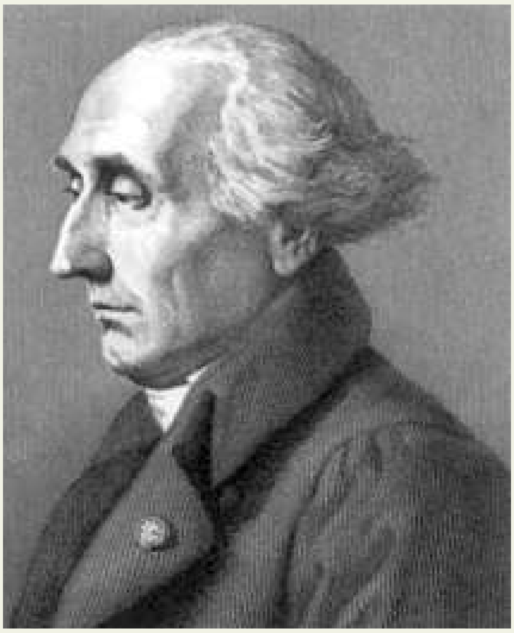
8 Derivada de una función. Aplicaciones(I)

Esta Unidad trata sobre la derivada, cuya importancia radica en sus muchas aplicaciones. Al igual que en primero de Bachillerato, usaremos la notación ***f'***, ideada por el matemático, físico y astrónomo de origen italiano J. L. Lagrange (1736 – 1813). Repasamos la definición, recordando que la derivada surge para hallar la tasa de variación instantánea y, por lo tanto, la velocidad de crecimiento de una función. Seguimos con las reglas para derivar. Incluimos la derivada de la función inversa, la derivación logarítmica y la derivada implícita. Con ellas somos capaces de derivar cualquier función real de variable real.



● *Joseph Louis Lagrange.*
(Wikipedia.org. Dominio Público)

Estudiamos la derivabilidad de las funciones. Consecuencias de la continuidad y la derivabilidad son los teoremas de Rolle, del valor medio o de Lagrange, del valor medio generalizado o de Cauchy y la Regla de L'Hôpital, cuya demostración teníamos pendiente desde la Unidad 8.

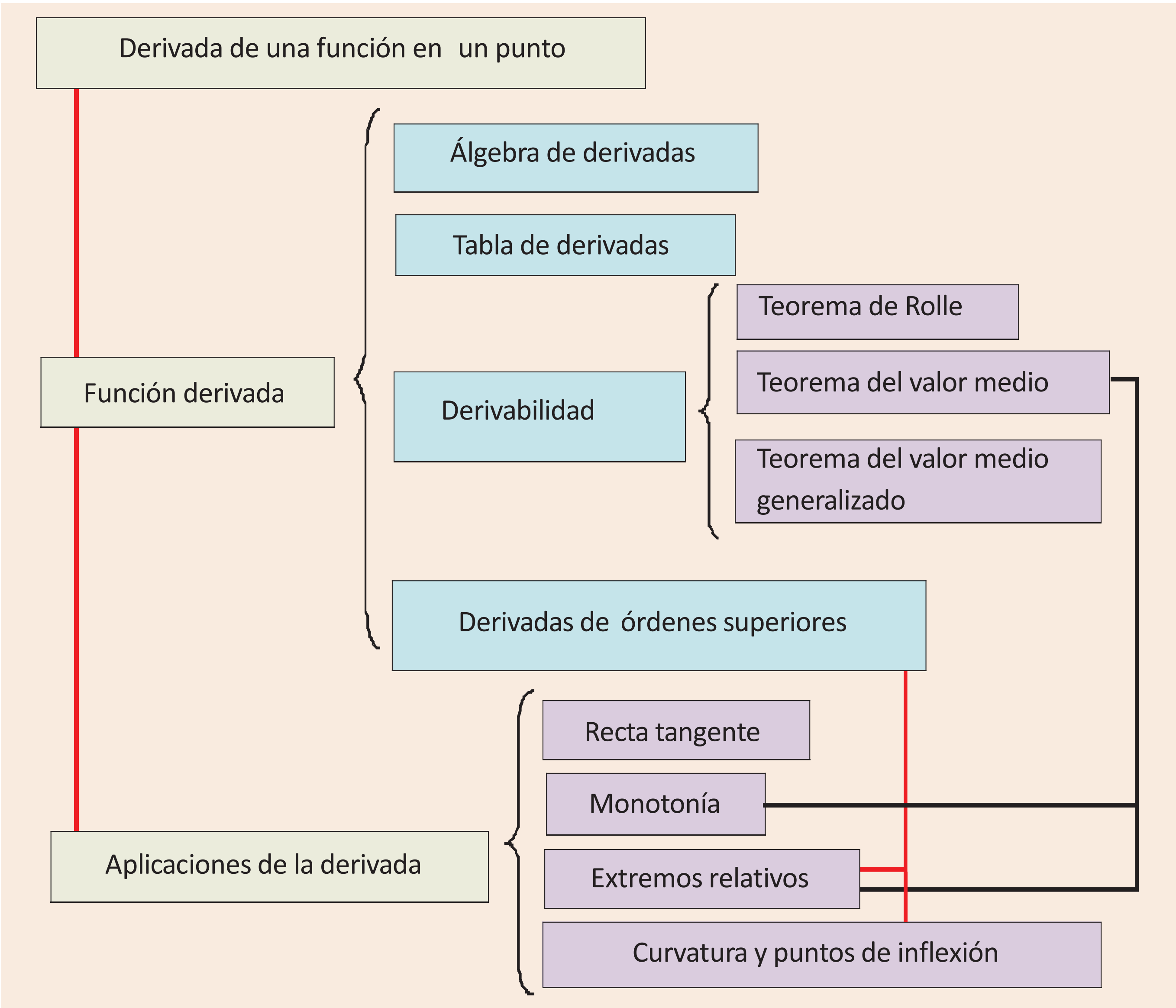
No dejamos de vista las aplicaciones más prácticas de la derivada, como son el cálculo de la recta tangente, el estudio de la monotonía y el cálculo de los extremos relativos o puntos críticos de una función, que reinterpretamos con la ayuda del teorema del valor medio.

Calculamos derivadas de órdenes superiores. La derivada segunda la usaremos para estudiar la curvatura, puntos de inflexión y para distinguir el tipo de extremo relativo. El cálculo de las de orden tres y superior nos servirá para poder calcular los términos del desarrollo en serie de Taylor (Unidad 9).

Hay que recordar que tanto la monotonía como la curvatura se estudian a partir del signo de una función. Esto lo haremos con las herramientas vistas en Primero de Bachillerato. Así, usamos una misma técnica que aplicamos a diferentes funciones, o mejor dicho, a las derivadas de una misma función: el crecimiento se estudia a partir de la derivada primera; y la curvatura, de la derivada segunda.

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Calcular la derivada de cualquier función.
2. Estudiar la derivabilidad de una función.
3. Conocer y manejar teoremas referentes a la continuidad y derivabilidad de funciones.
4. Hallar la ecuación de la recta tangente a una función en cualquier punto.
5. Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de una función.
6. Calcular los extremos relativos de una función.
7. Obtener las derivadas sucesivas.
8. Estudiar la concavidad y la convexidad, así como hallar los puntos de inflexión de una función.

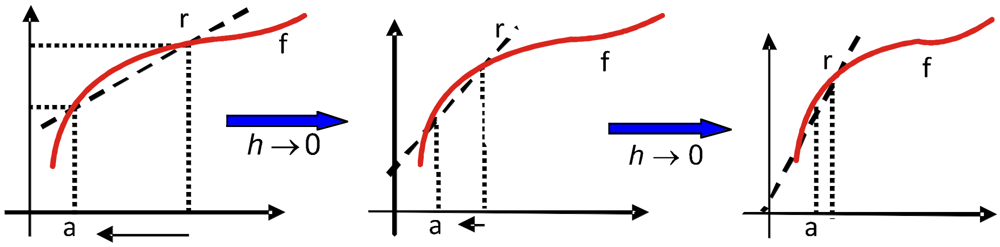


ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Derivada de una función

Interpretación geométrica y física

Vimos en Primero de Bachillerato que la **derivada de una función en un punto** es la tasa de variación instantánea en dicho punto $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Al interpretarla geométricamente se observa que es la pendiente de la recta tangente a la curva, siendo $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ la ecuación de dicha recta tangente a la función f en el punto (x_0, y_0).



La interpretación física de la derivada conduce al concepto de velocidad instantánea, definida como $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$, relacionada con la notación $\frac{dy}{dx}$, en la que se expresa la variación en la función y (**diferencial** de y ó dy) inducida por la variación en la variable x (diferencial de x ó dx).

Para calcular una derivada siguiendo la definición recurríamos a la **Regla de los 4 pasos**, consistente en efectuar los cálculos pormenorizadamente:

1^er^ paso: cálculo de las imágenes *f(a+h)* y *f(a)*.

2º paso: cálculo de la diferencia *f(a+h) – f(a)*. Si se puede, se saca factor común *h*.

3^er^ paso: cálculo del cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Si se puede, se simplifica *h*.

4º paso: cálculo del límite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, que ya es la derivada.

Recordemos el procedimiento con un ejemplo:

Dada $f(x)=\frac{6x+5}{x-1}$, calcula $f'(-2)$ usando la definición.

Primero escribimos la definición para este caso: $f'(-2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$.

1^er^ paso: $f(-2+h)=\frac{6(-2+h)+5}{-2+h-1}=\frac{6h-7}{h-3}$; $f(-2)=\frac{7}{3}$.

2º paso: $f(-2+h)-f(-2)=\frac{6h-7}{h-3}-\frac{7}{3}=\frac{18h-21-7h+21}{3(h-3)}=\frac{11h}{3(h-3)}$.

3^er^ paso: $\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\frac{11h/3(h-3)}{h}=\frac{11}{3(h-3)}$.

4º paso: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{11}{3(h-3)}=\frac{-11}{9}\Rightarrow f'(-2)=\frac{-11}{9}$.

2. Función derivada

Dado lo tedioso del cálculo de la derivada punto a punto, se define una **función derivada** $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ó $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$, de modo que se pueda calcular en cualquier punto genérico x. A partir de esta definición se obtienen las derivadas de las funciones elementales y las reglas del álgebra de derivadas.

Como ya sabemos, para que una función sea derivable en un punto, previamente ha de ser continua en dicho punto. Si existe la derivada de una función, esto es, cuando se obtiene un resultado finito, se dice que la función es derivable.

2.1. Derivada de funciones conocidas. Álgebra de derivadas

En primer lugar se expone en forma de tablas la información necesaria y ya conocida. En la primera, aparecen las derivadas de las funciones usuales; en la segunda, están las reglas que nos permiten derivar sumas, restas, productos, cocientes y composiciones de funciones; en la tercera, dada la importancia y dificultad que presenta la regla de la cadena (derivada de la composición de funciones) se desarrolla para los casos más habituales. Estas tablas deben ser memorizadas.

Tabla de derivadas de las funciones usuales	
Función	Derivada
k (constante)	0
$x^n, \quad n \in \Re$	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$sen\, x$	$\cos x$
$\cos x$	$- sen\, x$
$tg\, x$	$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$arc\,sen\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arc\cos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arc\,tg\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Álgebra de derivadas

$$(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x),\ k \text{ constante}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$
$$\left(\frac{k}{f}\right)'(x) = -\frac{k \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}, \quad k \in \Re,$$
$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

La última fórmula, conocida como **Regla de la cadena**, puede desglosarse un poco para algunas funciones, obteniendo la siguiente tabla:

Función	Derivada
$(f(x))^n$	$n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x), \quad n \in \Re$
$e^{f(x)}$	$f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$sen(f(x))$	$f'(x) \cdot cos f(x)$
$cos(f(x))$	$-f'(x) \cdot sen(f(x))$
$tg(f(x))$	$\frac{f'(x)}{cos^2(f(x))} = f'(x)(1 + tg^2(f(x)))$

Usaremos la definición para hallar la derivada y demostrar las reglas del **álgebra de derivadas** que no fueron demostradas en Primero. En las demostraciones que siguen, se supone que todas las funciones son continuas y derivables.

✓ **Derivada de ln x**

$$f(x+h) = ln(x+h) \Rightarrow f(x+h) - f(x) = ln(x+h) - ln\,x = ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = ln\left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \Rightarrow \lim_{h \to 0} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \overset{(1)}{=} ln\left[\lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] =$$

$$= ln 1^{\infty} \overset{n^o\, e}{=} ln\left[exp\left\{\lim_{h \to 0}\left(\frac{h}{x} \cdot \frac{1}{h}\right)\right\}\right] = ln\, e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

Luego, $(ln\,x)' = \frac{1}{x}$.

En [(1)] intercambiamos el límite con el neperiano.

- ✓ **Derivada de un producto de funciones**

$$(f\cdot g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\overset{(1)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\overset{(2)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)\right]+\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x)\right]\overset{(3)}{=}f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x).$$

Luego, $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

En [(1)] introducimos $f(x)\cdot g(x+h)$, sumando y restando, para sacar factor común, agrupar y separar el límite (paso [(2)]). En [(3)] aplicamos que el límite de un producto es el producto de límites, la definición de derivada y el hecho de que f y g son continuas.

- ✓ **Derivada de un cociente de funciones**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}\overset{(1)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}\overset{(2)}{=}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)\right]-\left[f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)}\overset{(3)}{=}\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2},\ g(x)\neq 0.$$

Luego, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2},\quad g(x)\neq 0.$

Ahora hay que introducir $f(x)\cdot g(x)$, sumando y restando. El ajuste hecho en [(2)] consiste en sacar factor común y agrupar; después se sube h del denominador para tener reconocibles las derivadas. En [(3)] tomamos el límite, teniendo en cuenta la continuidad.

- ✓ **Derivada de una composición de funciones** o **regla de la cadena**

$$(f\circ g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\big(g(x+h)\big)-f\big(g(x)\big)}{h}\overset{(1)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\big(g(x+h)\big)-f\big(g(x)\big)}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\overset{(2)}{=}f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x).$$

Luego, $(f\circ g)'(x)=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$.

En [(1)] se introduce $g(x+h)-g(x)$, multiplicando y dividiendo, ya que ése es el argumento de f. Como g es continua, $g(x+h)-g(x)\to 0$ cuando $h\to 0$.

Así, puede escribirse que $g(x+h)\approx g(x)+H$, donde $H\to 0$ cuando $h\to 0$ y queda: $\lim_{h\to 0}\frac{f\big(g(x+h)\big)-f\big(g(x)\big)}{g(x+h)-g(x)}=\lim_{H\to 0}\frac{f\big(g(x)+H\big)-f\big(g(x)\big)}{H}=f'\big(g(x)\big)$.

El punto delicado de esta demostración es la división entre $g(x+h)-g(x)$, pues podría provocar una división por cero antes de calcular el límite. La explicación de que esto no causa problemas excede el nivel del presente libro; aquella persona interesada puede consultar los libros sobre Análisis Matemático que aparecen en la bibliografía.

2.2. Derivada de la función inversa. Derivación logarítmica. Derivada implícita

La Regla de la cadena nos permite deducir los siguientes resultados:

✓ **Derivada de la función inversa**

La inversa verifica que $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$; derivando el primer término y el último tenemos que $\left(f\circ f^{-1}\right)'(x)=(x)'\Rightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1$. Despejando se obtiene la **derivada de la fucción inversa**:

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Hay que hallar f' pero evaluarla en $f^{-1}(x)$. Como ejemplo calcularemos la derivada de e^x, que es la inversa de $ln\,x$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ln\,x \\ f^{-1}(x)=e^x \end{array}\right\}\Rightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)\overset{(1)}{=}\frac{1}{f^{-1}(x)}\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\cancel{1}\big/f^{-1}(x)}=f^{-1}(x)\Rightarrow\left(e^x\right)'=e^x.$$

En [(1)] usamos la derivada de *lnx*.

✓ **Derivación logarítmica**

¿Cómo podemos derivar $f(x)^{g(x)}$? Al ser el exponente una función, no podemos usar la fórmula de las funciones potenciales x^n. Los exponentes bajan al tomar logaritmos, por lo que usaremos la derivación logarítmica, cuyo procedimiento puede escribirse así: $y=f(x)^{g(x)}\Rightarrow ln\,y=g(x)\cdot ln\,f(x)\Rightarrow(ln\,y)'=\left(g(x)\cdot ln\,f(x)\right)'$. A la izquierda, como y es una función compuesta, queda siempre $\frac{y'}{y}$. A la derecha habrá que derivar el producto. Para hallar y' no hay más que despejar y queda: $y'=\left(g(x)\cdot ln\,f(x)\right)'\cdot y$.

Mejor que aprenderse la fórmula anterior, es saber efectuar el proceso. Ejemplos:

- $y=a^x\Rightarrow ln\,y=x\,ln\,a\Rightarrow\frac{y'}{y}=(x\,ln\,a)'=ln\,a\Rightarrow y'=y\,ln\,a=a^x\,ln\,a.$

  Otra forma de obtener la derivada de a^x es usar la igualdad $a^x=e^{x\,ln\,a}\Rightarrow\left(a^x\right)'=ln\,a\cdot e^{x\,ln\,a}$.
- $y=x^x\Rightarrow ln\,y=x\,ln\,x\Rightarrow\frac{y'}{y}=(x\,ln\,x)'=ln\,x+1\Rightarrow y'=(ln\,x+1)y=(ln\,x+1)x^x.$
- $y=x^n\Rightarrow ln\,y=n\,ln\,x\Rightarrow\frac{y'}{y}=\frac{n}{x}\Rightarrow y'=\frac{n}{x}\cdot x^n\Rightarrow y'=nx^{n-1},\ n\in\mathbb{R}.$

La ventaja de esta demostración es su generalidad, pues no sólo vale para los exponentes naturales, únicos para los que se puede usar el binomio de Newton.

✓ **Derivación implícita**

Una función se llama implícita cuando no está despejada en términos de la variable independiente. Es decir, $y=x^2+4x$ es una función explícita, pero $x^2+y^2=1$ no lo es. Hay veces en los que el despeje no es complicado, pero otras es prácticamente imposible. Sin embargo, es posible calcular la derivada de la función aún no estando despejada. Consiste en usar convenientemente la regla de la cadena. Veámoslo con el ejemplo anterior:

$$x^2+y^2=1\overset{\substack{\text{derivando}\\ \text{ambos miembros}}}{\Rightarrow}2x+2yy'=0\Rightarrow y'=-\frac{x}{y}.$$

Observa que $(y^2)' = 2yy'$, pues y es función de x. Así, siempre que aparezca y, aparece y' al derivar.

Un segundo ejemplo es el siguiente: $3xy - 5y^2 + 2y - x = y^5 \overset{\substack{\text{derivando} \\ \text{ambos miembros}}}{\Rightarrow} 3y + 3xy' - 10yy' + 2y' - 1 = 5y^4 y'$.
Fíjate en que hay que derivar el producto. Agrupando las y', sacándolas factor común y despejando queda:

$$\left(3x - 10y - 5y^4 + 2\right) y' = 1 - 3y \Rightarrow y' = \frac{1-3y}{3x - 10y - 5y^4 + 2}.$$

Para poder calcular y', el resto de términos que aparecen debe ser calculable.

✓ En Física suele emplearse a menudo la notación de Leibniz $y' = \frac{dy}{dx}$, usando diferenciales, por lo que la regla de la cadena puede quedar enmascarada. Por ejemplo, si queremos calcular $\frac{d\phi}{dt}$, donde ϕ es el flujo y t el tiempo, puede hacerse de la siguiente forma: $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$. Con nuestra notación, $(\phi \circ x)'(t) = \phi'(x(t)) \cdot x'(t)$.
Esta relación puede extenderse con todas las variables que se quiera, al igual que sucede con la Regla de la cadena, en la que pueden aparecer más de dos funciones compuestas: $\frac{df}{dz} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dz}$.

Existen herramientas informáticas, como *Derive*, *Scientific Notebook*…, que permiten el cálculo simbólico de derivadas. Desafortunadamente, no son gratuitas.

Ejemplos

1. Averigua la derivada de: **a)** $y = 7x^3 - 6x^2 + 5x - 3$; **b)** $y = x^3 e^x$; **c)** $y = \frac{\ln x}{x}$.

Solución :

a) $y' = 7 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x + 5 = 21x^2 - 12x + 5$;

b) $y' = (x^3)' e^x + x^3 (e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (3+x) x^2 e^x$;

c) $y' = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - (\ln x) \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

2. Deriva: **a)** $y = \left(3x^5 - 5x^2 + 7\right)^8$; **b)** $y = \sqrt[7]{\left(2x - 5x^3\right)^4}$; **c)** $f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen}x}{1 - \operatorname{sen}x}$.

Solución :

a) $y' = 8\left(3x^5 - 5x^2 + 7\right)^7 \left(15x^4 - 10x\right) = 8\left(15x^4 - 10x\right)\left(3x^5 - 5x^2 + 7\right)^7$;

b) $y = \left(2x - 5x^3\right)^{4/7} \Rightarrow y' = \dfrac{4}{7}\left(2x - 5x^3\right)^{-3/7}\left(2 - 15x^2\right) = \dfrac{4\left(2 - 15x^2\right)}{7\left(2x - 5x^3\right)^{3/7}} = \dfrac{4\left(2 - 15x^2\right)}{7\sqrt[7]{\left(2x - 5x^3\right)^3}}$;

c) $y' = \dfrac{(1 + \operatorname{sen}x)'(1 - \operatorname{sen}x) - (1 + \operatorname{sen}x)(1 - \operatorname{sen}x)'}{(1 - \operatorname{sen}x)^2} = \dfrac{\cos x\,(1 - \operatorname{sen}x) + \cos x\,(1 + \operatorname{sen}x)}{(1 - \operatorname{sen}x)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{2\cos x}{(1 - \operatorname{sen}x)^2}$.

3. Deriva: **a)** $f(x)=\left(3x^2-7\right)^2$; **b)** $y=\dfrac{x^2-3x}{x+5}$; **c)** $y=\dfrac{e^{-x^2}}{x^2}$.

Solución :

a) $f'(x)=2\left(3x^2-7\right)\cdot 6x=12x\left(3x^2-7\right)$;

b) $y'=\dfrac{(2x-3)(x+5)-\left(x^2-3x\right)\cdot 1}{(x+5)^2}=\dfrac{x^2+10x-15}{(x+5)^2}$;

c) $y'=\dfrac{-2xe^{-x^2}\cdot x^2-e^{-x^2}\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{-2xe^{-x^2}\left(x^2+1\right)}{x^4}=\dfrac{-2e^{-x^2}\left(x^2+1\right)}{x^3}$.

4. Deriva: **a)** $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x-3}$; **b)** $y=\dfrac{e^{2x}\cdot \ln x}{x^3}$; **c)** $y=\dfrac{(4x-1)^2}{(3x+2)^2}$.

Solución :

a) $f'(x)=\dfrac{(2x-5)(x-3)-\left(x^2-5x+4\right)\cdot 1}{(x-3)^2}=\dfrac{x^2-6x+11}{(x-3)^2}$;

b) $y'=\dfrac{\left(2e^{2x}\ln x+e^{2x}\cdot \frac{1}{x}\right)\cdot x^3-e^{2x}\cdot \ln x\cdot 3x^2}{x^6}=\dfrac{\left(2xe^{2x}\ln x+e^{2x}\right)\cdot x^2-3x^2e^{2x}\ln x}{x^6}\Rightarrow$

$\Rightarrow y'=\dfrac{e^{2x}\left(2x\ln x-3\ln x+1\right)}{x^4}$;

c) $y'=y=\left(\dfrac{4x-1}{3x+2}\right)^2\Rightarrow y'=2\dfrac{4x-1}{3x+2}\cdot\dfrac{11}{(3x+2)^2}=\dfrac{22(4x-1)}{(3x+2)^3}$.

5. Calcula la derivada de: **a)** $y=e^{4x}(x-1)$; **b)** $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$.

Solución :

a) $y'=\left(e^{4x}\right)'(x-1)+e^{4x}(x-1)'=4e^{4x}(x-1)+e^{4x}=e^{4x}(4x-4+1)=e^{4x}(4x-3)$;

b) $y'=\dfrac{2x\cdot\left(x^2+3\right)-\left(x^2-3\right)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{12x}{\left(x^2+3\right)^2}$.

6. Calcula la derivada de: **a)** $y=tg^2(x-1)$; **b)** $y=\sqrt{1-sen\dfrac{x}{2}}$.

Solución :

a) $y'=2tg(x-1)\cdot\left(1+tg^2(x-1)\right)=\dfrac{2tg(x-1)}{cos^2(x-1)}$;

b) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-sen\frac{x}{2}}}\cdot\left(-cos\dfrac{x}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-cos\frac{x}{2}}{4\sqrt{1-sen\frac{x}{2}}}$.

7. Usando la derivada de la función inversa, demuestra que: **a)** $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; **b)** $(arcsenx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solución :

a) $\left.\begin{array}{l} f(x) = tgx \\ f^{-1}(x) = arctgx \end{array}\right\} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{1+tg^2(arctgx)} = \dfrac{1}{1+\left(tg(arctgx)\right)^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$;

b) $\left.\begin{array}{l} f(x) = senx \\ f^{-1}(x) = arcsenx \end{array}\right\} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{cos(arcsenx)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-sen^2(arcsenx)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Aquí hay que usar la fórmula $cos\,x = \sqrt{1-sen^2x}$ para poder operar.

8. Calcula la derivada de: **a)** $y = (x-5)^{3x^4}$; **b)** $y = \left(\sqrt[4]{3-x^2}\right)^{x^2-3x}$.

Solución :

a) $ln\,y = 3x^4\,ln(x-5) \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = 12x^3\,ln(x-5) + \dfrac{3x^4}{x-5} \Rightarrow y' = \left[12x^3\,ln(x-5) + \dfrac{3x^4}{x-5}\right]\cdot(x-5)^{3x^4}$;

b) $y = \left(3-x^2\right)^{\frac{x^2-3x}{4}} \Rightarrow ln\,y = \dfrac{x^2-3x}{4}\cdot ln\left(3-x^2\right) \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{2x-3}{4}\cdot ln\left(3-x^2\right) - \dfrac{2x\left(x^2-3x\right)}{4\left(3-x^2\right)} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \left[\dfrac{2x-3}{4}\cdot ln\left(3-x^2\right) - \dfrac{2x^2(x-3)}{4\left(3-x^2\right)}\right]\left(\sqrt[4]{3-x^2}\right)^{x^2-3x}$.

9. Calcula la derivada de $f(x) = \left(x^2-1\right)^{sen2x}$ y de $g(x) = (tg4x)^{1-cos\frac{x}{2}}$.

Solución :

$ln\,f(x) = sen2x\cdot ln\left(x^2-1\right) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2cos\,2x\cdot ln\left(x^2-1\right) + sen2x\cdot\dfrac{2x}{x^2-1} \Rightarrow$

$f'(x) = \left[2cos\,2x\cdot ln\left(x^2-1\right) + \dfrac{2xsen2x}{x^2-1}\right]\left(x^2-1\right)^{sen2x}$.

$ln\,g(x) = \left(1-cos\dfrac{x}{2}\right)\cdot ln\,tg4x \Rightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{2}sen\dfrac{x}{2}\cdot ln\,tg4x + \left(1-cos\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{4}{cos^2 4x\cdot tg4x} \Rightarrow$

$g'(x) = \left[\dfrac{1}{2}sen\dfrac{x}{2}\cdot ln\,tg4x + \dfrac{8\left(1-cos\dfrac{x}{2}\right)}{sen8x}\right]\cdot(tg4x)^{1-cos\frac{x}{2}}$.

Observa que $cos^2 4x\cdot tg4x = cos^2 4x\cdot\dfrac{sen4x}{cos\,4x} = cos\,4x\cdot sen4x = \dfrac{1}{2}sen8x$.

10. Halla la derivada de: **a)** $y=(\cos 3x)^{x^2-1}$; **b)** $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/x}$.

Solución:

a) $\ln y=(x^2-1)\ln\cos 3x \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=2x\ln\cos 3x+(x^2-1)\cdot\dfrac{-3sen3x}{\cos 3x}\Rightarrow$

$\Rightarrow y'=\left[2x\ln\cos 3x-3(x^2-1)\cdot tg3x\right]\cdot(\cos 3x)^{x^2-1}$.

b) $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\Rightarrow \dfrac{y'}{y}=-\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)'}{\dfrac{x+1}{x-1}}=-\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+\dfrac{1}{x}\dfrac{\dfrac{-2}{(x-1)^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}}=$

$=-\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)-\dfrac{2(x+1)}{x(x^2-1)}\Rightarrow y'=-\left[\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+\dfrac{2(x+1)}{x(x^2-1)}\right]\cdot\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/x}$.

11. Dada la elipse de ecuación $x^2+4y^2+2x-8y+1=0$, averigua el valor de y' en el punto $(-1,2)$.

Solución:

$2x+8yy'+2-8y'=0 \overset{\text{dividimos entre 2}}{\Rightarrow} x+4yy'+1-4y'=0\Rightarrow 4y'(y-1)=-1-x \overset{\text{cambiando el signo}}{\Rightarrow} y'=\dfrac{1+x}{4(1-y)}$.

$y'(-1)=\dfrac{1-1}{4(1-2)}=0.$

12. Dada la curva de ecuación $e^{y-1}-\ln x-1=0$, halla el valor de y' en el punto $(1,1)$.

Solución:

$y'e^{y-1}-\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow y'e^{y-1}=\dfrac{1}{x}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{xe^{y-1}}\Rightarrow y'(1)=1.$

13. Averigua $\dfrac{d\phi}{dt}$ siendo: **a)** $\phi=\cos(3x+\pi),\ x=\pi t+\dfrac{1}{2}t^2$; **b)** $\phi=\dfrac{1}{1+x^2},\ x=\sqrt{t}$.

Solución:

a) $\dfrac{d\phi}{dt}=\dfrac{d\phi}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=-3sen(3x+\pi)\cdot(\pi+t)=-3(\pi+t)sen\left(3\pi\cdot t+\dfrac{3}{2}t^2+\pi\right)$.

Se obtiene lo mismo derivando $\phi(t)=\cos\left(3\pi\cdot t+\dfrac{3}{2}t^2+\pi\right)$.

b) $\dfrac{d\phi}{dt}=\dfrac{d\phi}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}=\dfrac{-2\sqrt{t}}{\left(1+(\sqrt{t})^2\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}=\dfrac{-1}{(1+t)^2}$.

Se obtiene lo mismo derivando $\phi(t)=\dfrac{1}{1+t}$.

Actividades

1. Halla la derivada de: **a)** $y=\dfrac{3sen2x-1}{3sen2x+1}$; **b)** $y=x^2\ln x$; **c)** $y=\dfrac{\cos x+1}{\cos x^2+senx^2}$.

2. Averigua la derivada de: **a)** $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; **b)** $y=x^{3arcsen(x-1)}$; **c)** $y=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.

3. Calcula la derivada de: **a)** $y=\dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}$; **b)** $y=xe^{-x^2}$; **c)** $y=\dfrac{3x^2-x}{x+2}$.

4. Halla la derivada de: **a)** $y=\ln\left(5x^3-6x^2+7\right)$; **b)** $y=\sqrt{x^2-5x+3}$.

5. Calcula la derivada de: **a)** $y=\dfrac{\cos x^2}{1-tgx^2}$; **b)** $y=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-4}$; **c)** $f(x)=\dfrac{8(x-1)^2}{x^3}$.

6. Averigua la derivada de: **a)** $y=xe^{-3x}$; **b)** $y=arctg\sqrt{x^2-1}$; **c)** $y=\left(\sqrt{x^5-1}\right)^{x^2+x}$.

7. Deriva: **a)** $y=7e^{2x-1}-3x^4+5x$; **b)** $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; **c)** $f(x)=\ln\dfrac{x^2+1}{x}$.

8. Halla la derivada de: **a)** $y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$; **b)** $y=\dfrac{2x}{x^2-4}$; **c)** $y=\dfrac{5x^3}{5x^3-7}$.

9. Halla la derivada de: **a)** $y=sen\left(x^2+2x\right)$; **b)** $y=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$.

10. Halla la función derivada de: **a)** $y=e^{x^2-1}(3x+5)$; **b)** $y=\dfrac{4x^2+5}{4x^2-5}$.

11. Halla la derivada de: **a)** $y=arctg(\cos x)$; **b)** $y=arcsen\left(\sqrt{x+1}\right)$.

12. Deriva: **a)** $y=x\ln\sqrt{1+x^2}+arctgx$; **b)** $y=\arccos\left(e^x\right)$.

13. Averigua y' en el punto (2,4) para la función implícita $x^2-3y^2+6xy-4=0$.

14. Dada la circunferencia de ecuación $(x+3)^2+(y-5)^2=10^2$, halla el valor de y' en el punto $(3,-3)$.

15. Halla $\dfrac{df}{dt}$: **a)** $f=sen\left(\dfrac{\pi}{2}x^2-1\right)$, $x=\sqrt{\dfrac{t+1}{\pi}}$; **b)** $f=\ln\dfrac{x}{x-1}$, $y=1-e^{2t}$.

3. Derivabilidad

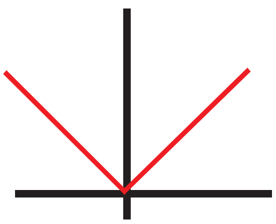
Sabemos que para que una función sea derivable ha de ser previamente continua. La demostración es la siguiente:

Si $\exists f'(a) \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{\lim\limits_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)\right]}{\lim\limits_{h\to 0} h} = f'(a) \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)\right] = f'(a)\cdot \lim\limits_{h\to 0} h$

por lo que $\lim\limits_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)\right] = 0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, luego f es continua.

Sin embargo, la continuidad sólo es una condición necesaria, pero no suficiente, pues no todas las funciones continuas son derivables. Un ejemplo de función continua que no es derivable en un punto es la función valor absoluto de x, que nos permitirá introducir las derivadas laterales:

¿Cuánto vale la derivada del valor absoluto $|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x<0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x=0$? Dado que



$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, f es continua en $x=0$.

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$ ¿Cómo calculamos el límite?

Fíjate que es distinto por la izquierda, $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h} = -1$, que

por la derecha, $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h} = 1$, por lo que debemos concluir que no existe $f'(0)$.

Por lo tanto, es una función continua en un punto pero no derivable en dicho punto.

La definición de las derivadas laterales es:

- derivada por la izquierda: $f'(a^-) = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$;
- derivada por la derecha: $f'(a^+) = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

En el caso de funciones definidas a trozos (lo más habitual), las derivadas laterales en un punto se hallan calculando la derivada de la función que esté en el trozo que interese y sustituyendo el valor del punto. En el ejemplo anterior de la función valor absoluto $f'(0^-) = -1\big|_{x=0} = -1$; $f'(0^+) = 1\big|_{x=0} = 1$. Cuando las derivadas laterales son distintas, pero finitas, se dice que es un **punto anguloso**.

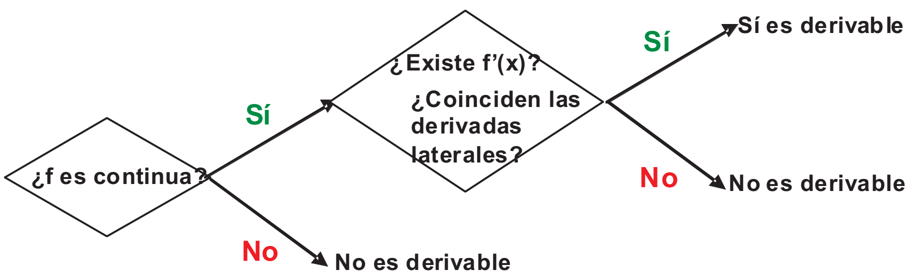
Las funciones con radicales pueden presentar problemas si su derivada es una función con denominadores. Por ejemplo, $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Es continua en $x=0$, pues $y(0) = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x} = 0$, pero no derivable: $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow$

$y'(0) = \dfrac{1}{0} \Rightarrow \nexists y'(0) \Rightarrow$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Para saber más...

Otras funciones más complicadas, como $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, \text{ si } x\neq 0 \\ 0, \text{ si } x=0\end{cases}$, exigen más detenimiento en su estudio. No es una función definida a trozos, pues cambia en un único punto. Para ver que es continua, se recurre a la acotación para el coseno: $-1\leq \cos\dfrac{1}{x}\leq 1 \Rightarrow -x\leq x\cos\dfrac{1}{x}\leq x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(-x)\leq$ $\leq \lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\dfrac{1}{x}\right)\leq \lim\limits_{x\to 0} x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\dfrac{1}{x}\right)=0$. Luego, $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Derivando $f'(x)=\cos\dfrac{1}{x}+x\left(-\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)=\cos\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$. Claramente $\nexists f'(0)$, pues aparte de no poder calcular ni $\cos\dfrac{1}{0}$ ni $\operatorname{sen}\dfrac{1}{0}$, $\dfrac{1}{0}$ indica que hay una discontinuidad inevitable.

En resumen, para estudiar la derivabilidad de una función primero se estudia la continuidad y después se calcula la derivada; en ocasiones, a partir de las derivadas laterales. Si coinciden, la función es derivable, y si no coinciden, no es derivable.



Ejemplo

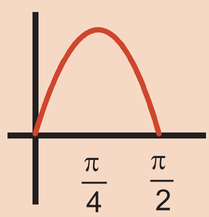
14. ¿Es derivable $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<0 \text{ ó si } x\geq \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}x, & \text{si } 0\leq x<\dfrac{\pi}{4} \\ \cos x, & \text{si } \dfrac{\pi}{4}\leq x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ en $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{4},\ x=\dfrac{\pi}{2}$?

Solución :

- Estudio en $x=0$

Continuidad : $f(0)=\operatorname{sen}0=0=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}x=0\Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\Rightarrow$ es continua en x = 0.

Derivabilidad : $f'(0^-)=0\big|_{x=0}=0;\quad f'(0^+)=\cos x\big|_{x=0}=1\Rightarrow \nexists f'(0)$



- Estudio en $x=\dfrac{\pi}{4}$

Continuidad : $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)\Rightarrow$ es continua en $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Derivabilidad : $f'\left(\dfrac{\pi}{4}^-\right)=\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ f'\left(\dfrac{\pi}{4}^+\right)=-\operatorname{sen}x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \nexists f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right).$

- Estudio en $x=\dfrac{\pi}{2}$

Continuidad : $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0;\quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x=0;\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 0=0\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\Rightarrow$ es continua en $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Derivabilidad : $f'\left(\dfrac{\pi}{2}^-\right)=-senx\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-1;\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}^+\right)=0\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0\Rightarrow\nexists f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right).$

15. Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x<1\\ 2x-1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$.

Solución :

El único punto problemático es $x=1$, que es donde cambia de definición.

Continuidad : $f(1)=2x-1\Big|_{x=1}=1;\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1} x^2=1=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)=\lim\limits_{x\to1} f(x)\Rightarrow$

es continua en $x=1$.

Derivabilidad : $f'(1^-)=2x\Big|_{x=1}=2;\ f'(1^+)=2\Big|_{x=1}=2\Rightarrow f'(1)=2\Rightarrow$ es derivable en $x=1$.

Por lo tanto, f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

16. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\sqrt{x-7}$.

Solución :

$Dom\, f=[7,\infty)$; f es continua en su dominio ($\lim\limits_{x\to7^+}\sqrt{x-7}=0=f(7);\ \nexists\lim\limits_{x\to7^-}\sqrt{x-7}$).

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-7}};\ DEN(x)=0\Rightarrow x=7\Rightarrow f'(7)=\dfrac{1}{0}\Rightarrow\nexists f'(7)\Rightarrow$ es derivable en $(7,\infty)$.

17. ¿Es derivable la función $f(x)=5\sqrt[3]{x^2-8}$ en el intervalo $[1,3]$?

Solución :

$Dom\, f=\mathbb{R}$ (la raíz cúbica de un número negativo es un número negativo). Es continua en $\mathbb{R}$ y en cualquier intervalo de dicha recta.

$$f(x)=5\left(x^2-8\right)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}\left(x^2-8\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{10x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-8\right)^2}}\Rightarrow DEN=0;\left(x^2-8\right)^2=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{8}\,(raíz\ doble)\Rightarrow\nexists f'\left(\pm\sqrt{8}\right)$. Como $1\leq\sqrt{8}\leq3\Rightarrow f$ no es derivable en $[1,3]$.

18. ¿Es derivable $f(x)=\begin{cases}x^3\cos\dfrac{1}{x}, & \text{si } x\neq0\\ 0, & \text{si } x=0\end{cases}$ en $x=0$?

Solución :

$$\lim_{x\to0}(-x^3)\le\lim_{x\to0}\left(x^3\cos\frac{1}{x}\right)\le\lim_{x\to0}x^3\Rightarrow\lim_{x\to0}\left(x^3\cos\frac{1}{x}\right)=0=f(0)\Rightarrow \text{ es continua en } x=0.$$

$$f'(x)=3x^2\cos\frac{1}{x}+x^3\left(-sen\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)=3x^2\cos\frac{1}{x}+xsen\frac{1}{x}\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to0}f'(x)\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0}(-3x^2)\le\lim_{x\to0}\left(3x^2\cos\frac{1}{x}\right)\le\lim_{x\to0}(3x^2)\Rightarrow\lim_{x\to0}\left(3^2x\cos\frac{1}{x}\right)=0\\ \lim_{x\to0}(-x)\le\lim_{x\to0}\left(xsen\frac{1}{x}\right)\le\lim_{x\to0}x\Rightarrow\lim_{x\to0}\left(xsen\frac{1}{x}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow f'(0)=0. \text{ Luego } f \text{ es derivable en } x=0,$$

siendo $f'(0)=0$.

19. ¿Es derivable $f(x)=\begin{cases}x\ln x, \text{ si } x>0\\ 0, \text{ si } x=0\end{cases}$ en $x=0$?

Solución :

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=0\cdot(-\infty)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\frac{-\infty}{\infty}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0\Rightarrow \text{es continua.}$$

$f'(x)=\ln x+1\Rightarrow f'(0)=\ln 0\Rightarrow \nexists f'(0)\Rightarrow f$ no es derivable en $x=0$.

Actividades

16. Estudia la derivabilidad de: **a)** $y=3-\sqrt[3]{x+5}$; **b)** $f(x)=\dfrac{3|x|}{4+2|x|}$.

17. Averigua los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}ae^x+1, \text{ si } x\le0\\ -\dfrac{b}{x+2}, \text{ si } x>0\end{cases}$ sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

18. Estudia la derivabilidad de: **a)** $y=\sqrt{2x^2+5}$; **b)** $f(x)=\ln(4x^2-1)$; **c)** $y=2x\cdot|x|$.

19. Averigua el valor de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}ax^2-b, \text{ si } x<-1\\ 3+ax, \text{ si } -1\le x\le1\\ bx+2a, \text{ si } x>1\end{cases}$ sea continua y estudia la derivabilidad de f para dichos valores.

20. Estudia la derivabilidad de $y=\dfrac{1-|x|}{1+|x|}$.

21. Halla a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}x^2-ax, \text{ si } x\le2\\ 5x+b, \text{ si } x>2\end{cases}$ sea continua y derivable.

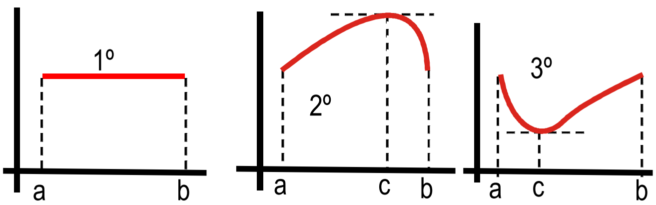
22. ¿Es derivable $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, \text{ si } x\ne0\\ 0, \text{ si } x=0\end{cases}$ en $x=0$?

4. Consecuencias de la derivabilidad

4.1. Teorema de Rolle

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$ entonces $\exists\, c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración: hay 3 posibilidades:

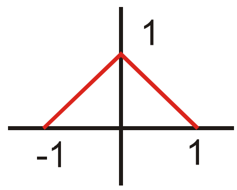


1º) que la función sea constante, con lo que su derivada será nula en todos los puntos del intervalo.

2º) que la función crezca a partir de a. No obstante, como $f(a) = f(b)$, en un cierto punto tendrá que dejar de crecer y empezar a decrecer. En ese punto la derivada se anula; éste será el punto c.

3º) que la función decrezca a partir de a. En un cierto punto tendrá que dejar de decrecer y empezar a crecer. En ese punto la derivada será nula. Ése es el punto c.

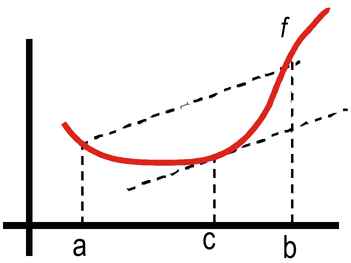
Por lo tanto, dentro del intervalo (a, b) hay un punto cuya recta tangente es horizontal (paralela a la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$), siempre que la función sea continua y derivable en dicho intervalo.



En el teorema de Rolle las hipótesis de continuidad y derivabilidad son necesarias. La función $f(x) = 1-|x|$ es continua en $[-1,1]$ y cumple que $f(-1)=f(1)=0$. Sin embargo, no cumple el teorema de Rolle porque no es derivable en $x=0$.

4.2. Teorema del valor medio o de Lagrange

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

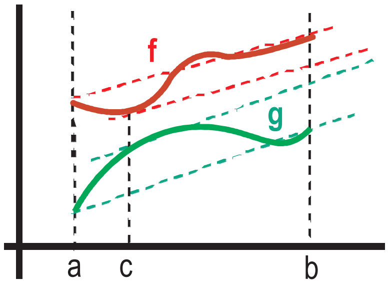


El teorema afirma que la recta tangente a f en c es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$. Para su demostración construimos una función auxiliar resultado de restar f y la citada recta, de ecuación $y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Demostración: sea $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), pues lo son f y la recta. Además, $g(a)=g(b)=0$, ya que f y la recta se cortan en ambos puntos. Por el teorema de Rolle, $\exists c\in(a,b)$ tal que $g'(c)=0 \Rightarrow g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4.3. Teorema del valor medio generalizado o de Cauchy

Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces $\exists\, c \in (a, b$ tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.



Para interpretar geométricamente el teorema, conviene escribirlo como $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}}$ y reconocer el teorema del valor medio para cada una de las funciones (ver el gráfico adjunto). Para su demostración conviene multiplicar en cruz en el teorema y agrupar. Así se construye una función auxiliar que verificará el **teorema de Rolle**.

Demostración: sea $h(x)=f(x)\left[g(b)-g(a)\right]-g(x)\left[f(b)-f(a)\right]$, continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) por serlo sus componentes. Además $h(a)=f(a)g(b)-g(a)f(b)$, $h(b)=-f(b)g(a)+g(b)f(a)=$
$=h(a)\overset{\text{th de Rolle}}{\Rightarrow}\exists c\in(a,b)$ tal que $h'(c)=0\Rightarrow f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]-g'(c)\left[f(b)-f(a)\right]=0\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]=g'(c)\left[f(b)-f(a)\right]\Rightarrow\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

4.4. Regla de L'Hôpital

El teorema del valor medio generalizado es el camino para la demostración de la Regla de L'Hôpital cuando aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Sean f y g funciones continuas en $[a-r,a+r]$ y derivables en $(a-r,a+r)$, tales que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$.

Entonces, si existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, se tiene que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración: como f y g son continuas y $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0\Rightarrow f(a)=g(a)=0$. Si se considera el intervalo $[a,x]$, con $a<x<a+r$ (luego $[a,x]\subset[a-r,a+r]$), f y g cumplirán la tesis del teorema del valor medio generalizado, por lo que $\exists c\in(a,x)$ tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{c\to a}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Al ser $a<c<x$, cuando $x\to a$, se verificará que $c\to a$, por lo que se puede cambiar c por x.

Para saber más...

La demostración cambia para $\frac{\infty}{\infty}$, pues las funciones no son continuas. Al escribir $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1/g(x)}{1/f(x)}$, se verifica que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=0$.

Haciendo $\left(\dfrac{1}{f}\right)(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(a)}=0$ y como $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x)=-\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-f'(x)\cdot\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2\Rightarrow\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a)=-f'(a)\cdot\left(\dfrac{1}{f(a)}\right)^2=-f'(a)\cdot 0=0$, las funciones son continuas y derivables en $x=a$. Tendremos entonces que: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)/\left[g(x)\right]^2}{f'(x)/\left[f(x)\right]^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]^2\overset{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L}{\Rightarrow}L=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}\cdot L^2$.

Agrupando y sacando factor común L, queda $L\left(L\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases}L=0\\ L\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}=1\end{cases}$.

La solución $L=0$ no es válida, pues es $\frac{\infty}{\infty}$. Despejando abajo se obtiene $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejemplos

20. Considera la función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si \quad x\le 2 \\ -x^2+6x & si \quad x>2 \end{cases}$

a) ¿Cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3]?

b) ¿Hay algún punto de la gráfica en el que la recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos (0,f(0)), (3,f(3))?

Solución :

a) Para que cualquier teorema sea de aplicación deben cumplirse todas sus hipótesis. El teorema del valor medio exige que la función sea continua en el intervalo [0,3]. El único posible punto de discontinuidad es $x=2$. Se verifica que: $f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^3=8=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(-x^2+6x\right)\Rightarrow$ es continua en [0,3].

La siguiente hipótesis es que sea derivable en (0,3). Sólo puede presentar problemas en $x=2$: $f'\left(2^-\right)=3x^2\Big|_{x=2}=$ $=12;\ f'\left(2^+\right)=-2x+6\Big|_{x=2}=2\Rightarrow \nexists f'(2)\Rightarrow f$ no tiene porqué verificar el teorema del valor medio.

b) La pendiente de la recta pedida vale $m=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{9}{3}=3$ y la de la recta tangente es la derivada, que será $f'(x)=\begin{cases} 3x^2, \text{ si } x<2 \\ -2x+6, \text{ si } x>2 \end{cases}$. Para que dos rectas sean paralelas, sus pendientes han de ser iguales. Planteamos las ecuaciones $3x_0^2=3\Rightarrow x_0=\pm 1$, siendo ambas soluciones válidas, y $-2x_0+6=3\Rightarrow x_0=\dfrac{3}{2}<2$, que no es válida. Los puntos pedidos son $\left(-1,f(-1)\right)=\left(-1,-1\right)$ y $\left(1,f(1)\right)=\left(1,1\right)$.

En este ejemplo se ve que, a pesar de no cumplirse el terorema del valor medio en el intervalo $\left[0,3\right]$, existe un punto(1,1) en el cual la recta tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos (0,f(0)), (3,f(3)).

21. Se sabe que la función $f:\left[0,5\right]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si} \quad 2\le x\le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0,5), y verifica que $f(0)=f(5)$.

a) ¿Cuánto valen a, b y c?

b) ¿En qué punto verifica el teorema de Rolle?

Solución :

a) Como $f(0)=0=f(5)=2+c\Rightarrow c=-2$.

El único posible punto de discontinuidad es $x=2$:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(ax+bx^2\right)=2a+4b;\ f(2)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(c+\sqrt{x-1}\right)=c+1\overset{c=-2}{=}-1\Rightarrow$ para que sea continua debe cumplirse que $2a+4b=-1$.

$f'\left(2^-\right)=a+2bx\Big|_{x=2}=a+4b;\ f'\left(2^+\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\Bigg|_{x=2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ para que sea derivable $a+4b=\dfrac{1}{2}$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 2a+4b=-1 \\ a+4b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ se obtiene $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$, con lo que la función es

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}x^2, \text{ si } 0\le x<2 \\ \sqrt{x-1}-2, \text{ si } 2\le x\le 5 \end{cases}.$$

b) Como f es continua en $[0,5]$, derivable en (0,5) y $f(0) = f(5)$, existe un $c\in(0,5)$ tal que $f'(c)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases} -3/2+c=0\Rightarrow c=\dfrac{3}{2} \\ 1/2\sqrt{c-1}\neq 0 \end{cases}.$$ El teorema se cumple en $c=\dfrac{3}{2}$.

22. Aplicando el teorema de Lagrange o del valor medio, demuestra que, para $x>0$, se verifica:

$\operatorname{arctg}(2x)-\operatorname{arctg}(x)<\dfrac{x}{1+x^2}$.

Solución :

Identificamos los términos del teorema: $f(x)=arctgx$ y el intervalo es $[x,2x]$, con $x>0$.

La función es continua en $[x,2x]$ y derivable en $(x,2x)$, pues $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ siempre existe, ya que el denominador nunca es cero. Por ello, $\exists c\in(x,2x)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(2x)-f(x)}{2x-x}\Rightarrow f(2x)-f(x)=x\cdot f'(c)\Rightarrow$

$\Rightarrow arctg(2x)-arctgx=\dfrac{x}{1+c^2}$.

Como $x<c<2x\Rightarrow x^2<c^2<(2x)^2\Rightarrow 1+x^2<1+c^2<1+(2x)^2\Rightarrow\dfrac{1}{1+x^2}>\dfrac{1}{1+c^2}>\dfrac{1}{1+(2x)^2}$, por lo que

$arctg(2x)-arctgx<\dfrac{x}{1+x^2}$, para todo x positivo.

23. Determina los valores de a y b para los cuales $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-\cos x}{\operatorname{sen}x^2}=1$.

Solución :

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos x}{\operatorname{sen}x^2}=\frac{0}{0}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+\operatorname{sen}x}{2x\cos x^2}=\frac{b}{0}\Rightarrow b=0$$ para que el límite pueda ser finito.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2ax+\operatorname{sen}x}{2x\cos x^2}=\frac{0}{0}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos x}{2\cos x^2-4x^2\operatorname{sen}x^2}=\frac{2a+1}{2}\Rightarrow\frac{2a+1}{2}=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}.$$

24. Sea f una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que $f(0)=1$; $f(1)=2$; $f'(0)=3$; $f'(1)=4$. Se pide:

a) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x)=f(x+f(0))$.

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2[f(x)]^2-f(x+1)}{e^x-1}$.

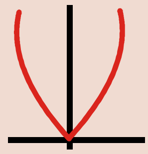
Solución :

a) $g'(x)=\left[f\left(x+f(0)\right)\right]' \underset{\text{Regla de la cadena}}{\overset{(1)}{=}} f'\left(x+f(0)\right) \Rightarrow g'(0)=f'\left(0+f(0)\right)=f'(0+1)=f'(1)=4.$

Al aplicar la regla de la cadena quedaría $f'\left(x+f(0)\right)\cdot\left(x+f(0)\right)'$. Teniendo en cuenta que $(x)'=1, \left(f(0)\right)'=0$, por ser $f(0)$ una constante, se obtiene lo escrito. Se podía haber sustituido al principio y haber usado $g(x)=f(x+1)$, pues $f(0) = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left[f(x)\right]^2-f(x+1)}{e^x-1}=\dfrac{2\left[f(0)\right]^2-f(1)}{0}=\dfrac{2-2}{0}=\dfrac{0}{0}(ind) \overset{L'Hôpital}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4f(x)\cdot f'(x)-f'(x+1)}{e^x}=$
$=4f(0)\cdot f'(0)-f'(1)=12-4=8.$

25. ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$ en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$? En caso afirmativo, halla el punto $c\in\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ que menciona el teorema.



Solución :

Descomponiendo, queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{x^2-1}, & \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{x}{x^2-1}, & \text{si } x\ge 0\end{cases}$. El único punto problemático es $x=0$ (del valor absoluto), pues $x=\pm 1\notin\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ (del denominador).

Continuidad : $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x^2-1}=0=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2-1}\Rightarrow$ es continua.

Derivabilidad : $f'(0^-)=\left.\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}\right|_{x=0}=1; f'(0^+)=\left.\dfrac{-\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\right|_{x=0}=-1\Rightarrow \nexists f'(0)\Rightarrow$ no es derivable, por lo que no está obligada a verificar el teorema de Rolle.

Observando la forma de la derivada, vemos que nunca se anulará, pues el numerador o siempre es positivo o siempre negativo. En este ejemplo se observa l importancia de la derivabilidad.

26. La función $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ verifica que $f(-1)=f(1)=0$. Sin embargo, su derivada no se anula en el interior del intervalo $(-1,1)$. ¿Contradice este resultado el teorema de Rolle?

Solución :

Los teoremas no se pueden contradecir. Si no se verifican es porque alguna de sus hipótesis no se cumple.

Para que se cumpla el teorema de Rolle, la función debe ser:

Continua: f es continua en $\mathbb{R}$, por lo que también lo será en $[-1,1]$.

Derivable: $f'(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}\Rightarrow f'(0)=\dfrac{-2}{0}\Rightarrow \nexists f'(0)\Rightarrow f$ no es derivable en $(-1,1)$.

Al no cumplir las 3 hipótesis, no está obligada a cumplir la tesis.

27. Usando el teorema del valor medio, calcula una valor aproximado para $\sqrt[3]{28}$.

Solución :

Si en el teorema del valor medio usamos el intervalo $[x,x+h]$, podemos escribir que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=$

$= f'(c),\ x < c < x+h \Rightarrow f(x+h) = f(x) + hf'(c)$. En este caso, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Un valor de referencia es 27, pues $\sqrt[3]{27} = 3$. Luego x = 3. La aproximación más sencilla consiste en hacer $f'(c) \cong f'(x) = f'(27) = \left.\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right|_{x=27} = \frac{1}{27}$ y $h = 1$. Quedaría $f(28) = f(27+1) \cong f(27) + \frac{1}{27} = 3 + \frac{1}{27} \cong 3{,}0370$. Con la calculadora se obtiene 3,0366.

28. Demuestra que la ecuación $x^3 + 2kx + 3 = 0$ sólo puede tener una solución real si k es positivo. Encuentra un intervalo donde se halle dicha solución.

Solución :

$f(x) = x^3 + 2kx + 3$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por lo que también lo será en cualquier intervalo de la recta real (es un polinomio). $f(-2) = -5 - 4k < 0,\ f(0) = 3 > 0 \overset{th\ de\ Bolzano}{\Rightarrow} \exists c \in (-2,0)$ tal que $f(c) = 0$. Para ver que es único procedemos por reducción al absurdo: tiene otra raíz d, por lo que la función verifica el teorema de Rolle en $[c,d]$, pues $f(c) = f(d) = 0$. Así, existirá un $x_0 \in (c,d)$ tal que $f'(x_0) = 0$. Pero $f'(x) = 3x^2 + 2k \neq 0$, para $k > 0$. Por eso, no puede existir tal punto d, de modo que la función sólo tiene una raíz y la ecuación una única solución.

Esta forma de proceder es habitual para demostrar que una ecuación sólo tiene una raíz. Se podría pensar a partir del crecimiento (al ser f' siempre positivo, la función siempre creciente) y del comportamiento asintótico ($\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$).

29. Calcula a, b y c para que $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 5, \text{ si } x \le 2 \\ \frac{cx}{2} + b, \text{ si } x > 2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,4]$ y halla el punto donde verifica la tesis.

Solución :

El único punto problemático para la continuidad y la derivabilidad es $x = 2$.

Continuidad : $f(2) = \lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2}\left(ax^2 + bx + 5\right) = 4a + 2b + 5;\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2}\left(\frac{cx}{2} + b\right) = c + b.$

Derivabilidad : $f'(2^-) = 2ax + b|_{x=2} = 4a + b;\ f'(2^+) = \left.\frac{c}{2}\right|_{x=2} = \frac{c}{2}.$

$f(0) = 5 = f(4) = 2c + b$. Se plantea y se resuelve el sistema $\begin{cases} 4a + 2b + 5 = c + b \\ 4a + b = \frac{c}{2} \\ 2c + b = 5 \end{cases}$, obteniendo $a = 5,\ b = -15,$ $c = 10$. $f'(x) = \begin{cases} 10x - 15, \text{ si } x \le 2 \\ 5, \text{ si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow 10x_0 - 15 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2}.$

Actividades

23. Determina el valor de m y de n para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+nx, \text{ si } x<-2 \\ x^3+m, \text{ si } x\geq -2\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [–4,2], así como los puntos del intervalo cuya existencia garantiza dicho teorema.

24. Demuestra que si una función continua y derivable f tiene n raíces $x_1, x_2 \dots x_n$, su derivada f' tiene al menos n–1 raíces. ¿Podemos afirmar el resultado inverso: si f' tiene n–1 raíces, f tiene n raíces?

25. Si la función f es derivable en todo $\mathbb{R}$, $f(1) = 1$ y su derivada f' verifica que $f'(x) \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ¿podemos afirmar que $f(51) \geq 101$? ¿Qué verificará $f(101)$?

26. Demuestra que la ecuación $x^3+3tgx-5=0$ sólo tiene una raíz real. Encuentra un intervalo en el que se encuentre dicha raíz.

27. Justifica por qué, aunque en los siguientes casos se verifica que $f(-2) = f(2)$, no hay ningún valor $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$ y no se contradice el teorema de Rolle.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$.

b) $g(x)=2-|x|$.

5. Aplicaciones de la derivada

5.1. Ecuación de la recta tangente

Geométricamente la derivada surge para dar respuesta al problema del cálculo de la **recta tangente** a una curva en cualquier punto. Como la pendiente de dicha recta es la derivada en el punto, la ecuación es:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

A veces se usa la **recta normal**, que es perpendicular a la tangente. Recordando que para que dos rectas en el plano sean perpendiculares el producto de sus pendientes debe ser –1, tenemos:

$$y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Ejemplos

30. Halla la ecuación de la recta tangente a $y=3x^2-5x+6$ en el punto (1,4).

Solución :

Hay que averiguar $f'(1) \Rightarrow y'=6x-5 \Rightarrow y'(1)=6x-5\big|_{x=1}=1 \Rightarrow$ Sustituyendo en la fórmula queda

$y-4=x-1 \Rightarrow r: y=x+3.$

31. Halla la ecuación de la recta tangente a la función coseno hiperbólico $Chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ en $x = ln3$.

Solución :

Hay que hallar $Ch(ln3) = \dfrac{e^{ln3} + e^{-ln3}}{2} = \dfrac{3-3}{3} = 0$ y $Ch'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ luego

$Ch'(ln3) = \dfrac{e^{ln3} - e^{-ln3}}{2} = \dfrac{3+3}{2} = 3 \Rightarrow r : y = 3(x - ln3) \Rightarrow r : y = 3x - 3ln3.$

32. ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 + 5x - 6$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Hállese el punto de tangencia.

Solución :

Para que dos rectas sean paralelas han de tener la misma pendiente. La bisectriz del primer cuadrante es la recta $y = x \Rightarrow m = 1$ y la pendiente de la recta tangente es $f'(x_0) \Rightarrow 2x_0 + 5 = 1 \Rightarrow x_0 = -2$. Como $y_0 = y(-2) = -12$ y $f'(-2) = 1$, la tangente es $r : y - (-12) = x - (-2) \Rightarrow r : y = x - 10$ y el punto de tangencia $(-2, -12)$.

33. Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = x^{x^2}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución :

$f(1) = 1$; para calcular $f'(x)$ hay que usar la derivación logarítmica: $lnf(x) = x^2 \, ln\,x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2x\,ln\,x + x \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = (2x\,ln\,x + x)x^{x^2} \Rightarrow f'(1) = 1 \Rightarrow$ La recta tangente tiene por ecuación $r : y - 1 = x - 1 \Rightarrow$ $r : y = x$ y la normal es $n : y - 1 = -(x - 1) \Rightarrow n : y = -x + 2$.

34. Averigua la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la elipse de ecuación $16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$ en el punto $\left(\sqrt{5}, -\dfrac{8}{3}\right)$.

Solución :

$32x + 18yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{16x}{9y} \Rightarrow y'(\sqrt{5}) = \dfrac{-16\sqrt{5}}{-9 \cdot \dfrac{8}{3}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow$ la ecuación de la recta tangente r es

$r : y + \dfrac{8}{3} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}(x - \sqrt{5}) \Rightarrow r : y = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}x - 6$. La ecuación de la recta normal n es:

$n : y + \dfrac{8}{3} = \dfrac{-3}{2\sqrt{5}}(x - \sqrt{5}) \Rightarrow n : y = \dfrac{-3}{2\sqrt{5}}x - \dfrac{7}{6}.$

35. Dada la función $f(x)=ln\dfrac{x^2}{x-1}$, con $x>1$, halla un punto $(a,f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en ese punto sea paralela al eje OX.

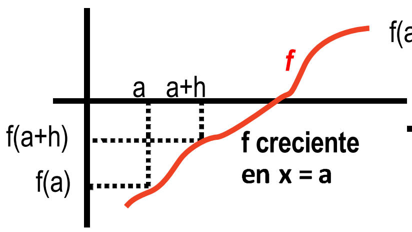
Solución :

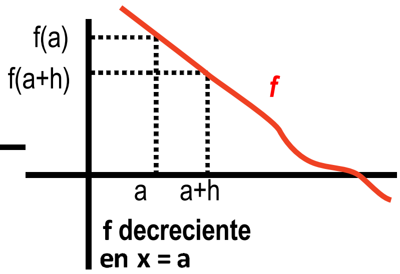
Usando las propiedades del logaritmo podemos descomponer la función como:

$f(x)=2ln\,x-ln(x-1)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x-2-x}{x(x-1)}=\dfrac{x-2}{x(x-1)}\Rightarrow f'(a)=\dfrac{a-2}{a(a-1)}$. Para que sea paralela al eje OX, la pendiente debe ser cero: $f'(a)=0\Rightarrow a=2$ y $f(2)=ln4$. El punto es el $(2,ln4)$ y la recta tangente es $r: y-ln4=0\Rightarrow r: y=ln4$.

5.2. Monotonía: crecimiento y decrecimiento

El término **monotonía** hace referencia al crecimiento o decrecimiento de las funciones. Claramente *f* es creciente si al aumentar *x* aumenta *f* ; y decreciente si al aumentar *x* disminuye *f*. En rigor, una función es monótona creciente o simplemente **creciente** en $x = a$ cuando $f(a + h) \geq f(a)$ y $f(a - h) \leq f(a)$, si $h > 0$. Si no aparece la igualdad diremos que la función es estrictamente creciente, aunque habitualmente se usa el término creciente en el sentido de estrictamente creciente.





La definición para el caso de que la función sea **decreciente** en $x = a$ no debe plantear problemas. Será estrictamente decreciente cuando

$f(a + h) < f(a)$ y $f(a - h) > f(a)$, si $h > 0$.

Usando el teorema del valor medio podemos encontrar otra caracterización mejor para la monotonía: Sea *f* continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f'(x) > 0$ en todo (a, b), entonces *f* es creciente en $[a, b]$.

Demostración: consideremos dos puntos cualesquiera x, $x+h$ del intervalo $[a,b]$, con $a\leq x<x+h\leq b$; f cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[x,x+h]$, por lo que $\exists c\in(x,x+h)$ tal que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(c)>0\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x+h)>f(x)\Rightarrow f$ es creciente para cualesquiera x y $x+h$, luego f es creciente en $[a,b]$.

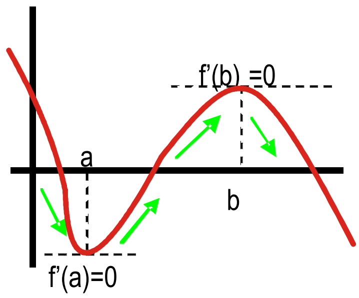
Se puede demostrar otro teorema análogo para las funciones decrecientes, por lo que cambiamos las definiciones por otras alternativas que dicen:

f es creciente en $[a, b]$ si $f'(x) > 0$ y decreciente si $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in (a, b)$.

De este modo, estudiar el **crecimiento de una función** no es más que estudiar el **signo de su derivada**: la función es creciente en aquellos intervalos en los que su derivada es positiva y decreciente en aquellos en los que su derivada es negativa.

5.3. Extremos relativos o puntos críticos

¿Qué sucede si $f'(a) = 0$ o $f'(b) = 0$? En estos puntos, la recta tangente será una recta horizontal, paralela al eje *OX*. Si la función cambia su comportamiento, pasando de crecer a decrecer o a la inversa, presenta un máximo o un mínimo relativo, respectivamente. Estos, como ya sabes, son los **puntos críticos** o **extremos relativos** de la función.



La condición no es sólo que la derivada se anule, sino que cambie la monotonía. Si no se produce un cambio en el crecimiento, no hay extremo relativo.

Ejemplos

36. Estudia la monotonía y halla los extremos relativos de $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

Solución :

Calculamos e igualamos la derivada a cero: $f'(x) = 4x - x^2 = (4-x)x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$.

	(−∞, 0)	(0, 4)	(0, ∞)
sgn[*x*(4–*x*)]	–	+	–
f	*D*↓	*C*↑	*D*↓

En la tabla adjunta se estudia el signo de f' y, simultáneamente, se indica el comportamiento de la función. Hay un mínimo relativo en $(0, f(0)) = (0, 0)$ y un máximo relativo en $(4, f(4)) = \left(4, \frac{32}{3}\right)$.

37. Dada $y = \frac{2x|x|}{|x|-1}$ estudia su monotonía y halla sus puntos críticos.

Solución :

Separamos el valor absoluto: $y = \begin{cases} \frac{2x^2}{x+1}, \text{ si } x < 0 \\ \frac{2x^2}{x-1}, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$. Su dominio es $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$. Es continua en $x = 0$, pues $\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^+} y = 0$, y también derivable, pues: $y'(0^-) = \left.\frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}\right|_{x=0} = 0 = y'(0^+) = \left.\frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}\right|_{x=0}$. Por ello, la derivada será: $y' = \begin{cases} \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}, \text{ si } x < 0 \Rightarrow \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = -2 \ (0 \not< 0) \\ DEN > 0 \text{ en } R - \{-1\} \end{cases} \\ \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}, \text{ si } x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0, 2 \\ DEN > 0 \text{ en } R - \{1\} \end{cases} \end{cases}$. Hay que estudiar cada fracción por separado, en los intervalos en los que están definidas. Presenta un máximo relativo en $(-2, y(-2)) = (-2, -8)$ y un mínimo relativo en $(2, y(2)) = (2, 8)$. En $x = 0$ no hay cambio en el crecimiento, por lo que no es un extremo relativo. Necesitamos calcular la derivada segunda para poder dilucidar qué ocurre en dicho punto. Adelantándonos un poco, podemos calcularla y obtendríamos $y''(0^-) = \left.\frac{4}{(x+1)^3}\right|_{x=0} = 4 \neq y''(0^+) = \left.\frac{4}{(x-1)^3}\right|_{x=0} = -4 \Rightarrow \nexists y''(0)$.

	(−∞,– 2)	(– 2, 0)	(0, 2)	(2, ∞)
sgn y'	+	–	–	+
f	*C*↑	*D*↓	*D*↓	*C*↑

38. Estudia la monotonía de $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2 \text{ si } x<3 \\ -\frac{10}{x} \text{ si } x\geq 3 \end{cases}$ y halla sus extremos relativos.

Solución :

Al ser una función definida a trozos, su derivada también lo es, por lo que hay que estudiar el crecimiento en cada uno de los trozos separadamente. Previamente hay que averiguar si es derivable en $x=3$, que es el único punto problemático ($x=0$, que afecta a $-\frac{10}{x}$, no entra en su intervalo de definición):

$f(3)=-\frac{10}{3}$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(x^3-3x+2\right)=20$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(-\frac{10}{x}\right)=-\frac{10}{3}\Rightarrow$ No es continua, por lo que tampoco es derivable en $x=3$. La derivada queda como: $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-3 \text{ si } x<3 \\ \frac{10}{x^2} \text{ si } x>3 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow$

	$(-\infty,-1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
sgn $f'(x)$	+	–	+	+
f	C↑	D↓	C↑	C↑

$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm 1. \\ \frac{10}{x^2}>0\Rightarrow f \text{ creciente en } (3,\infty). \end{cases} \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en $\left(-1,f(-1)\right)=(-1,4)$ y un mínimo relativo en $\left(1,f(1)\right)=(1,0)$.

39. Considera la función $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{8}{x}$. Averigua si tiene máximos o mínimos relativos y máximos o mínimos absolutos. En caso afirmativo, calcúlalos.

Solución :

$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{8}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x^2=16\Rightarrow x=\pm 4$. Máximo relativo en $\left(-4,f(-4)\right)=(-4,-4)$ y mínimo en $\left(4,f(4)\right)=(4,4)$.

	$(-\infty,-4)$	$(-4, 4)$	$(4, \infty)$
sgn f'	+	–	+
f	C↑	D↓	C↑

Los máximos y mínimos absolutos los hallamos estudiando las asíntotas de la función.

Tiene una asíntota vertical en $x=0$, y se verifica que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$, por lo que no tiene ni máximo ni mínimo absoluto. También verifica que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$.

40. Demuestra que $y=x^3-x-\operatorname{sen}\pi x$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1,0)$ y un mínimo relativo en el intervalo $(1,0)$.

Solución :

$y'=3x^2-1-\pi\cos\pi x$. La ecuación $y'=0$ sólo se puede resolver por métodos numéricos (es una ecuación trascendente). Al ser y' continua, aplicamos el teorema de Bolzano y encontramos intervalos en los que la derivada primera se anule:

$y'(-1)=3-1+\pi=2+\pi>0$; $y'(0)=-1-\pi<0 \overset{Bolzano}{\Rightarrow} \exists c\in(-1,0)$ tal que $y'(c)=0$. Por lo tanto, y tiene un extremo relativo en c. Como y crece a la izquierda de c y decrece a su derecha, se trata de un máximo relativo.

$y'(1)=3-1+\pi=2+\pi>0 \overset{Bolzano}{\Rightarrow} \exists d\in(0,1)$ tal que $y'(d)=0$. Como y decrece a la izquierda de d y crece a su derecha, se trata de un mínimo relativo.

6. Derivadas sucesivas

Al ser la derivada una función, tiene sentido calcular la derivada de la derivada. La derivada segunda es la tasa de variación instantánea de la derivada. Se define como:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

Este proceso se puede prolongar indefinidamente, obteniéndose la derivada tercera f''' (que es derivar la derivada segunda), la derivada cuarta f^{IV} (que es derivar la derivada tercera), la derivada quinta f^{V}(derivar la derivada cuarta)…, la derivada n-sima o enésima $f^{(n}$. Observa la **notación**: se usan **números romanos** para las primeras y un paréntesis con el grado para las de orden superior *(n* con el fin de no confundirlas con las potencias. Estas **derivadas de órdenes superiores o sucesivas** se calculan con las mismas reglas que la derivada, que ahora se llama derivada primera (y simplemente derivada cuando no hay confusión posible).

La notación se completa definiendo $f^{(0} = f$. A partir de la existencia de las derivadas de distintos órdenes, se catalogan las funciones. Así, el conjunto C_0 está formado por todas las funciones continuas; C_1 lo forman las que son derivables una vez, C_2 las que son derivables dos veces… C_∞ lo forman aquellas que pueden derivarse indefinidamente.

Las derivadas de órdenes sucesivos se utilizan para calcular el desarrollo en serie de Taylor para una función, utilísima herramienta que permite averiguar el valor de la raíz cuadrada, seno, coseno, exponencial, logaritmo, etc. de cualquier número *L*, aunque sólo está dirigido a los alumnos muy interesados.

Ejemplo

41. Calcula la derivada cuarta de **a)** $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$; **b)** $y = \frac{x}{x+1}$. Encuentra una fórmula para la derivada enésima de estas funciones.

Solución :

a) $y' = 3x^2 - 6x + 6;\ y'' = 6x - 6;\ y''' = 6;\ y^{IV} = 0 \Rightarrow y^{(n} = 0,\ \forall n > 3.$

b) $y' = \frac{1}{(x+1)^2};\ y'' = \frac{-2}{(x+1)^3};\ y''' = \frac{2\cdot 3}{(x+1)^4};\ y^{IV} = \frac{-2\cdot 3\cdot 4}{(x+1)^5} \Rightarrow y^{(n} = (-1)^{n+1}\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}.$

42. Calcula la derivada quinta de **a)** $y = e^x$; **b)** $y = ln(1+x)$. Encuentra una fórmula para la derivada enésima de estas funciones.

Solución :

a) $y' = y'' = y''' = y^{IV} = y^{V} = \ldots = y^{(n} = e^x.$

b) $y' = \frac{1}{1+x};\ y'' = \frac{-1}{(1+x)^2};\ y''' = \frac{2}{(1+x)^3};\ y^{IV} = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4};\ y^{V} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5} \Rightarrow y^{(n} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$

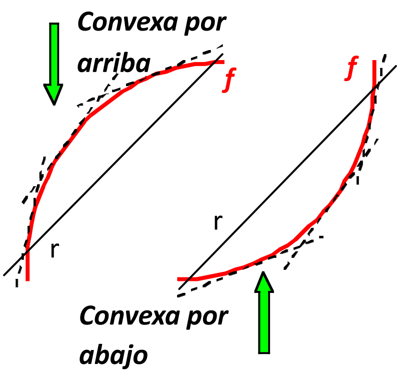
43. Calcula la derivada quinta de **a)** $y = senx$; **b)** $y = cos\,x$. Encuentra una fórmula para la derivada enésima de estas funciones.

Solución :

a) $y' = cos\,x;\ y'' = -senx;\ y''' = -cos\,x;\ y^{IV} = senx;\ y^{V} = cos\,x \Rightarrow$ Para hallar la fórmula hay que separarlo en derivadas de orden par (con $2n$) y de orden impar (con $2n+1$): $y^{(2n} = (-1)^n\ senx\ ;\ y^{(2n+1} = (-1)^n\ cos\,x.$

b) $y' = -senx;\ y'' = -cos\,x;\ y''' = senx;\ y^{IV} = cos\,x;\ y^{V} = -senx \Rightarrow \begin{cases} y^{(2n+1} = (-1)^{n+1}\ senx \\ y^{(2n} = (-1)^{n+1}\ cos\,x \end{cases}.$

Curvatura y puntos de inflexión



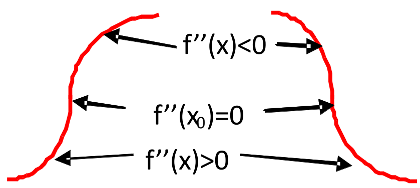
Una función presenta dos **curvaturas** diferentes, definidas a partir de una recta secante: si la función va por encima de la recta, decimos que es convexa por arriba, convexa o que tiene la forma ∩. Si va por debajo de la recta, podemos decir que es convexa por abajo, cóncava o que tiene la forma ∪. Como los comportamientos son complementarios (lo que visto desde arriba es convexo, desde abajo es cóncavo y viceversa), calificamos los comportamientos con su representación gráfica, ∩ ó ∪.

Como ocurre con el crecimiento, la definición no es práctica para los cálculos, por lo que se usa otro procedimiento más cómodo.

La derivada segunda indica en qué forma cambia la monotonía de una función, por lo que se usará para estudiar la curvatura: cuando la función es convexa por arriba, su derivada decrece (líneas punteadas de la gráfica), por lo que su derivada segunda será negativa; cuando la función es convexa por abajo, la derivada crece (líneas punteadas de la gráfica), por lo que la derivada segunda será positiva.

Un **punto de inflexión** es aquel en el que la función cambia su curvatura de forma continua. Así, la condición para el punto de inflexión es que la derivada segunda se anule y se produzca un cambio en la curvatura en dicho punto.

Por lo tanto, estudiar la **curvatura de una función** consiste en estudiar el **signo de su derivada segunda**. En resumen:



- f es ∩ en los intervalos en los que $f''(x)<0$.
- f es ∪ en los intervalos en los que $f''(x)>0$.
- f tiene un punto de inflexión en aquellos puntos en los que $f''(x)=0$ y hay un cambio en la curvatura.

Apoyándonos en los resultados anteriores, podemos afirmar que f tiene un máximo relativo en x_0 cuando $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)<0$, y un mínimo relativo cuando $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)>0$. Este criterio presenta problemas cuando también $f''(x_0)=0$, por lo que, si ocurre tal cosa, recurrimos a la tabla de crecimiento.

Ejemplos

44. Estudia la curvatura de la función $f(x)=\dfrac{3x^2-x}{x+2}$.

Solución :

$$f'(x)=\frac{3x^2+12x-2}{(x+2)^2}\,;\ f''(x)=\frac{(6x+12)(x+2)^2-\left(3x^2+12x-2\right)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4}\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{(6x+12)(x+2)-2\cdot\left(3x^2+12x-2\right)}{(x+2)^3}=\frac{28}{(x+2)^3}\Rightarrow\begin{cases}NUM>0\\ DEN=0\Rightarrow x=-2\,(\textit{raíz triple})\end{cases}$$

La función cambia de curvatura en $x=-2$, pero no tiene punto de inflexión, pues no lo hace con continuidad, sino en la asíntota vertical de la función $\left(f''(x)\neq 0 \text{ y } \nexists f''(-2)\right)$.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,\infty)$
$sgn\left(\dfrac{28}{(x+2)^3}\right)$	–	+
f	∩	∪

Este comportamiento suelen tenerlo las fracciones algebraicas. Para obtenerlo hay que simplificar en la derivada segunda, sacando factor común en el numerador antes de operar. En caso contrario, el denominador sería un binomio a la cuarta, siempre positivo, y el numerador se anularía, apareciendo un falso punto de inflexión. Podemos darnos cuenta del error porque la derivada segunda en ese punto sería una indeterminación $\frac{0}{0}$, que se convierte en ∞ ó $-\infty$ al ser resuelta.

45. Estudia la curvatura y averigua los puntos de inflexión de las siguientes funciones: **a)** $y=\dfrac{x}{x^2+2}$;

b) $y=\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^3}{6}-x^2+5.$

Solución :

a) $y'=\dfrac{2-x^2}{\left(x^2+2\right)^2}\Rightarrow y''=\dfrac{2x\left(x^2-6\right)}{\left(x^2+2\right)^3}\Rightarrow\begin{cases}NUM=0\Rightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{6}\\ DEN>0\end{cases}\Rightarrow$

	$(-\infty,-\sqrt{6})$	$(-\sqrt{6},0)$	$(0,\sqrt{6})$	$(\sqrt{6},\infty)$
$sgn\ y''$	$-$	$+$	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{6},\dfrac{-\sqrt{6}}{8}\right);\left(0,0\right);\left(\sqrt{6},\dfrac{\sqrt{6}}{8}\right).$

b) $y'=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x\Rightarrow y''=x^2-x-2\Rightarrow y''=0\Rightarrow x=-1,2\Rightarrow$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
$sgn\ y''$	$+$	$-$	$+$
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Puntos de inflexión: $\left(-1,\dfrac{17}{4}\right);\left(2,1\right).$

46. Estudia la curvatura y averigua los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y=ln\left(x^2+1\right)$; **b)** $y=\left(x^2+x\right)e^{x-1}$.

Solución :

a) $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}\Rightarrow y''=\dfrac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow\begin{cases}NUM=0\Rightarrow x=\pm1\\ DEN>0\end{cases}\Rightarrow$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$sgn\ y''$	$-$	$+$	$-$
y	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Puntos de inflexión: $\left(-1,ln2\right);\left(1,ln2\right).$

b) $y'=\left(x^2+3x+1\right)e^{x-1}\Rightarrow y''=\left(x^2+5x+4\right)e^{x-1}\Rightarrow y''=0\Rightarrow x^2+5x+4=0\Rightarrow x=-4,-1\Rightarrow$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,\infty)$
$sgn\ y''$	$+$	$-$	$+$
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Puntos de inflexión: $\left(-4,\dfrac{12}{e^5}\right),\ \left(-1,0\right).$

47. Calcular el valor de a para que $f(x)=\dfrac{3x^2-ax}{x+2}$ tenga un mínimo relativo en $x=2$.

Solución :

$$f'(2)=0\Rightarrow\left.\dfrac{3x^2+12x-2a}{(x+2)^2}\right|_{x=2}=0\Rightarrow a=18;f''(x)=\dfrac{72}{(x+2)^3}\Rightarrow f''(2)=\dfrac{9}{8}>0\Rightarrow$$

f tiene un mínimo en $x=2$ cuando $a=18$.

48. Estudia la curvatura y halla los puntos de inflexión de $y=|x|^3-x^2-2|x|$.

Solución :

$y=\begin{cases}-x^3-x^2+2x,\ si\ x<0\\ x^3-x^2-2x,\ si\ x\geq0\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}-3x^2-2x+2,\ si\ x<0\\ 3x^2-2x-2,\ si\ x>0\end{cases}$. No es derivable en $x=0$, pues

$y'\left(0^-\right)=2\neq y'\left(0^+\right)=-2.\ y''=\begin{cases}-6x-2,\ si\ x<0\\ 6x-2,\ si\ x>0\end{cases}\Rightarrow y''=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{3}.$

	$(-\infty,-\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3},\infty)$
$sgn\ y''$	$+$	$-$	$+$
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Puntos de inflexión: $\left(-\dfrac{1}{3},y\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)=\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{20}{27}\right),\left(\dfrac{1}{3},y\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{20}{27}\right)$

Actividades

28. Halla a, b, c y d del polinomio $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ para que cumpla que $p(1)=0$, $p(0)=2$ y tenga dos extremos relativos en $x=1$ y $x=2$.

29. Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}, \text{ si } x\geq 2\\ x(x-2), \text{ si } x<2\end{cases}$ y halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (3,1).

30. Demuestra que la función $f(x)=(1-x^2)\cdot senx$ tiene un máximo relativo en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Menciona los resultados teóricos que uses.

31. Halla los puntos de la curva $y=\frac{1}{4}x^2+4x+4$, en los que la tangente a esta curva pase por el punto (0,0). Halla las ecuaciones de dichas tangentes.

32. Dada la función $f(x)=x^x-2^x+x-1$ demuestra que existen $\alpha,\beta\in(1,2)$ tales que $f(\alpha)=0$ y $f'(\beta)=3$. Menciona los teoremas que utilices.

33. Sea $p(x)$ un polinomio de cuarto grado tal que:

1) $p(x)$ es una función par;
2) dos de sus raíces son $x=1$, $x=-\sqrt{5}$;
3) $p(0)=5$.

a) Estudia su monotonía y averigua sus extremos relativos.
b) Estudia su curvatura y encuentra sus puntos de inflexión.
c) Esboza su gráfica.

34. Averigua los puntos del intervalo $[0,2\pi]$ donde $f(x)=\frac{senx}{2-\cos x}$ alcanza sus valores máximos y mínimos tanto relativos como absolutos.

35. Halla los valores que deben tener a, b y c en la función $f(x)=ax^2+bx+c$ para que: 1) $f(1)=-3$; 2) la tangente a la gráfica en $x=0$ es paralela a la recta $y=2x$; 3) f alcanza el máximo en $x=-1$.

36. Estudia la curvatura de la función $f(x)=e^x\cdot(x^2+x-10)$.

37. Sabiendo que $f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$, halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f. ¿Tiene f un punto de inflexión en el punto $x=4$? Justifica razonadamente tus respuestas.

38. Demuestra que $f(x)=(x+1)\ln(2x^2-x+1)$ tiene un mínimo relativo en el intervalo (0,1).

39. Estudia la monotonía y halla los extremos relativos, si existen, de $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

40. Calcula los valores del número real a sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1-ax}{x^2}=8$.

41. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, asíntotas y puntos de inflexión de $f(x)=xe^{-x}$. Demuestra que verifica que $f(x)\leq\frac{1}{e}, \forall x\in R^+$.

42. Se considera $f(x)=x^2+m$, con m constante.

a) Para cada valor de m halla el valor de $a>0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a,f(a))$ pase por el origen de coordenadas.
b) Halla el valor de m para que la recta $y=x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

Recuerda

✓ **Derivada de una función en un punto.** $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

✓ **Función derivada de f(x).** $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Tabla de derivadas de las funciones usuales

Función	Derivada
k (constante)	0
$x^n,\quad n\in\Re$	$n\cdot x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
$sen\ x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\ sen\ x$
$tg\ x$	$1+tg^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$arc\,sen\,x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arc\cos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arc\,tg\,x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Álgebra de derivadas

$(f\pm g)'=f'(x)\pm g'(x)$

$(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

$(k\cdot f)'(x)=k\cdot f'(x)$, k constante

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2},\quad g(x)\neq 0$

$\left(\dfrac{k}{f}\right)'(x)=-\dfrac{k\cdot f'(x)}{[f(x)]^2},\quad k\in\Re,$

$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Función	Derivada
$(f(x))^n$	$n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x),\quad n\in\Re$
$e^{f(x)}$	$f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$\ln(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$sen(f(x))$	$f'(x)\cdot\cos f(x)$
$\cos(f(x))$	$-f'(x)\cdot sen(f(x))$
$tg(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}=f'(x)\left(1+tg^2(f(x))\right)$

✓ **Teorema de Rolle**. Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a)=f(b)$ entonces $\exists c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

✓ **Teorema del valor medio o de Lagrange**. Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

✓ **Teorema del valor medio generalizado o de Cauchy**. Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces $\exists c\in(a,b)$ tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

✓ **Regla de L'Hôpital** : si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$ y $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

✓ **Ecuación recta tangente**: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

✓ Una función f es **creciente** en el intervalo (a,b) si $f'(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$ y es **decreciente** cuando $f'(x)<0$ para todo $x\in(a,b)$.

✓ Una función f tiene un **punto crítico** en x_0 cuando $f'(x_0)=0$. Es un **máximo relativo** cuando $f''(x_0)<0$ y un **mínimo relativo** cuando $f''(x_0)>0$.

✓ Una función f es $\bigcup$ en (a,b) cuando $f''(x_0)>0$ para todo $x\in(a,b)$ y es $\bigcap$ cuando $f''(x_0)<0$ para todo $x\in(a,b)$.

✓ Una función f tiene un **punto de inflexión** en x_0 cuando $f''(x_0)=0$ y cambia de curvatura en el entorno del punto x_0.