7	105
20	9	180
25	4	100
30	6	180
	36	645

La media.

$$\bar{X} = \frac{645}{36} = 17{,}91$$

La moda

¿Quién no ha oído alguna vez: "*Está de moda ir a...*", "*Se lleva este tipo de pantalón, está de moda*", *o* "*Se ha puesto de moda el grupo*"*...*, y todo el mundo entiende que hay una buena cantidad de personas en esas opciones.

Así pues, el valor que mas frecuencia tenga será "*el de moda*", aunque puede ocurrir que haya más de uno.

- La **moda**, **Mo**, de una distribución estadística es el valor de la variable que más se repite, el de mayor frecuencia absoluta.

Moda

Ejemplo 1

Xi	fi	Moda
5	8	5
10	5	
15	1	
20	8	20
25	0	
30	3	

Ejemplo 2

Xi	fi	Moda
100	5	
200	5	
300	1	
400	3	
500	2	
600	9	600

La mediana y los cuartiles

La mediana y los cuartiles, como la media aritmética, sólo se pueden calcular cuando la variable es cuantitativa.

- La **mediana**, **Me**, es el valor que ocupa la posición central una ver ordenados los datos en orden creciente, es decir el valor que es mayor que el 50% y menor que el otro 50%.

La mediana divide la distribución en dos partes con igual nº de datos, si la dividimos en cuatro partes obtenemos los **cuartiles**, 1º, 2º y 3º, que se indican respectivamente **Q_1**, **Q_2** y **Q_3**.

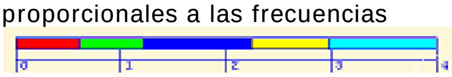
Ordenados los datos, **el primer cuartil**, es mayor que el 25% de estos; **el tercer cuartil**, mayor que el 75%, y el segundo coincide con la mediana.

Medidas de posición

Ampliamos la tabla con la columna de frecuencias acumuladas y porcentajes de estas

xi	fi	Fi	%
1	10	10	15,152
2	10	20	30,303
3	17	37	56,061
4	12	49	74,242
5	17	66	100

y/o una barra con longitudes proporcionales a las frecuencias



y podremos saber la mediana y cuartiles

$Q_1=2$, $Q_2=Me=3$ y $Q_3=5$

EJERCICIOS resueltos

8. Calcula la media en cada caso:

a) 4, 6, 8
b) 4, 6, 8, 6
c) 100, 120, 180, 200

Soluciones:
a) (4+6+8)/3 = 6
b) (4+6+8+6)= 24/4 = 6
c) (100+120+180+200)/4 = 150

9. Calcula la media de los siguientes datos

0	2	3	4	3	1	4	3	3	4	1	3
4	1	3	0	0	3	2	2	1	3	4	1

Solución:
Sumamos todo y dividimos entre 24, el número de datos.
$\overline{X} = 2{,}29$

10. Calcula la media de los siguientes datos

2,4	3	1,1	4	3,5	0,7	0	2,8	3,8	0,2	2,8	1,9
0,6	3,8	3,1	4	2,8	0,2	0,4	3,1	1,5	1,9	1,8	3,1

Solución: $\overline{X} = 2{,}19$

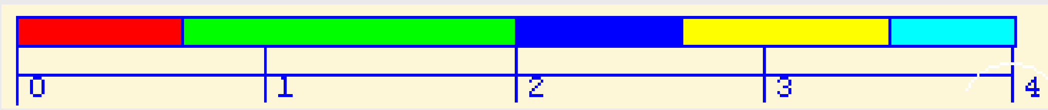
11. Determina la moda para los datos

2	4	3	0	2	1	1	2	3	3	3	1
1	1	0	1	4	0	1	3	4	0	1	2

Solución:
Mo = 1 , es el valor que mas veces aparece, 8 en total.

12. Calcula la mediana, el primer y el segundo cuartil de los datos del ejercicio anterior.

Solución:
Hacemos el recuento, 0→4, 1→8, 2→4, 3→5 y 4→3, dibujamos barras de colores de longitudes proporcionales a las frecuencias, valdrían por ejemplo de 4mm, 8mm, 4mm, 5mm y 3mm. Dividimos toda la barra en 4 partes y nos fijamos el color en el que queda la división.



Mediana = 1,5,
Q1=1 y Q3=3

Ó bien construimos la tabla y observamos donde quedan en la última columna los valores 25%, 50% y 75%.

Xi	fi	Fi	%
0	4	4	16,667
1	8	12	50
2	4	16	66,667
3	5	21	87,5
4	3	24	100

4. Medidas de dispersión.

Rango y Desviación media

Las medidas de **dispersión** indican si los datos están más o menos agrupados respecto de las medidas de centralización.

- **Rango** o recorrido, es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable, indica la longitud del intervalo en el que se hallan todos los datos.

Aunque el rango da una información importante, resulta más interesante calcular cuánto se desvían en promedio los datos de la media.

- **Desviación media**, es la media de los valores absolutos de las diferencias entre la media y los diferentes datos.

Desviación media

Ejemplo

Xi	fi	Xi · fi	$\lvert\bar{X} - Xi\rvert \cdot fi$
5	2	10	29,44
10	1	10	9,72
15	3	45	14,16
20	4	80	1,11
25	6	150	31,66
30	2	60	20,55
	18	355	106,66

$$DM = \frac{106,66}{18} = 5,92$$

Varianza y desviación típica

Es otra forma de medir si los datos están o no próximos a la media y es la más utilizada.

- La **varianza** es la media de los cuadrados de las desviaciones.
- La **desviación típica** es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Para designarla emplearemos la letra griega "sigma" σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fi\cdot(Xi - \bar{X})^2}{n}} \quad \text{o} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fi\cdot Xi^2}{n} - \bar{X}^2}$$

Es importante que entiendas el significado de estas medidas, cuanto mayores sean más dispersos estarán los datos.

Los intervalos alrededor de la media de amplitud 2 o 4 veces la desviación típica, tienen mucha importancia en estadística por el porcentaje de datos que hay en ellos.

Desviación típica

Ejemplo

Xi	fi	Xi · fi	$(\bar{X} - Xi)^2 \cdot fi$	$fi \cdot Xi^2$
5	5	25	1164,81	125
10	1	10	105,33	100
15	1	15	27,7	225
20	2	40	0,13	800
25	1	25	22,43	625
30	9	270	853,25	8100
	19	385	2173,68	9975

$$\sigma = \sqrt{\frac{2173,68}{19}} = 10,69$$

O bien, como $\bar{x} = 20,26$

$$\sigma = \sqrt{\frac{9975}{19} - 20,26^2} = 10,69$$

Coeficiente de variación

Es el cociente entre la desviación típica y la media, se utiliza para comparar las dispersiones de datos de distinta media.

Por ejemplo, para los datos 4 y 6, el CV=1/5=0,2 y para 101 y 99 es CV=1/100=0.01. En ambos casos la desviación típica es la misma, pero en relación a la media es mas importante en el primero.

Coeficiente de variación

$\bar{x}=12$ σ=7 CV= 58,33 %

$\bar{x}=110$ σ=7 CV= 6,36 %

$\bar{x}=1148,25$ σ=7 CV= 0,60 %

Utilizar la Calculadora científica

MODELO 1

Modo estadístico

Primero se ha de elegir el modo estadístico. En muchas calculadoras se hace pulsando:

[MODE][·]

Datos desordenados

A continuación hay que introducir los datos, por ejemplo para 2, 3, 4, 3 teclearemos:

[2][M+] **[3][M+]** **[4][M+]** **[3][M+]**

Y para hacer los cálculos:

- Para la media **[SHIFT] [$\bar{x}$]**
- Para la desviación típica **[SHIFT] [σ_n]**

También se puede sumar todos, o los cuadrados, o contar el nº de datos introducidos, pulsando respectivamente:

[SHIFT][Σx] **[SHIFT][Σx^2]** **[SHIFT][n]**

Datos en una tabla

xi	fi
2	4
3	3
4	5

Se introducen los datos según la secuencia: **[2][×][4][M+]** **[3][×][3][M+]** **[4][×][5][M+]**

Y ahora ya se pueden realizar los cálculos como antes.

MODELO 2

Modo estadístico e introducción de datos

Elegimos el modo estadístico (mode stat 1-VAR) y nos aparece una columna donde introducir datos, uno tras otro, no importa que vayan desordenados. Si tuviéramos una tabla con frecuencias tendríamos que activar las frecuencias (Setup frequency on) y rellenar las columnas. Después del último dato pulsar AC.

Cálculos

Pulsando SHIFT STAT nos aparece un menú, **1:type, 2:Data, 3:Edit, 4:Sum, 5:Var 6:MinMax**. Con la opción **5:Var** accederemos a calcular la media, desviación típica y cantidad de datos. Con la opción **4:sum** las sumas que habitualmente necesitamos. Con la opción **6:MinMax** el mínimo y el máximo. Y con la opción **2:Data** podremos modificar los datos introducidos.

.

Nota: Hay muchos modelos de calculadoras, pero afortunadamente, todas son bastante parecidas, trata de averiguar el funcionamiento de la tuya si no coinciden con éstas, consulta el manual o pregunta a tu profesor.

EJERCICIOS resueltos

13. Calcula el rango y la desviación media de los datos:

8	8	6	10	9	6	7	8	9	7
7	6	6	7	9	5	5	7	10	7

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert \cdot f_i$
5	2	10	4,8
6	4	24	5,6
7	6	42	2,4
8	3	24	1,8
9	3	27	4,8
10	2	20	5,2
	20	147	24,6

Solución:

El rango oscila entre 8 y 12 con una amplitud de 4.

Hacemos el recuento.

La media: $\bar{x} = \dfrac{147}{20} = 7{,}4$

Calculamos la desviación de cada dato respecto a la media, en valor absoluto. La media de las desviaciones:

$$DM = \frac{24{,}6}{20} = 1{,}23$$

14. Calcula la desviación media de los datos tabulados siguientes:

	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert \cdot f_i$
[0,200)	100	7	700	2831,82
[200,400)	300	8	2400	1636,36
[400,600)	500	13	6500	59,09
[600,800)	700	9	6300	1759,09
[800,1000)	900	7	6300	2768,18
	Total:	44	22200	9054,55

Solución:

Calculamos la media:

$$\bar{x} = \frac{22200}{44} = 504{,}55$$

Completamos la última columna:

$$DM = \frac{9054{,}55}{44} = 205{,}59$$

EJERCICIOS resueltos

15. Calcula la media y la desviación típica en

a) 200, 250 b) 175, 275

Solución:

a) $\bar{X} = \dfrac{250+200}{2} = 225 \qquad \sigma = \sqrt{\dfrac{(250-225)^2+(200-225)^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{25^2+25^2}{2}} = 25$

b) $\bar{X} = \dfrac{175+275}{2} = 225 \qquad \sigma = \sqrt{\dfrac{(175-225)^2+(275-225)^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{50^2+50^2}{2}} = 50$

16. Calcula la media y la desviación típica en:

a) 7, 5, 3, 2, 4, 5 b) 20, 25, 20, 22, 21

a) $\bar{X} = \dfrac{7+5+3+2+4+5}{6} = \dfrac{26}{6} = 4{,}33$

$$\sigma = \sqrt{\frac{7^2+5^2+3^2+2^2+4^2+5^2}{6} - 4{,}33^2} = \sqrt{\frac{128}{6} - 18{,}75} = 1{,}59$$

b) $\bar{X} = \dfrac{20+25+20+22+21}{5} = \dfrac{108}{5} = 21{,}6$

$$\sigma = \sqrt{\frac{20^2+25^2+20^2+22^2+21^2}{5} - 21{,}6^2} = \sqrt{\frac{2350}{5} - 466{,}56} = 1{,}85$$

17. ¿Cuál de las dos distribuciones anteriores presenta mayor dispersión?

Solución:

Las desviaciones típicas son muy similares 1,59 y 1,85
Para comparar calculamos el coeficiente de variación:
a) CV=(1,59/4,33)·100 = 36,72% b) CV=(1,85/21,6)·100= 8,56%
Ahora se puede apreciar que la dispersión es mucho mayor en la distribución a).

18. Calcula la media y la desviación típica de los datos agrupados siguientes:

X_i	5	10	15	20	25	30
f_i	9	2	3	5	9	4

Solución:

Xi	fi	Xi · fi	$(\bar{X}-Xi)^2 \cdot fi$	$fi \cdot Xi^2$
5	9	45	1371,31	225
10	2	20	107,86	200
15	3	45	16,47	675
20	5	100	35,27	2000
25	9	225	527,56	5625
30	4	120	640,72	3600
	32	555	2699,21	12325

Calculamos previamente la media :

$\bar{x} = \dfrac{555}{32} = 17{,}34$

1° Forma de calcularla $\sigma = \sqrt{\dfrac{2699{,}21}{32}} = 9{,}18$

2° Forma $\bar{X} = 17{,}34 \qquad \sigma = \sqrt{\dfrac{12325}{32} - 17{,}34^2} = 9{,}18$

19. ¿Cuál es el coeficiente de variación de la distribución anterior?

Solución: $CV = \dfrac{9{,}18}{17{,}34} \cdot 100 = 52{,}94\%$

Para practicar

1. ¿Cuántas personas suponen una muestra del 5% de una población de 20.000 habitantes? ¿Y de una de 1000 habitantes?.

2. De una población de 30000 individuos se ha estudiado varias características en 150 individuos. ¿Qué porcentaje del total ha sido estudiado?

3. Un veterinario estudia las siguientes características en una muestra de animales de una granja tipo de animal, peso, color de los ojos, temperatura corporal, número de compañeros y metros cuadrados por animal.

4. Haz un recuento de los siguientes datos, un gráfico de sectores y otro de barras. Indica el ángulo de cada sector.

a	b	c	a	c	c
d	c	d	b	d	a
d	a	b	b	c	c
a	a	b	a	b	d

5. Haz un recuento de los siguientes datos y un diagrama de barras con polígono de frecuencias

3	3	1	1	3	2
3	3	2	1	3	2
2	3	1	1	4	3
2	2	4	4	3	3

6. Agrupa los siguientes datos en 10 grupos. Agrupa los mismos datos, ahora, en 5 grupos.

3	6	5	9	2	6
2	2	7	9	4	6
2	5	9	9	1	0
2	5	3	6	7	8
6	4	3	6	7	9
10	10	9	1	6	8
6	2	3	9	6	5
6	6	5	7	6	6
10	1	3	4	4	4

7. Calcula la media en cada caso:

a) 14,16, 18 b) 24, 26, 28, 26
c) 1000, 1200, 1800, 2000

8. Calcula la media de los siguientes datos

3	3	1	1	3	2
3	3	2	1	3	2
2	3	1	1	4	3
2	2	4	4	3	3

9. Calcula la media de los siguientes datos

10	1,5	18	20	16	1
9,5	5,50	15,5	6,5	4,5	4
8,5	7,5	1,5	15	13	0
20	12,5	7,5	4,5	14,5	9

10. Determina la moda para los datos

3	3	1	1	3	2
3	3	2	1	3	2
2	3	1	1	4	3
2	2	4	4	3	3

11. Calcula la mediana, el primer y el segundo cuartil de los datos del ejercicio anterior.

12. Calcula de desviación media en cada caso:

a) 14, 16, 18 b) 34, 36, 38, 36
c) 1000, 1200, 1800, 2000

13. Calcula el rango y la desviación media de los datos:

23	8	21	24	20	9
33	20	11	36	13	1
40	25	30	12	18	5
40	27	16	26	9	7

14. Calcula la desviación media de los datos tabulados siguientes:

Intervalo	Marca = Xi	Fr	Fi · $\lvert\bar{X}-X_i\rvert$
[0 , 200)	100	1	450
[200 , 400)	300	3	750
[400 , 600)	500	3	150
[600 , 800)	700	2	300
[800 , 1000)	900	3	1050

15. Calcula la media y la desviación típica en
a) 2000, 2500
b)1750, 2750
c) 2500, 2500

16. Calcula la media y la desviación típica de los datos:

3	1	1	3	1	4
4	4	4	1	1	4
4	2	2	2	3	2
4	2	4	2	1	3

17. Calcula el coeficiente de variación de los datos del ejercicio anterior.

18. Calcula la media y la desviación típica de los datos:

25	29	40	9	32	4
15	35	26	24	16	2
11	16	37	10	30	2
35	17	8	40	38	5

19. Calcula el coeficiente de variación de los datos del ejercicio anterior.

20. Calcula la media y la desviación típica de los datos agrupados siguientes:

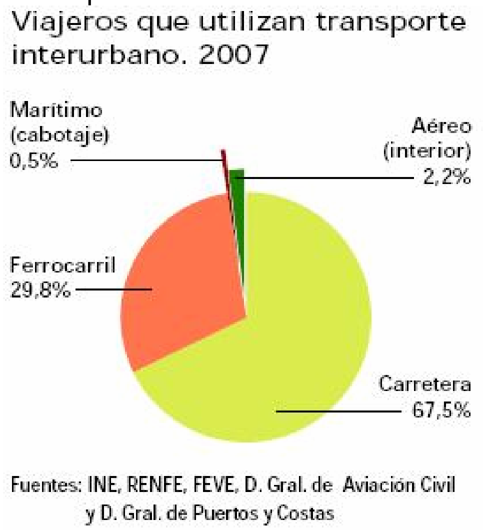
Xi	fi
5	7
10	0
15	2
20	2
25	4
30	2

21. Haz los cálculos para un millón de habitantes en cada comunidad.

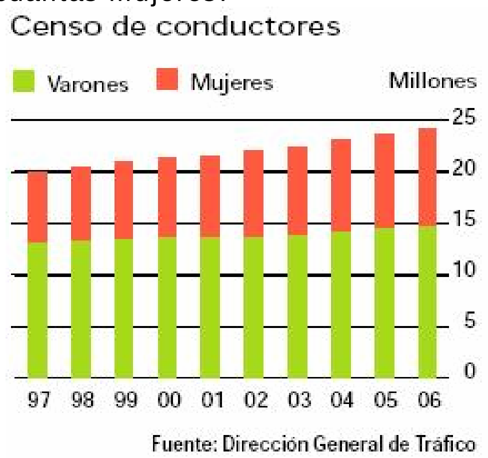
Tasa de criminalidad. 2006
Infracciones penales por 1.000 hab.

Tasas más altas	
Illes Balears	78,8
Comunidad de Madrid	70,8
Comunitat Valenciana	67,5
Ceuta	67,4
Cataluña	65,3

22. De cada millón de viajeros, ¿cuántos corresponden a cada sector?



23. ¿Cuántos conductores había en el año 2002? ¿Cuántos eran hombres y cuántas mujeres?



24. ¿Entre qué años aumentaron más los detenidos por infracciones penales?

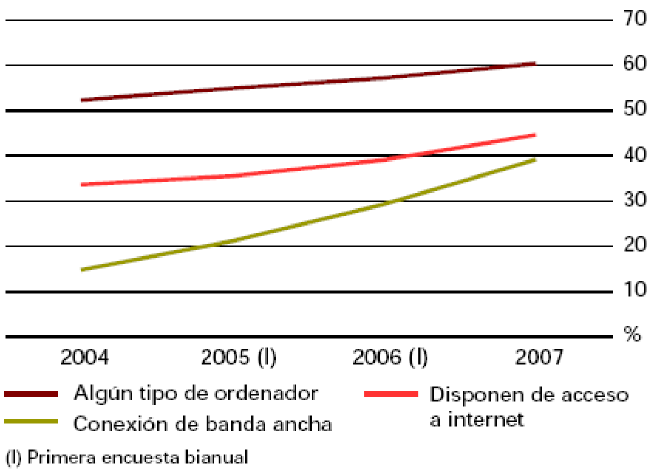
Para saber más

El Instituto Nacional de Estadística publica periódicamente datos como estos. Consulta la web. (www.ine.es)

Equipamiento tecnológico de los hogares

Según datos de la Encuesta sobre Equipamiento y Uso de las Tecnologías de Información y Comunicación en los Hogares, en 2007 el 99% de los hogares dispone de teléfono (ya sea fijo o móvil), el 99,5% dispone de televisión y el 22,8% tiene recepción de televisión digital terrestre (TDT). En una de cada cinco viviendas con televisión, alguna de ellas es de pantalla plana (plasma, LCD). El DVD se halla presente en tres de cada cuatro hogares, en detrimento del vídeo.
Un 60,4% dispone de algún tipo de ordenador.

Evolución del equipamiento TIC en viviendas

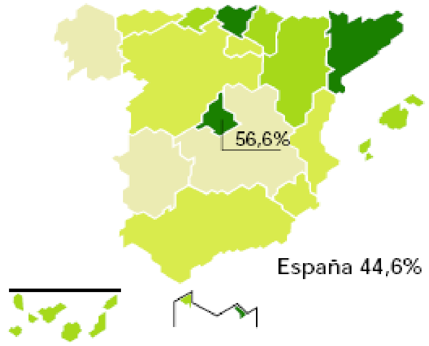


La banda ancha gana adeptos

6,5 millones de viviendas familiares tienen acceso a internet (un 44,6% del total). El 39% de los hogares disponen de conexión mediante banda ancha (ADSL, red de cable,...), lo que supone un incremento de 10 puntos respecto al año 2006. El mayor porcentaje de viviendas con acceso a internet se da en Comunidad de Madrid (56,6%) y Cataluña (51,3%). La diferencia en puntos porcentuales entre sexos respecto a los principales indicadores de uso de TIC se reduce en 2007, tanto en el uso de ordenador como en los usuarios frecuentes; sin embargo, aumenta en el acceso a
internet. El 60,5% de los varones han usado internet alguna vez frente a un 54,1% de las mujeres. En la Unión Europea, los países que disponen de indicadores TIC superiores a la media se encuentran, principalmente, en el norte de Europa. Por debajo de la media, se sitúan los países del área mediterránea o los que son de reciente ingreso.

España en cifras

Viviendas que disponen de acceso a internet. 2007



50% o más
De 45 a 50%
De 35 a 45%
Menos de 35%

Uso de TIC en hogares. 2007

	Hogares con acceso a internet (%)	Personas que compraron por internet (%)
Países Bajos	83	55
Suecia	79	53
Dinamarca	78	56
Luxemburgo	75	47
Alemania	71	52
Finlandia	69	48
Reino Unido	67	53
Bélgica	60	21
Austria	60	36
Eslovenia	58	16
Irlanda	57	33
UE-27	54	29
Estonia	53	9
Letonia	51	11
Francia	49	:
Eslovaquia	46	16
España	45	18
Lituania	44	6
Italia	43	10
Polonia	41	16
Portugal	40	9
Chipre	39	10
Hungría	38	11
República Checa	35	17
Grecia	25	8
Rumanía	22	3
Bulgaria	19	3
Malta	:	:

: Dato no disponible   Fuente: Eurostat

Utilizar la Hoja de Cálculo

	A
1	3
2	4
3	5
4	3
5	4
6	6
7	3
8	3
9	4

Introducción de datos y primeros cálculos

En general, las siguientes opciones están disponibles en todas las hojas de cálculo, en particular en la de Openoffice y en Excel.

- ✓ **Abre** una hoja de cálculo e introduce los datos 3, 4, 5, 3, 4, 6, 3, 3, 4 en la columna A, en A1, A2,... estos valores serán los datos sobre los que haremos los primeros cálculos.

Los datos están en el área "A1:A9" de la hoja de cálculo.

Si los datos estuvieran en 3 filas x 3 columnas, empezando por A1, sería "A1:C3".

Y por ejemplo, si con el ratón selecciono las celdas de la imagen adjunta, el área que cubro es “A2:C3”.

	A	B	C
1	3		
2	4		
3	5		

Hay funciones para todas y cada uno los cálculos estadísticos que hemos estudiado y muchas más que puedes investigar por tu cuenta. Las funciones hacen cálculos con los números del área que se les proporciona.

Veamos como se harían los cálculos para los datos que hemos introducido. Haremos los cálculos en la columna C, la B la usaremos para indicar el nombre del cálculo que hay a continuación.

B26 fx

	A	B	C
1	3	Moda	3
2	4	Máximo	6
3	5	Mínimo	3
4	3	Rango	3
5	4	Suma	35
6	6	Media	3,888888889
7	3	Mediana	4
8	3	Cuartil 1º	3
9	4	Cuartil 3º	4
10		Desviación típica	1,054092553
11		Desviación media	0,790123457
12			

Moda: En la celda C1 introduce la fórmula **=moda(A1:A9)**.

Máximo: En C2 escribe **=máx(A1:A9)**

Mínimo: Introduce **=min(A1:A9)**

Rango: =C2-C3

Suma: =**suma(A1:A9)**

Media: =promedio(área) Recuerda lo que es el **área** de los datos, **A1:A9**

Mediana: =mediana(área)

Cuartil 1º. =cuartil(área;1)

Cuartil 3º. =cuartil(área;3)

Desviación media: =desprom(área)

Desviación típica: =desvest(área)

Ejercicio

Introduce datos en un área mas grande que la anterior, al menos de 20 celdas y haz todos los cálculos de dos formas, con la hoja de cálculo y como lo has estudiado. Si todos los resultados son correctos esta hoja te vale para cualquier conjunto de datos de ese tamaño.

ANEXO

Valores aleatorios.

Si en 20 celdas escribimos **=aleatorio()** (podemos escribirlo en una y copiarlo en las otras) tendremos 20 datos entre 0 y 1 aleatorios. Si queremos que sean números comprendidos entre 0 y 20 escribiremos **=20*aleatorio()** Y si queremos que no lleven decimales escribiremos **=entero(20*aleatorio())** De esta forma nos inventamos 20 datos para hacer cálculos estadísticos.

Contar

Si tenemos introducidos una cantidad grande de datos. Con la función **=contar(área)** nos da la cantidad de números del área (imagina que hay celdas vacías y no es fácil contar las que están rellenas de números).

Si lo que tenemos son datos cualitativos (textos) usaremos **=contara(área)** para que nos cuente las celdas ocupadas del área indicada.

Agrupar datos.

• En **variable discreta.** Si en un área de la hoja de cálculo tenemos 20 números enteros entre 0 y 4, por ejemplo. ¿Cómo podemos contar cuántos de ellos son un 4? Escribiremos en una celda en blanco **=contar.si(área;4).** Para contar el resto usaremos en la celda que nos convenga **=contar.si(área;0), =contar.si(área;1), =contar.si(área;2), …**

14	Datos		Marca	Frecuencia
15	1	4	X1=0	5
16	0	0	X2=1	2
17	3	0	X3=2	5
18	2	3	X4=3	3
19	2	3	X5=4	5
20	4	4		Suma
21	2	1		20
22	4	0		
23	0	4		
24	2	2		

Por ejemplo. En la imagen de la izquierda hay 20 datos generados aleatoriamente entre 0 y 4. En la columna Marca indico que valores voy a contar en la siguiente columna, y en la columna frecuencia uso la fórmula ‘**=contar.si(área;valor)**‘ escribiendo: =contar.si(área;0), =contar.si(área;1), =contar.si(área;2), …

Y finalmente compruebo sumando las frecuencias que se han contado todos los datos (en la celda D21 escribo **=suma(d15:d19)**.

Ejercicio. *Genera 20 datos aleatorios entre 0 y 4 y haz una tabla de frecuencias usando la función contar.si Calcula todos los parámetros estadísticos estudiados (rango, máximo, mínimo, media,…).*

• En **variable continua.** Si tenemos 100 alturas entre 150 y 200 centímetros en un área de una hoja de cálculo y queremos saber cuántas están en el intervalo [150,160) usaremos **=contar.si(area;">=150")-contar.si(area;">=160") ;** para el intervalo [160,170) usaremos **=contar.si(area;">=160")-contar.si(area;">=170")** y así para cada uno de los intervalos.

• En **variable cualitativa.** Si lo que tenemos es 100 colores y queremos saber cuántos rojos hay se escribe: **=contar.si(área;"rojo")**

Clasificar

Según el tipo de variable que empleemos, usaremos la fórmula ‘contar.si’ sobre el área de datos tantas veces como sea necesario para clasificar todos los datos y nos pueda ser de utilidad. Así, para colores usaremos =contar.si(área;"rojo"), =contar.si(área;"verde"), … tantas veces como colores tengamos, de forma ordenada, en una columna por ejemplo.

Ejemplo

Vamos a inventarnos el peso de 50 personas con valores entre 50 y 110. Usaremos la fórmula **=aleatorio()*60+50**, si queremos que sean valores enteros se pone **=entero(aleatorio()*50+50)** y la copiaremos en el área **A1:E10.**

Ahora hay que clasificar los datos. Como todos están entre 50 y 110 los intervalos tendrán que reflejarlo. Vamos ha realizar dos tablas distintas, una con valores de 20 en 20 y otra con valores de 10 en 10

Para primera, copiaremos la siguiente tabla en un lugar vacío de la hoja de cálculo

Intervalo, marca	**Frecuencia**
[50,70] 60	=contar.si(A1:E10;">=50")-contar.si(A1:E10;">=70")
[70,90] 80	=contar.si(A1:E10;">=70")-contar.si(A1:E10;">=90")
[90,110] 100	=contar.si(A1:E10;">=90")-contar.si(A1:E10;">=110")

Para la segunda, copiaremos esta tabla.

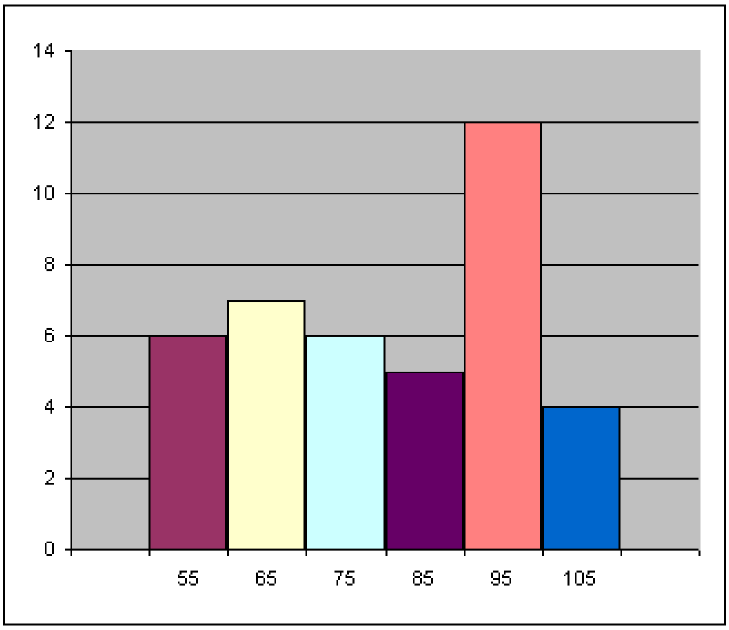
Intervalo, marca	**Frecuencia**
[50,60] 55	=contar.si(A1:E10;">=50")-contar.si(A1:E10;">=60")
[60,70] 65	=contar.si(A1:E10;">=60")-contar.si(A1:E10;">=70")
[70,80] 75	=contar.si(A1:E10;">=70")-contar.si(A1:E10;">=80")
[80,90] 85	=contar.si(A1:E10;">=80")-contar.si(A1:E10;">=90")
[90,100] 95	=contar.si(A1:E10;">=90")-contar.si(A1:E10;">=100")
[100,110] 105	=contar.si(A1:E10;">=100")-contar.si(A1:E10;">=110")

Ejercicio
Genera 100 números de 0 a 80 y haz dos agrupaciones en intervalos distintas. Por ejemplo, una de 10 en 10 y otra de 20 en 20.

Gráficos

Sencillo y sin etiquetas. Basta con seleccionar el área de las frecuencias de los datos y crear el gráfico pulsando en gráficos del menú insertar. Después podemos elegir el tipo de gráfico que queremos, y el aspecto de este entre una gran variedad de opciones que incorporan todas las hojas de cálculo.

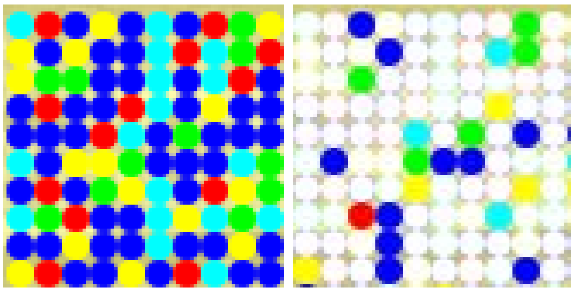
Con etiquetas: Lo más sencillo es utilizar la primera fila o primera columna para las etiquetas. En las opciones del gráfico habrá que activar y/o desactivar la que corresponda con la forma de presentar los datos en la hoja.



Ejercicio
Haz dos gráficos diferentes, uno para cada una de las distribuciones del ejercicio anterior.

Recuerda lo más importante

Población **Muestra**



Variables estadísticas:

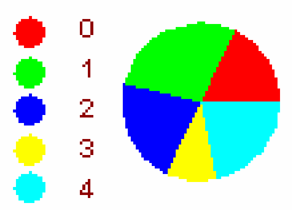
- Cualitativa, color preferido;
- Cuantitativa discreta, nº de hermanos
- cuantitativa continua, altura.

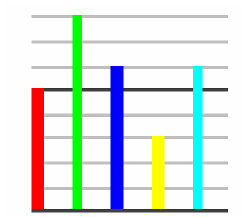
Nº de hermanos: 4 3 2 3 1 2 0 2 0 1 2 3 1 2 4 0 1 1 4 1 1 4 0 4 2 0 4 1

Recuento de datos:

xi	fi	xi·fi	$fi\cdot(xi-\overline{X})^2$
0	5	0	0
1	8	8	6,37
2	6	12	0,06
3	3	9	3,67
4	6	24	26,64
Total	28	53	54,67

Gráficos de **sectores** y **barras**



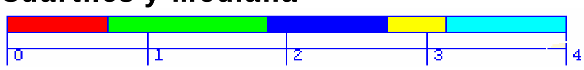


Media y **moda**

Media $= \overline{X} = \dfrac{53}{28} = 1.89$

Moda = Mo = 1

Cuartiles y mediana



Me=2, Q1=1, Q3=3

Rango.

De 0 a 4, de amplitud 4

Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{\frac{54.67}{28}} = 1.39$$

Coeficiente de variación

CV = 1,39 / 1,89 = 0,73 = 73%

Altura: 172 162 147 184 140 156 153 186 157 189 162 175 162 158 163 150 152 163 151 182 146 154 163 170 183 162 176 167 168 165

Intervalo	x_i	f_i	$x_i\cdot f_i$	$(x_i-\overline{x})^2\cdot f_i$
[140,150)	145	3	435	1200
[150,160)	155	8	1240	800
[160,170)	165	10	1650	0
[170,180)	175	4	700	400
[180,190)	185	5	925	2000
Total		30	4950	4400

Media:

$$\overline{x} = \frac{4950}{30} = 165$$

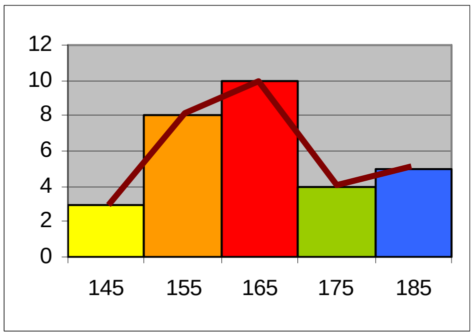
Varianza y Desviación típica:

$$\sigma^2 = \frac{4400}{30} = 146,67 \qquad \sigma = \sqrt{146,67} = 12,11$$

Coeficiente de variación:

CV= 12,11/165 = 0,073 = 7,3%

Histograma y polígono de frecuencias:



Autoevaluación

1. Haz un recuento de los datos siguientes

2	3	2	4	1	3
3	3	4	3	2	1
3	4	3	2	1	2
1	1	3	1	3	3

2. Haz un gráfico de barras para los datos anteriores.

3. Calcula la media de los datos dados por la tabla

Xi	fi
1	11
2	3
3	5
4	5

4. Calcula la mediana de los datos anteriores.

5. Calcula el primer cuartil de los datos del ejercicio 3

6. Calcula el tercer cuartil de los datos del ejercicio 3

7. Calcula en rango de los datos del ejercicio 3

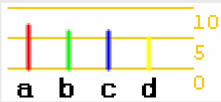
8. Calcula la desviación media de los datos anteriores

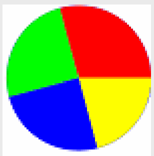
9. Calcula la desviación típica de los datos del ejercicio 3

10. Calcula el coeficiente de variación para los datos del ejercicio 3

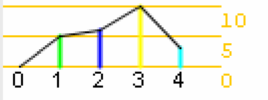
Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 400 b) 50
2. 0,5%
3. V- cualitativa: tipo animal, color de ojos.
   V. cuantitativa discreta: número de compañeros.
   V. cuantitativa continua: peso, temperatura y metros cuadrados.
4. a→7, b→6, c→6 y d→5





5. 0→0, 1→5, 2→6, 3→10, 4→3



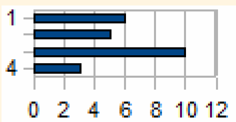
6. En 10: 1→3, 2→6, 3→5, 4→5, 5→5, 6→13, 7→4, 8→2, 9→7 y 10→4 .
   En 5: (1 ó 2)→9, (3 ó 4)→10, (5 ó 6)→18, (7 u 8)→6 y (9 ó 10)→11
7. a) (14+16+18)/3 = 16
   b) (24+26+28+26)= 104/4 = 26
   c) (1000+1200+1800+2000)/4=1500
8. $\overline{X} = 2,46$
9. $\overline{X} = 9,77$
10. Mo = 3 , es el valor que mas veces aparece, 10 en total.
11. 1→5, 2→6, 3→10 y 4→3.
    Mediana = 3, Q1=2 y Q3=3
12. a) (2+0+2)/3 = 1,3333...
    b) (2+0+2+0)= 4/4 = 1
    c)(500+300+300+500)/4 = 1600/4=400
13. El rango oscila entre 1 y 40 con una amplitud de 39. $\overline{X} = 20,58$, DM=8,92
14. $DM = \dfrac{2700}{12} = 225$
15. a) $\overline{X} = 2250$ $\sigma = 250$
    b) $\overline{X} = 2250$ $\sigma = 500$
    c) $\overline{X} = 2500$ $\sigma = 0$
16. Media = 2,58 D. típica = 1,21
17. CV = 1,21/2,58 = 0,46
18. $\overline{X} = 21,08$ y $\sigma = 12,98$
19. CV= 0.62
20. $\overline{X} = 15,58$ y $\sigma = 9,68$
21. 78800, 70800, 67500, 67400 y 65300
22. Carretera 67500, aéreo 22000, marítimo 5000 y ferrocarril 298000
23. Aproximadamente 22.000.000, de los que hombres son 14.000.000 y mujeres 8.000.000

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1.

xi	1	2	3	4
fi	6	5	10	3

2.



3. $\overline{x} = 2,17$
4. Me= 2
5. Q1 = 1
6. Q3 = 3
7. rango=3
8. DM= 1,11
9. $\sigma = 1,24$
10. Cv=0,571

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

12

Probabilidad

Objetivos

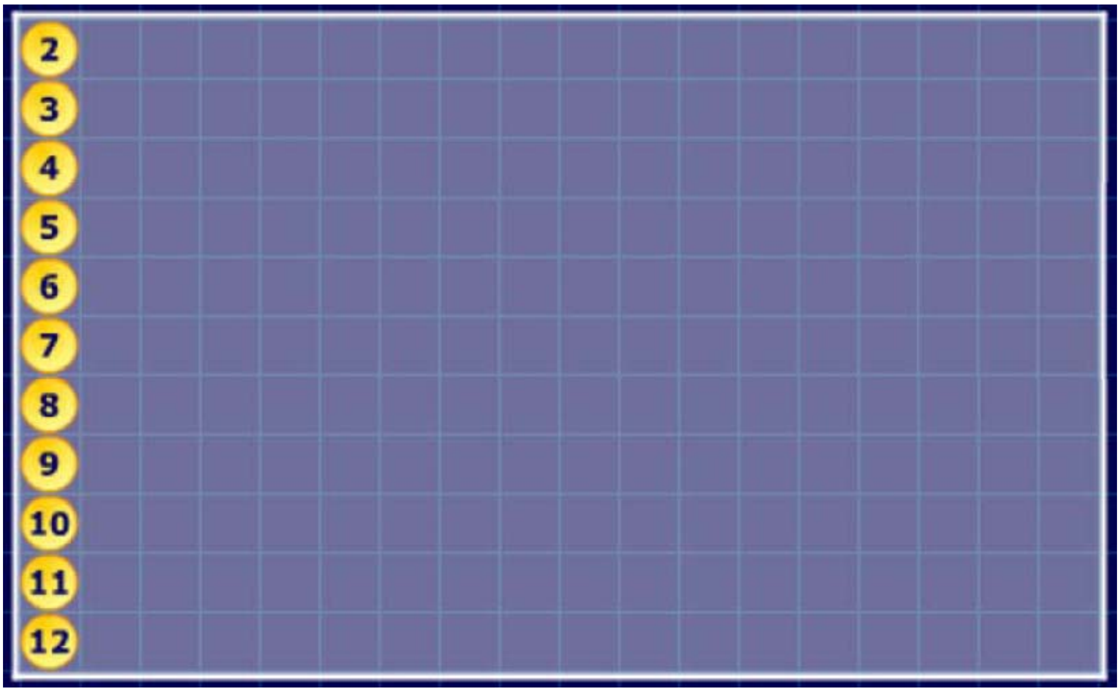
En esta quincena aprenderás a:

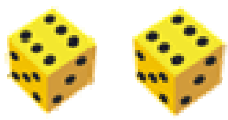
- Distinguir los experimentos aleatorios de los que no lo son.
- Hallar el espacio muestral y distintos sucesos de un experimento aleatorio.
- Realizar operaciones con sucesos.
- Determinar si dos sucesos son compatibles o incompatibles.
- Calcular la probabilidad de un suceso mediante la regla de Laplace.
- Calcular probabilidades mediante la experimentación.
- Conocer y aplicar las propiedades de la probabilidad.

Antes de empezar

"En el fondo la teoría de la probabilidad es sólo sentido común expresado con números".

Pierre Simón de Laplace





Investiga jugando

Se tiran dos dados, la ficha cuyo número coincide con la suma de los resultados avanza una casilla. ¿Todas tienen la misma probabilidad de ganar? , ¿por cuál apostarías?, tira los dados y compruébalo.

¿Sabías que la palabra azar procede del árabe “al zhar”, nombre con el que se designaban los dados por la flor de azahar que llevaban en sus caras.

1. Experimentos aleatorios

Espacio muestral y sucesos

Un **experimento aleatorio** es aquel que antes de realizarlo no se puede predecir el resultado que se va a obtener. En caso contrario se dice determinista.

Aunque en un experimento aleatorio no sepamos lo que ocurrirá al realizar una "prueba" si que conocemos de antemano todos sus posibles resultados.

- El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se suele designar con la letra **E**. Cada uno de estos posibles resultados se llama **suceso elemental**.
- Llamaremos **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral. El mismo espacio muestral es un suceso llamado **suceso seguro** y el conjunto vacío, **Ø**, es el **suceso imposible**.

Ø: símbolo con el que se designa el conjunto vacío o que no tiene ningún elemento.

En el experimento aleatorio de *"tirar un dado cúbico"* hay 6 posibles resultados:

En el experimento aleatorio de *"lanzar dos monedas"* hay 4 posibles resultados:

Técnicas de recuento

En muchas ocasiones un experimento aleatorio está formado por la sucesión de otros más sencillos, se dice **compuesto**, es el caso de "tirar dos dados", "lanzar dos o más monedas", "extraer varias cartas de una baraja",...

En estos casos para obtener el espacio muestral se puede utilizar alguna de estas técnicas:

- Construir una **tabla de doble entrada**, si se combinan dos experimentos simples.
- Hacer un **diagrama de árbol**, más útil si se combinan dos o más experimentos simples.

Observa que si el primer experimento tiene **m** resultados distintos y el segundo **n**, el número de resultados para la combinación de ambos experimentos es **m·n**.

TABLA de doble entrada

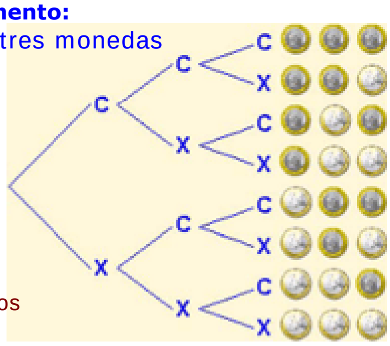
Experimento: Tirar dos dados

	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

6·6=36 resultados

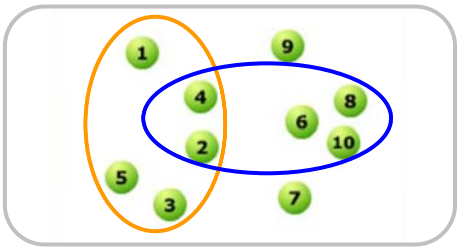
Diagrama de ÁRBOL

Experimento:
Lanzar tres monedas



2·2·2=8 resultados

Experimento aleatorio: *Extraer una bola y anotar el número.*



A="salir menor que 6" *B="salir par"*

A={1, 2, 3, 4, 5} $\overline{A}$ ={2, 4, 6}

B={2, 4, 6, 8, 10} $\overline{B}$ ={1, 2, 3}

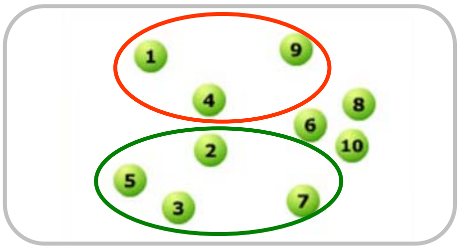
A∪B={1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10}

A∩B={2,4}

Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos A y B de un espacio muestral E, llamaremos:

- Suceso **contrario** de A al que ocurre cuando no ocurre A, lo indicaremos $\overline{\mathbf{A}}$.
  Lo forman los sucesos elementales que no están en A.
- Suceso **unión** de A y B, **A∪B**, es el que ocurre cuando ocurre **A o B**, al menos uno de los dos.
  Se forma juntando los sucesos elementales de A y B.
- Suceso **intersección** de A y B, **A∩B** al **suceso** que ocurre cuando ocurren **A y B** a la vez.
  Se forma con los sucesos elementales comunes .

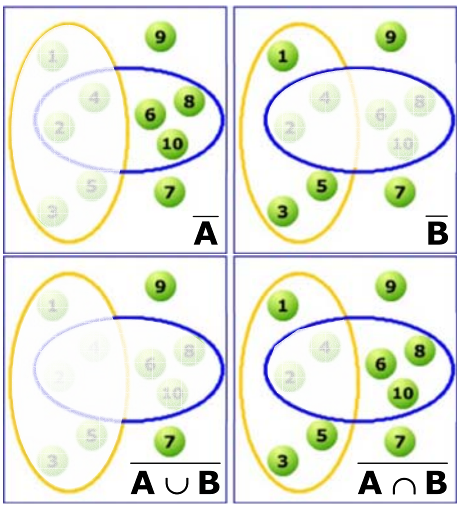


C="salir cuadrado perfecto"
D="salir nº primo"
A y B incompatibles

Cuando la intersección de dos sucesos es el suceso imposible, es decir que no pueden ocurrir simultáneamente nunca, se dice que ambos son **incompatibles**.

A y B **incompatibles** si **A∩B=Ø**

<u>Atención</u>: No hay que confundir los sucesos contrarios y los sucesos incompatibles; un suceso y su contrario siempre son incompatibles, no pueden ocurrir a la vez, pero dos sucesos incompatibles no tienen por qué ser contrarios.



$\overline{A}$ ={6, 7, 8, 9, 10} $\overline{B}$ ={1, 3, 5, 7, 9}

$\overline{A} \cap \overline{B}$ = {7, 9} = $\overline{A \cup B}$

$\overline{A} \cup \overline{B}$ = {1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10} = $\overline{A \cap B}$

Propiedades de las operaciones con sucesos

La unión e intersección de sucesos y el suceso contrario cumplen:

- La unión de un suceso y su contrario es el suceso seguro; la intersección es el suceso imposible.

$$A \cup \overline{A} = E \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$$

- El contrario de $\overline{A}$ es A
- El contrario de la unión es la intersección de los contrarios.

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- El contrario de la intersección es la unión de los contrarios.

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

EJERCICIOS resueltos

1. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y en caso afirmativo halla su espacio muestral:

   a) Extraer una carta de una baraja española y anotar el palo.

   b) Pesar un litro de aceite.

   c) Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos los catetos.

   d) Elegir sin mirar una ficha de dominó.

   e) Averiguar el resultado de un partido de fútbol antes de que se juegue.

   f) Sacar una bola de una bolsa con 4 bolas rojas.

   g) Sacar una bola de una bolsa con 1 bola roja, 1 verde, 1 azul y 1 blanca.

   h) Lanzar al aire una moneda y observar el tiempo que tarda en llegar al suelo.

   SOLUCIÓN: Son aleatorios, puesto que no podemos conocer de antemano el resultado los siguientes:
   a) Espacio muestral: E={OROS, COPAS, ESPADAS, BASTOS}
   d) El espacio muestral está formado por cada una de las 28 fichas que componen el dominó
   e) Espacio muestral: E={1, X, 2}
   g) Espacio muestral: E={ROJA, VERDE, BLANCA, AZUL}

2. Calcula las posibilidades mediante un diagrama de árbol:

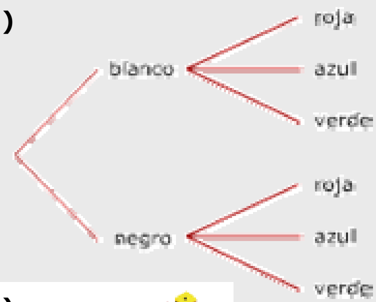
   a) En un equipo de fútbol-sala disponen para jugar de pantalones blancos o negros, y de camisetas rojas, azules o verdes. ¿De cuántas maneras se pueden vestir para un partido?

   b) Se tira una moneda y un dado, ¿cuáles son los resultados posibles?

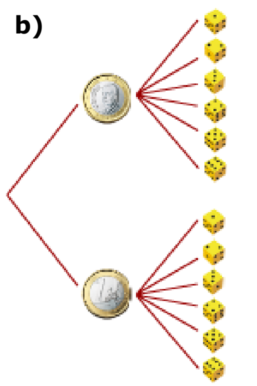
   c) Se tira una moneda, si sale cara se saca una bola de la urna A que contiene una bola roja, una azul y una verde; y si sale cruz se saca de la urna B en la que hay una bola roja, una azul, una blanca y una negra. Escribe los posibles resultados.

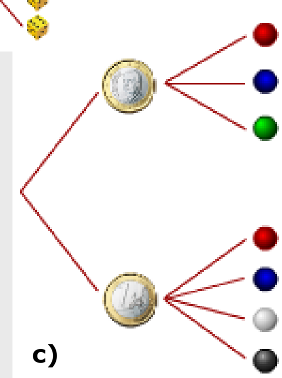
   d) Marta y María juegan un campeonato de parchís, vence la primera que gane dos partidas seguidas o tres alternas. ¿De cuántas maneras se puede desarrollar el juego?

a)



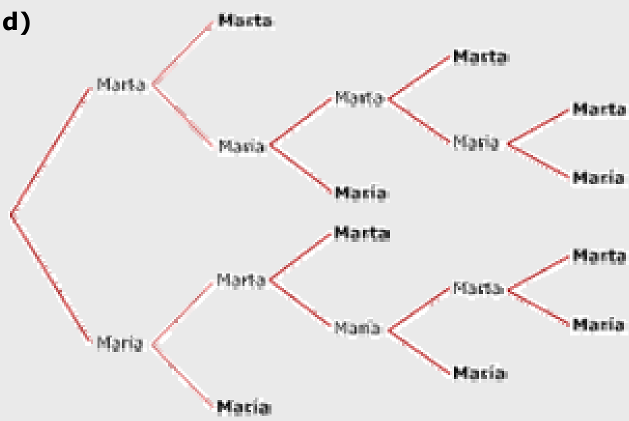
b)





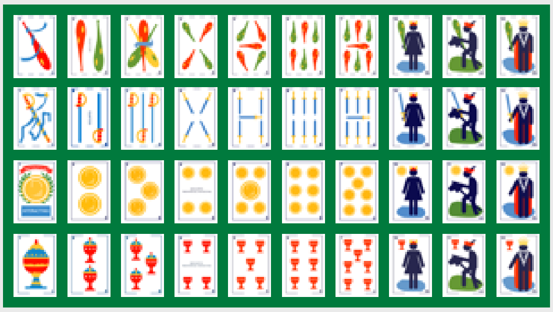
c)

d)



EJERCICIOS resueltos

3. Considera el experimento aleatorio de extraer una carta de la baraja. Expresa con uniones e intersecciones de A y de B, o con el contrario, los siguientes sucesos:



a) A="salir figura" B="salir bastos"
"Que salga figura o sea de bastos" = $A \cup B$

b) A= "salir un rey" B="salir copas"
"Salir copas pero que no sea rey" = $\overline{A} \cap B$

c) A="salir un as" B="salir oros"
"Que no salga un as ni de oros" = $\overline{A} \cap \overline{B}$

d) A="salir un rey" B="salir espadas"
"Salir el rey de espadas" = $A \cap B$

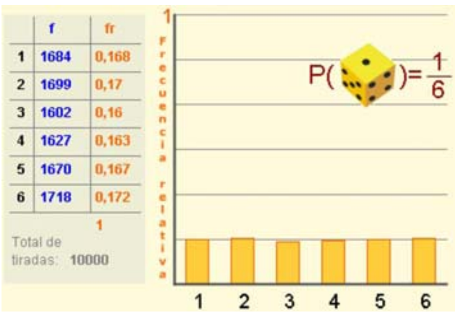
4. Se extraen dos cartas de la baraja y se mira el palo. Indica cuál, a, b ó c, es el suceso contrario a S?

S = "Las dos son de oros"
a) "Ninguna es de oros"
b) "Al menos una es de oros"
c) "Al menos una no es de oros"

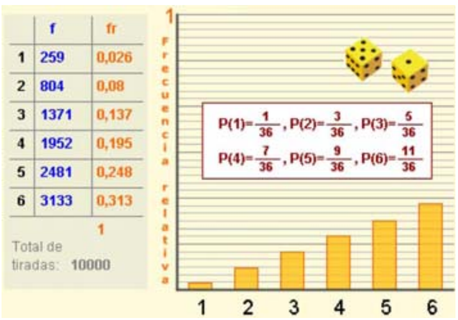
S = "Ninguna es de copas"
a) "Las dos son de copas"
b) "Al menos una es de copas"
c) "Al menos una no es de copas"

En el primer caso la solución es la opción c, lo contrario de que las dos sean de oros es que al menos una no lo sea.
En el segundo, b es la opción correcta.

2. Probabilidad



Al tirar un dado muchas veces, las frecuencias relativas de cada cara se estabilizan en torno a 1/6.



El gráfico muestra las frecuencias relativas de cada resultado obtenido al tirar dos dados y elegir el nº mayor, al repetir el experimento muchas veces.

Probabilidad de un suceso

La probabilidad de un suceso, S, indica el grado de posibilidad de que ocurra dicho suceso. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1, y lo escribimos **P(S)**.

Si P(S) está próximo a 0 el suceso es poco probable y será más probable cuanto más se aproxime a 1, que es la probabilidad del suceso seguro, P(E)=1.

Cuando se repite un experimento aleatorio muchas veces, la **frecuencia relativa** con que aparece un suceso tiende a estabilizarse hacia un valor fijo, a medida que aumenta el número de pruebas realizadas.

Este resultado, conocido como **ley de los grandes números**, nos lleva a definir la probabilidad de un suceso como el número hacia el que tiende la frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces.

La regla de Laplace

Cuando dos sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir al realizar un experimento aleatorio se dicen **equiprobables**.

Si en un espacio muestral todos los sucesos elementales son equiprobables, el experimento se dice regular y la probabilidad de un suceso cualquiera A, se puede calcular mediante la **Regla de Laplace**, según la cual basta contar, y hacer el cociente entre el nº de sucesos elementales que componen A y el nº de sucesos elementales del espacio muestral.

Se suele enunciar así:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{nº casos favorables}}{\textbf{nº casos posibles}}$$

En el experimento de lanzar tres monedas, hay 8 casos posibles:

A="salir tres caras"
Casos favorables: 1

$P(A) = \frac{1}{8}$

B="salir dos caras"
Casos favorables: 3

$P(B) = \frac{3}{8}$

C="al menos una cara"
Casos favorables: 7

$P(C) = \frac{7}{8}$

EJEMPLO: En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10, se extrae una al azar. *Casos posibles: 10*

✓ *¿Cuál es la probabilidad de que sea un nº par?*

Casos favorables: 5

$P(n^o\ par) = \frac{5}{10} = 0{,}5$

✓ *¿Cuál es la probabilidad de que sea un nº mayor que 6?*

Casos favorables: 4

$P(n^o\ mayor\ que\ 6) = \frac{4}{10} = 0{,}4$

Se tiran dos dados y se elige el mayor de los números obtenidos.

Hay 36 casos posibles.

	1	2	3	4	5	6
	2	2	3	4	5	6
	3	3	3	4	5	6
	4	4	4	4	5	6
	5	5	5	5	5	6
	6	6	6	6	6	6

$P(1) = \frac{1}{36}$ $P(2) = \frac{3}{36}$ $P(3) = \frac{5}{36}$

$P(4) = \frac{7}{36}$ $P(5) = \frac{9}{36}$ $P(6) = \frac{11}{36}$

Propiedades de la probabilidad

Al asignar probabilidades mediante la regla de Laplace o utilizando la frecuencia relativa puedes comprobar que se cumple:

- **0≤P(A)≤1**. La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.
- **P(E)=1**, **P(Ø)=0**. La probabilidad del suceso seguro es 1 y la del suceso imposible 0.
- La probabilidad de la unión de dos sucesos **incompatibles** es **P(AUB)=P(A)+P(B)**.

Además, de estas propiedades se deducen estas otras que resultan muy útiles para calcular probabilidades:

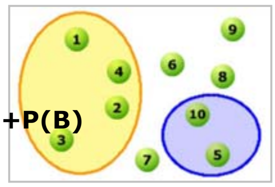
$$\mathbf{P(\overline{A})=1-P(A)}$$

$$\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

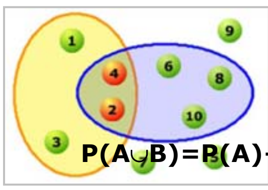
A="Sacar un nº menor que 5"
B="Sacar un nº múltiplo de 5"
A y B incompatibles

$P(A)=0{,}4$
$P(B)=0{,}2$
$P(A\cup B)=0{,}6$

$\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$



A="Sacar un nº menor que 5"
B="Sacar un nºpar"
A y B compatibles



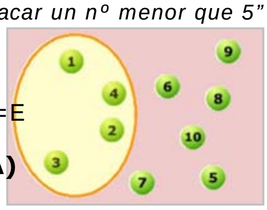
$P(A)=0{,}4$
$P(B)=0{,}5$
$P(A\cap B)=0.2$
$P(A\cup B)=0{,}7$

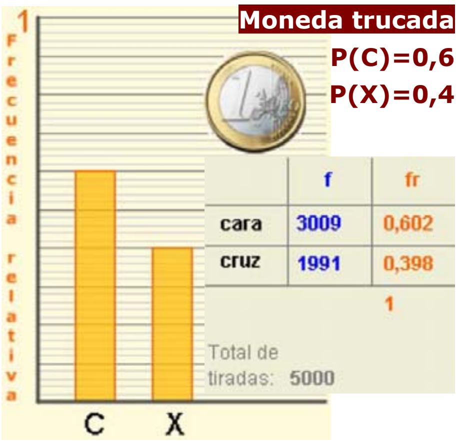
$\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

A="Sacar un nº menor que 5"

$P(A)=0{,}4$
$P(\overline{A})=0{,}6$
$A\cap \overline{A} = \varnothing$ $A\cup \overline{A} = E$

$\mathbf{P(\overline{A})=1 - P(A)}$





	f	fr
cara	3009	0,602
cruz	1991	0,398
		1

	f	fr
1	1924	0,096
2	2017	0,101
3	1962	0,098
4	1993	0,1
5	2054	0,103
6	10050	0,503
		1

Probabilidad experimental

La ley de Laplace nos permite calcular la probabilidad de sucesos regulares, pero si la experiencia es irregular desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos, entonces es preciso recurrir a la experimentación.

La probabilidad **experimental** es la probabilidad asignada a un suceso mediante el cálculo de la frecuencia relativa del mismo al repetir el experimento muchas veces.

Cuanto mayor es el número de pruebas realizadas más se aproxima el valor obtenido al valor desconocido de la probabilidad teórica. El número de pruebas a realizar dependerá del experimento y del nº de sus posibles resultados.

Observa los ejemplos de la izquierda.

- ✓ *Una moneda está trucada de manera que la probabilidad de salir cara no es la misma que la de salir cruz, para averiguar estas probabilidades se ha lanzado muchas veces obteniendo los resultados de la tabla. A la vista de éstos asignaremos a "salir cara" la probabilidad 0,6 y a "salir cruz" 0,4.*
- ✓ *Un dado está cargado de forma que la probabilidad de una de sus caras es cinco veces la de las demás. ¿De qué cara se trata?. ¿Cuál es su probabilidad?. Al repetir el lanzamiento muchas veces se observa que la cara cargada es la del nº 6, su probabilidad es 0,5 y la del resto de las caras 0,1.*

Simulación de experimentos

En muchas ocasiones realizar un experimento aleatorio un número elevado de veces no resulta fácil, entonces recurrimos a la simulación.

Simular un experimento aleatorio consiste en sustituirlo por otro más sencillo y capaz de reproducir los mismos resultados.

Las calculadoras científicas disponen de la tecla **RAND**, RAN# ó RANDOM que al activarla, genera un número al azar comprendido entre 0 y 1, llamado **número aleatorio**. Estos números resultan de gran utilidad en la simulación de experimentos.

Para simular el lanzamiento de un dado con la calculadora y estos números.

En tu calculadora pulsa sobre la tecla rand, ran# o random, multiplica por 6 (nº de resultados) el número que aparece, toma la parte entera y súmale 1, ya que los resultados van de 1 a 6.

ent(0,2932063716784·6)+1=2

EJERCICIOS resueltos

5. La ruleta es un conocido juego de los casinos. Consiste en una rueda equilibrada, dividida en 37 casillas numeradas del 0 al 36. El 0 es de color verde y si sale gana la banca.

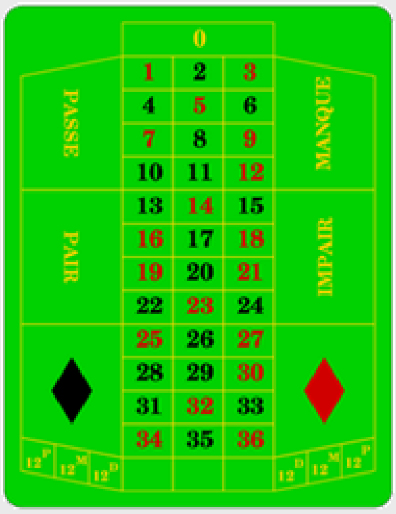
Hay diferentes tipos de apuestas, a un número sólo, a "par" o a "impar", a "rojo" o a "negro, a "passe" (nº>18) o a "falte" (nº<18), a una columna, …

Calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(17)=\frac{1}{37}$ b) $P(\text{"impar"})=\frac{18}{37}$

c) $P(\text{"2ª columna"})=\frac{12}{37}$ d) $P(\text{"par y rojo"})=\frac{8}{37}$

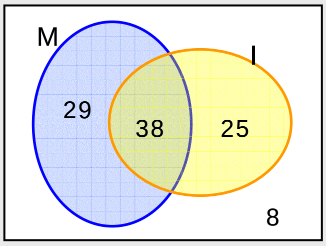
e) $P(\text{"impar y falte"})=\frac{9}{37}$ e) $P(\text{"rojo"})=\frac{18}{37}$



6. En la última evaluación, en mi clase aprobaron las Matemáticas el 67% y el Inglés el 63%, el 38% aprobaron las dos asignaturas. Elegido un estudiante de la clase al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Haya aprobado alguna de las dos b) No haya aprobado ninguna de las dos

c) Haya aprobado sólo las Matemáticas d) Haya aprobado sólo una de las dos



Hacer un diagrama facilita mucho la resolución del problema.

$P(M)=0,67$ $P(I)=0,63$ $P(A\cap B)=0,38$

a) "Alguna de las dos" es el suceso unión,
$P(M \cup I) = P(M)+P(I)-P(M\cap I) = 0,67+0,63-0,38 = 0,92$

b) No aprobar ninguna es el suceso contrario a aprobar alguna de las dos (al menos una).
$P(\text{alguna de los dos}) = 1 - 0,92 = 0,08$

c) $P(\text{"solo M"}) = P(M\cap \bar{I}) = 0,67 - 0,38 = 0,29$

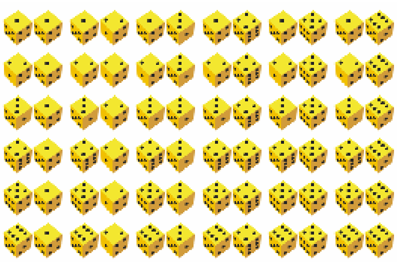
d) $P(\text{"solo M ó solo I"}) = 0,29 + 0,25 = 0,54$ (ó $0,92 - 0,38$)

7. Al tirar una chincheta puede caer con la punta hacia arriba o hacia abajo. Para averiguar la probabilidad de cada uno de estos sucesos, se ha realizado el experimento muchas veces obteniendo los resultados dados en la tabla. A la vista de ellos, ¿qué probabilidad asignarías al suceso "caer con la punta hacia abajo"?

Nº de tiradas	10	50	100	500	1000
Punta hacia arriba	7	29	65	337	668

En la tabla se observa que la frecuencia relativa del suceso "caer con la punta hacia arriba" tiende a 0,67.
Caer con la "punta hacia abajo" es el suceso contrario, se puede considerar $P(\text{"punta hacia abajo"}) = 1- 0,67 = 0,33$

Carrera con dados



P(2)=1/36
P(3)=2/36
P(4)=3/36
P(5)=4/36
P(6)=5/36
P(7)=6/36
P(8)=5/36
P(9)=4/36
P(10)=3/36
P(11)=2/36
P(12)=1/36

Para practicar

1. Elegimos una ficha de dominó al azar,
a) Describe los sucesos:
A="sacar una ficha doble"
B="sacar una ficha cuyos números sumen 5 ó múltiplo de 5"
b) Escribe $A\cup B$ y $A\cap B$

2. Escribe el espacio muestral del experimento resultante de tirar 3 monedas. Considera los sucesos:
A="Salir una cara"
B="Salir al menos una cara"
Escribe $A\cup B$, $A\cap B$ y el suceso contrario de B.

3. En una urna hay 15 bolas numeradas del 1 al 15, se extrae una de ellas; considera los sucesos:
A="Sacar un nº par"
B="Sacar un múltiplo de 4"
Escribe $A\cup B$ y $A\cap B$.

4. Lanzamos un dado dodecaédrico y anotamos el nº de la cara superior. Describe los sucesos:
A="Sacar un nº par"
B="Sacar un nº mayor que 5"
Escribe $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$ y $\overline{A}\cap\overline{B}$

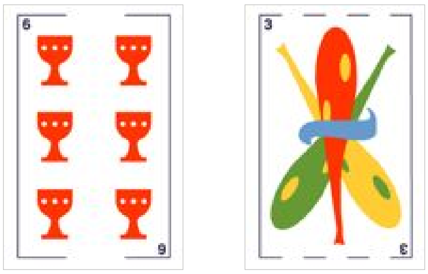
5. En una caja hay 5 bolas rojas, 4 verdes y 3 azules. Se extrae una bola y se anota el color, calcula la probabilidad de que sea verde.

6. Se elige al azar un nº entre los primeros 50 naturales (a partir del 1). Calcula la probabilidad de los sucesos:
A="salir un nº mayor que 4 y menor que 17".
B="Salir un cuadrado perfecto"

7. De una baraja española se extrae una carta, calcula la probabilidad de los sucesos:
A="Salir bastos"
B="No salir ni bastos ni as"

8. Lanzamos dos dados y nos fijamos en la menor de las puntuaciones. Calcula la probabilidad de que sea un 3.

9. Encima de la mesa tenemos las cartas de una baraja que aparecen abajo, sacamos otra carta y nos fijamos en su número, calcula la probabilidad de que la suma de los números de las tres cartas sea 15.



10. Extraemos una ficha de dominó, calcula la probabilidad de que la suma de los puntos sea menor que 7.

11. Con un 1, un 2 y un 3, formamos todos los números posibles de 3 cifras. Elegimos uno al azar, ¿qué probabilidad hay de que acabe en 3?.

12. Al girar la ruleta de la figura, calcula la probabilidad de que salga rojo y mayor que 3.

13. La probabilidad de un suceso es 0,21, calcula la del suceso contrario.

14. La probabilidad de un suceso A es $P(A)=0,55$, la de otro suceso B es $P(B)=0,45$ y la de la intersección de ambos es $P(A\cap B)=0,20$. Calcula la probabilidad de $A\cup B$.

15. Considera dos sucesos A y B de un experimento aleatorio. Si $P(A)=0{,}37$; $P(A\cup B)=0{,}79$ y $P(A\cap B)=0{,}06$; calcula la $P(\bar{B})$.

16. Un dado está trucado de manera que la probabilidad de sacar un nº par es 0,67; además $P(1)=P(3)=P(5)$. Calcula la probabilidad de sacar un 5.

17. En una urna hay bolas blancas y negras.

María dice*: "La probabilidad de sacar una bola blanca es 5/26"*

Sergio dice: *"La probabilidad de sacar una bola negra es 11/13"*

a) Pueden ser correctas ambas afirmaciones?

b) Si María tiene razón, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola negra?

18. En un restaurante ofrecen un menú que consta de primer plato a elegir entre ensalada, pasta o legumbres; un segundo plato a elegir entre carne o pescado; y postre a elegir entre fruta o helado. Ana elige su menú al azar, calcula la probabilidad de que coma:

a) Ensalada, carne y fruta.

b) Pasta y pescado.

Sugerencia: haz un diagrama de árbol

19. Llevo en el bolsillo 2 monedas de 50 céntimos, dos de 20 céntimos y dos de 10 céntimos. También llevo un agujero por el que se me caen dos y las pierdo. Calcula la probabilidad de haber perdido:

a) 1 euro

b) Menos de 40 céntimos.

c) Más de 50 céntimos.

Sugerencia: haz una tabla de doble entrada

20. En un instituto el 66% de los estudiantes son aficionados al fútbol y el 42% lo son al baloncesto. Hay un 27% que son aficionados a ambos deportes. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no sea aficionado al fútbol ni al baloncesto.

21. A una reunión asisten 32 hombre y 48 mujeres. La mitad de los hombres y la cuarta parte de las mujeres tienen 40 años o más. Elegida una persona al azar calcula la probabilidad de que:

a) sea mujer y menor de 40 años

b) sea menor de 40 años.

Sugerencia: Completa la tabla

	40 o más	<40	
HOMBRE			32
MUJER			48

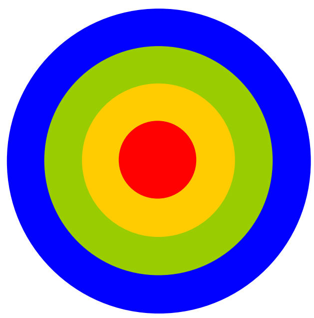
22. He perdido algunas cartas de una baraja. Si de entre las que me quedan saco una al azar, la probabilidad de que sea de copas es 0,20, de que sea un rey es 0,13 y de que sea un rey o de copas es 0,30. ¿Está el rey de copas entre las cartas que me quedan?.

Sugerencia: Calcula la probabilidad de la intersección

23. A un humedal llegan todos los años bandadas de grullas en su camino a zonas cálidas. Para observar cuántas hay, se ha capturado y anillado una muestra de 40 grullas. Posteriormente se observan 50 de las que 3 llevan anilla, ¿cuántas grullas estimaremos que hay?.

Sugerencia: La probabilidad de que una grulla esté anillada será la misma en todas las muestras , y la calculamos a partir de la frecuencia relativa.

24. Se supone que la probabilidad de acertar al tirar un dardo en cualquier punto de la diana es la misma. Calcula la probabilidad de acertar en la zona de color verde.

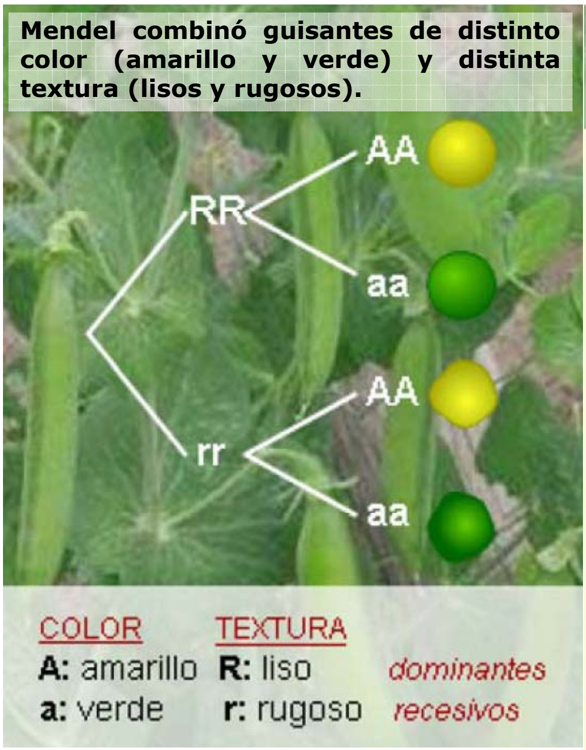


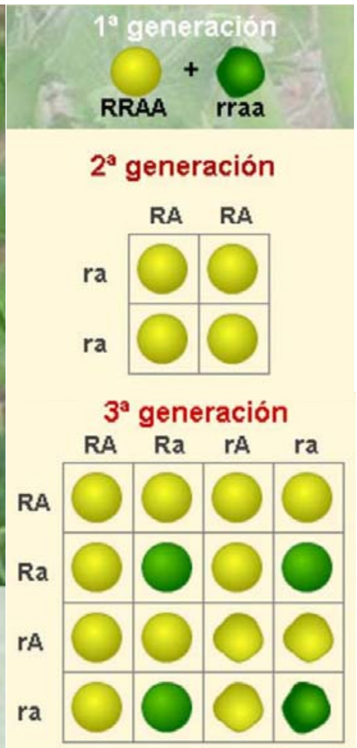
Para saber más

Probabilidad y genética
Las leyes de Mendel

Gregor Mendel (1822-1884), fue un monje y naturalista nacido en Heizendorf (actual Hyncice, República Checa).

A través de sus trabajos, que llevo a cabo con distintas variedades de la planta del guisante, fue el primero en describir las leyes que rigen la herencia genética. Para ello aplica la probabilidad como describe en su obra *"La Matemática de la herencia"*.





Al cruzar dos líneas puras, distintas para algún carácter, el 100% de los descendientes son iguales entre si e iguales al parental dominante.

(1ª Ley de Mendel)

En la 3ª generación:

$P(\text{amarillo liso}) = \frac{9}{16}$

$P(\text{amarillo rugoso}) = \frac{3}{16}$

$P(\text{verde liso}) = \frac{3}{16}$

$P(\text{verde rugoso}) = \frac{1}{16}$

Probabilidad condicionada
¿Dependientes o independientes?

En ocasiones la probabilidad de un suceso varía si se calcula con la condición de que ha ocurrido otro anteriormente.
Imagina que jugando a la ruleta sabemos que no ha salido el 0, podemos considerar entonces que P(par)=1/2.

- Si además sabemos que ha salido "rojo"

  $$P(\text{par sabiendo que es rojo}) = \frac{\text{nº resultados pares y rojos}}{\text{nº resultados pares}} = \frac{8}{18}$$

  Con esta condición la probabilidad de "par" ya no es ½, los sucesos "par" y "rojo" son DEPENDIENTES.

- Pero si sabemos que ha salido "passe"

  $$P(\text{par sabiendo que es passe}) = \frac{\text{nº resultados pares y passe}}{\text{nº resultados pares}} = \frac{9}{18}$$

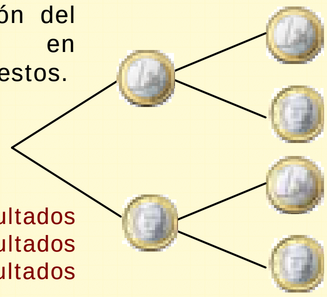
  La probabilidad de "par" sigue siendo ½, no ha cambiado, los sucesos "par" y "passe" son INDEPENDIENTES.

Recuerda lo más importante

Espacio muestral y sucesos

- **Experimento aleatorio**, el que no se puede predecir el resultado.
- **Espacio muestral** conjunto de todos los resultados posibles.
- Llamaremos **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral.
- Sucesos **incompatibles** si no se pueden realizar a la vez.

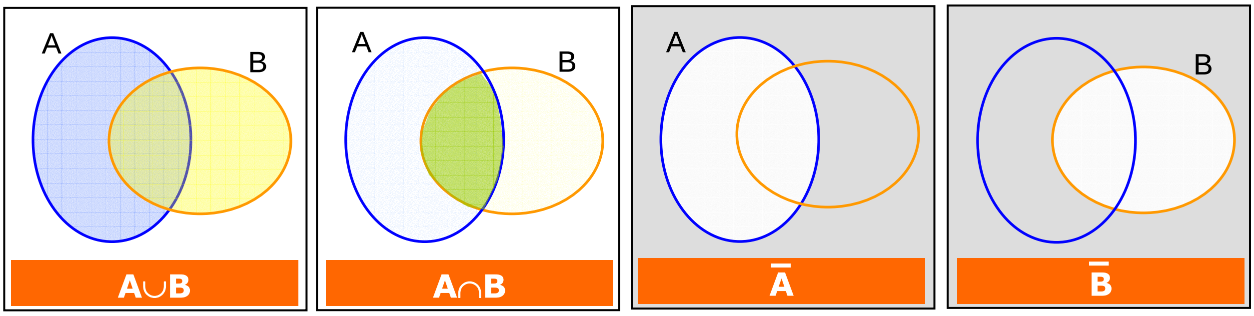
Un diagrama de árbol facilita la construcción del espacio muestral en experimentos compuestos.



1º: m resultados
2º: n resultados
Total: m·n resultados

Operaciones con sucesos

- Suceso **unión** de A y B, **A∪B**, es el que ocurre cuando ocurre A o B, alguno de los dos.
- Suceso **intersección** de A y B, **A∩B**, suceso que ocurre cuando ocurren A y B a la vez.
- Suceso **contrario** de A al que ocurre cuando no ocurre A, lo indicaremos $\overline{A}$.



Calcular probabilidades

- En experimentos regulares, cuando los sucesos elementales son equiprobables, con la **Regla de Laplace**

$$P(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}$$

- Si el experimento no es regular se recurre a la experimentación, tomando la probabilidad de A como su frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces.

Propiedades de la probabilidad

- **$0 \leq P(A) \leq 1$**.
- **$P(E)=1$**, **$P(\varnothing)=0$**.
- **$P(\overline{A})=1-P(A)$**

Probabilidad de la unión

- A y B incompatibles:
  $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
- A y B compatibles:
  $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Autoevaluación

1. Escribimos cada una de las letras de la palabra ALEATORIO en un papel y sacamos una al azar. Escribe el suceso "salir vocal"

2. Escribe el suceso contrario del calculado en ejercicio anterior.

3. En una bolsa hay 100 bolas numeradas del 0 al 99. Se extrae una al azar, calcula la probabilidad de que en sus cifras esté el 7.

4. En una bolsa hay 2 bolas rojas, 4 bolas verdes y 4 azules. Se saca una bola al azar, calcula la probabilidad de que NO sea verde.

5. Calcula la probabilidad de rojo en la ruleta de la figura

6. Se saca una carta de una baraja de 40, calcula la probabilidad de que sea de OROS o un AS.

7. Si A y B son dos sucesos tales que P(A)=0,64, P(B)=0,36 y P(A∩B)=0,12. Calcula P(A∪B).

	aprueban	suspenden
Grupo A	15	6
Grupo B	16	13

8. Los resultados de un examen realizado por dos grupos de 3º ESO se muestran en la tabla adjunta. Seleccionado un estudiante al azar calcula la probabilidad de que sea del grupo B y apruebe.

9. Un dado cúbico está trucado de manera que la probabilidad de sacar un cuatro es cuatro veces la probabilidad de cualquiera de las otras caras. Calcula la probabilidad de obtener un cuatro.

10. Se lanzan una moneda y un dado, calcula la probabilidad de que salga CARA y nº PAR.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. $A=\{00,11,22,33,44,55,66\}$
$B=\{05,14,23,55\}$
$A\cup B=\{00,05,11,14,22,23,44,55,66\}$
$A\cap B=\{55\}$

2. $A=\{cxx,xcx,xxc\}$
$B=\{ccc,ccx,cxc,xcc,cxx,xcx,xxc\}$
$A\cup B=A$ $A\cap B=B$ $\overline{B}=\{xxx\}$

3. $A\cup B=\{2,4,6,8,10,12\}$
$A\cap B=\{4,8,12\}$

4. $A\cap B=\{8,12\}$ $A\cap\overline{B}=\{4\}$
$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,2,3,5\}$

5. P(verde)=4/12=1/3

6. P(A)=12/50=0,24 P(B)=7/50

7. P(A)=1/4 P(B)=27/40

8. P(3)=7/36

9. Debe salir un 6, como ya hay uno:
P=3/38

10. En 16 de las 28 fichas,
P=16/28=0,57

11. Hay 6 casos posibles, P=2/6=1/3

12. P=0,3

13. $P(\overline{A})=1–0,21=0,79$

14. $P(A\cup B)=0,55+0,45–0,20=0,80$

15. $P(\overline{B})=1–P(B)=1–0,39=0,61$

16. P(impar)=0,33 P(1)=P(3)=p(5)=0,11

17. a) No pueden ser ciertas ambas ya que son sucesos contrarios y $5/26+11/13\neq1$
b) P("negra")=21/26

18. Hay 12 posibles menús
a) P(A)=1/12 b) P(B)=1/6

19. a) P(1)=4/36=1/9
b) P(menos de 0,40)=12/36=1/3
c) P("más de 0,50")=20/36=5/9

20. $P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=1–0,81=0,27$

21. Asisten 80 personas
a) P(mujer y menor de 40)=12/80=0,15
b) P(menor de 40)=28/80=0,35

22. $P(R\cap C)=P(R)+P(C)–P(R\cup C)=0,03$
La probabilidad de sacar el "Rey de Copas" no es 0, luego si que está.

23. P(grulla con anilla)=4/50=0,08
nº estimado = $40/0,08\cong 500$

24. Superficie de la diana= $\pi\cdot(4r)^2=16\pi r^2$
Superficie verde= $\pi\cdot(3r)^2-\pi\cdot(2r)^2=5\pi r^2$
P=5/16

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. {A, E, I, O}

2. {L, T, R}

3. 19/99

4. 6/10 = 0,6

5. 4/12 = 1/3

6. 13/40

7. 0,88

8. 15/50 = 0,3

9. 4/9

10. 3/12 = 0,25

No olvides enviar las actividades al tutor